Written strictly in accordance with the New Syllabus for Higher Secondary and Multipurpose Schools for Class X.

HIGHER SECONDARY

ELECTIVE MATHEMATICS

PART II
(CLASS X)

BY

SRI KESHAB CHANDRA NAG

Retired Headmaster, Mitra Institution (Bhowanipur), Author of S. F. & H. S. Core Math., Patiganit (VII, & VIII), Modern Arithmetic (VII & VIII) (in Eng.), Core Ganit (IX-X), Studies in Core Math. (Eng.), Naba Patiganit (VI), S. F. Aichhik Ganit (IX-X), S F. Addl. Math., H. S. Elective Mathematics Parts I-III, A Text Book of H. S. Elec. Math. (in Eng.) I-III & Helps to the Study of H. S. Elec. Math. Papers I & II

REVISED EDITION

CALCUTTA BOOK HOUSE

1/1, Bankim Chatterjee Street, Calcutta-12

Published by :
Paresh Chandra Bhowal
Calcutta Book House
1/1, Bankim Chatterjee Street,
Calcutta-12

Printed by :
Paresh Chandra Bhowal
Mudran Bharati (P.) Limited
2, Ramnath Biswas Lane,
Calcutta-9

পরিচায়িকা

Higher Secondary (একাদশ শ্রেণী) বিদ্যালয়গুলির জন্য নূতন সিলেবাস অনুযায়ী লিখিত Elective Mathematics-এর কোন পাঠ্যপুস্তক না থাকায় অল্প দিন হইল আমি নবম, দশম ও একাদশ শ্রেণীর পাঠ্য Elective Mathematics-এর তিনটি খণ্ড প্রকাশ করি। অদ্য দশম শ্রেণীর পাঠ্য Elective Mathematics-এর দ্বিতীয় খণ্ডের পরিবর্ধিত দ্বিতীয় সংস্করণ প্রকাশিত হইল। এই পুস্তকটির প্রতিখণ্ড স্বয়ংসম্পূর্ণ। দুরূহ বিষয়গুলি সহজবোধ্য করিবার জন্য ইহাতে বহু প্রকারের সমাধান উদাহরণস্বরূপ দেওয়া হইয়াছে।

আমার অন্যান্য গণিত পুস্তকগুলির ন্যায় এই পুস্তকখানিও শিক্ষার্থিগণের উপকার সাধনে সমর্থ হইলে আমার শ্রম সার্থক মনে করিব।

শ্রদ্ধেয় শিক্ষক মহাশয়েরা আমার এই পুস্তকখানি সহানুভূতির সহিত গ্রহণ করিলে বিশেষ সুখী হইব।

ভবানীপুর
৮ই জুন, ১৯৫৯

শ্রীকেশবচন্দ্র নাগ

তৃতীয় সংস্করণ

এই সংস্করণে 'স্থানাঙ্ক জ্যামিতি'র অংশ সম্পূর্ণ নূতনভাবে লেখা হইয়াছে। এই কার্যে আমার শ্রদ্ধেয় সহকর্মী শ্রীবীরেন্দ্রমোহন চক্রবর্তী মহাশয় আমাকে বিশেষ সাহায্য করিয়াছেন। ইতি—

ভবানীপুর
২রা মে, ১৯৬০

শ্রীকেশবচন্দ্র নাগ

পঞ্চদশ সংস্করণ

এই সংস্করণে উদাহরণস্বরূপে ও Exerciesগুলিতে প্রদত্ত প্রায় সব অঙ্কগুলি

দেওয়া হইয়াছে। আশা করি ইহাতে ছাত্রছাত্রীগণ বিশেষভাবে উপকৃত হইবে। ইতি—

ভবানীপুর
১৯৬৯

শ্রীকেশবচন্দ্র নাগ

BOARD OF SECONDARY EDUCATION, WEST BENGAL
HIGHER SECONDARY COURSE

Mathematics (Elective Subject)

Class X

ALGEBRA :

Elementary ideas of elimination ; A. P. and G. P. (finite series), H. P. (definition only) ; Variations ; Logarithms (Note—Use of slide rule may be encouraged) :

Irrational quantities, Simultaneous equations in two unknowns of which one is quadratic and the other linear.

GEOMETRY :

THEORETICAL

The angles made by a tangent to a circle with a chord drawn from the point of contact are respectively equal to the angles in the alternate segments of the circle.

If two chords of a circle intersect either inside or outside the circle, the rectangle contained by the parts of one is equal to the rectangle contained by the parts of the other. (Note—This proposition may be proved with the help of the properties of similar triangles).

PRACTICAL

Construction of tangents to a circle and of common tangents to two circles (both cases), Construction of regular figures of 3, 4, 5 or 6 sides in or about a circle.

Construction of a mean proportional to two given straight lines.

Construction of a square equal in area to a given polygon.

SOLID GEOMETRY :

Axiom (i). One and only one plane may be made to pass through any two intersecting straight lines.

Axiom (ii). Two intersecting planes cut one another in a straight line and in no point outside it.

To prove :

1. If a straight line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their point of intersection, it is also perpendicular to the plane in which they lie.

2. All straight lines drawn perpendicular to a given straight line at a given point of it are coplanar.

3. If two straight lines are parallel and if one of them is perpendicular to a plane, then the other is also perpendicular to the plane.

Concept of angle between two planes, an angle between a straight line and a plane. Concept of parallelism of planes Concept of a line being parallel to a plane. Concept of skew lines.

CO-ORDINATE GEOMETRY :

Rectangular cartesian co-ordinates in a plane ; Lengths of segments ; Sections of a finite segment in a given ratio ; Area of a triangle ; Straight line.

MENSURATION :

Parallelopipeds, Right Circular cones, Prisms and Pyramids (Expressions without proof, of the surfaces and volumes of these solids).

TRIGONOMETRY :

Trigonometrical ratios of an angle : Trigonometrical ratios of angles associated with a given angle ; Addition and subtraction formulas ; Transformation of products and sums ; Multiple and sub-multiple angles.

Note—It is recommended that Solid Geometry and Mensuration of Solids be taught through the drawing board, and the making and handling of Solid models.

CONTENTS

Subject | *Page*

MENSURATION

ALGEBRA

TRIGONOMETRY

Important Formulas and Results

Mensuration :

1. *Rectangular parallelopiped :*

(when a, b, c are its length, breadth ond height)

(i) Area of the surface $=2\,(ab+bc+ca)$ sq. units.

(ii) Volume $=abc$ cubic units.

(iii) The diagonal $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ units of length.

2. *Cube :* (a, b, c being its length, breadth and height)

(i) The area of the surface $=6a^2$ sq. units.

(ii) Volume $=a^3$ cubic untis.

(iii) The diagonal $=a\sqrt{3}$ units of length.

3. (*a*) *Right Prism :*

(i) Area of side faces (lateral surface)

= perimeter of base × height

(ii) Volume = area of base × height

(*b*) *Right Pyramid :*

(i) Slant surface $=\frac{1}{2}$ perimeter of base × slant height,

(ii) Volume $=\frac{1}{3}$ area of base × height.

(*c*) *Tetrahedron :*

Volume $=\frac{1}{3}$ area of base × height.

4. *Right circular cone :*

(If h be the height, r the radius of the base and l the slant height)

i) Area of the slant surface

$=\frac{1}{2}$ (circumference of base) × slant height

$=\frac{1}{2}\times 2\pi r\times l=\pi rl$ sq. units......(i)

or, $=\pi r\sqrt{h^2+r^2}$ sq. units.........(ii)

(ii) Area of the whole surface $=\pi r\,(l+r)$ sq. units.

(iii) Volume $=\frac{1}{3}$(area of base) × height $=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ cu. units.

5. *Right circular cylinder :*

(If r be the radius of the base and h the height)

(i) Area of the curved surface

= circumference of base × height = $2\pi rh$ sq. units.

(ii) Area of the whole surface = $2\pi r(h+r)$ sq. units.

(iii) Volume = (area of base) × height = $\pi r^2 h$ cu. units.

6. *Sphere :* (If r be its radius)

(i) Area of the surface = $4\pi r^2$ sq. units.

(ii) Volume = $\frac{4}{3}\pi r^3$ cu. units.

Algebra :

1. [*Arithmetical Progression*]

If a be the first term, l the last term, b the common difference, n the number of terms, S the sum :

(i) $t_n = a+(n-1)b$.

(ii) $S = \frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)b\right\}$ or $S = \frac{n}{2}(a+l)$.

(iii) $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(iv) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(v) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$.

(vi) Arithmetic mean between a, $b = \frac{1}{2}(a+b)$.

2. [*Geometrical Progression*]

(If a be the first term, r the common ratio, n the number of terms, S the sum.)

(i) $t_n = ar^{n-1}$, (ii) $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ or $\frac{a(r^n-1)}{r-1}$.

(iii) Geometric mean between a, $b = \pm\sqrt{ab}$

3. [*Variation*]

(i) If $A \propto B$, then $B \propto A$ and $A^m \propto B^m$ and $AC \propto BC$.

(ii) If $A \propto B$ and $B \propto C$, then $A \propto C$.

(iii) If $A \propto BC$, then $B \propto \frac{A}{C}$ and $C \propto \frac{A}{B}$.

(iv) If $A \propto C$ and $B \propto C$, then $(A \pm B) \propto C$ and $AB \propto C^2$.

(v) If $A \propto B$ and $C \propto D$, then $AC \propto BD$ and $\frac{A}{C} \propto \frac{B}{D}$.

4. [*Logarithm*]

(i) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

(ii) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

(iii) $\log_a M^n = n \log_a M$

(iv) $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$

(v) $\log_a 1 = 0$

(vi) $\log_a a = 1$.

Trigonometry :

1. $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$;

$\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$, $\cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$;

$\sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $\cos 36^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$;

$\sin 54^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$, $\cos 54^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$;

$\sin 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, $\cos 72^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$;

$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$;

$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$;

$\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\tan 180^\circ = 0$;

$\sin 270^\circ = -1$, $\cos 270^\circ = 0$, $\tan 270^\circ = \infty$;

$\sin 360^\circ = 0$, $\cos 360^\circ = 1$, $\tan 360^\circ = 0$.

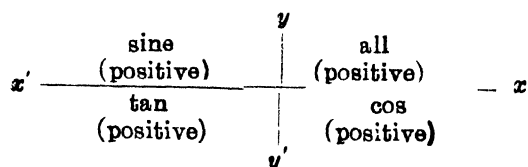
2. $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\tan(-\theta) = -\tan\theta$;

$\sin(90^\circ \pm \theta) = \cos\theta$, $\cos(90^\circ \pm \theta) = \mp\sin\theta$,
$\tan(90^\circ \pm \theta) = \mp\cot\theta$.

$\sin(180^\circ \pm \theta) = \mp\sin\theta$; $\cos(180^\circ \pm \theta) = -\cos\theta$,
$\tan(180^\circ \pm \theta) = \pm\tan\theta$.

$\sin(270^\circ \pm \theta) = -\cos\theta$, $\cos(270^\circ \pm \theta) = \pm\sin\theta$,
$\tan(270^\circ \pm \theta) = \mp\cot\theta$.

$\sin(360^\circ \pm \theta) = \pm\sin\theta$, $\cos(360^\circ \pm \theta) = \cos\theta$,
$\tan(360^\circ \pm \theta) = \pm\tan\theta$.

x' ←	y	→ x
sine (positive)		all (positive)
tan (positive)		cos (positive)
	y'	

3. $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$.

$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}.$$

$$\cot(A \pm B) = \frac{\cot B \cot A \mp 1}{\cot B \pm \cot A}.$$

$\tan(A + B + C)$

$$= \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan B \tan C - \tan C \tan A - \tan A \tan B}$$

4. $2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$.

$2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$.

$2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$.

$2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$.

5. $\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$;

$\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$;

$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$;

$\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$.

6. $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$
$=\cos^2 B-\cos^2 A$

$\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B$
$=\cos^2 B-\sin^2 A.$

7. $\sin 2A=2\sin A\cos A.$

$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A.$

$\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A},\quad \cot 2A=\dfrac{\cot^2 A-1}{2\cot A}.$

$\left.\begin{array}{l}1+\cos 2A=2\cos^2 A\\ 1-\cos 2A=2\sin^2 A\end{array}\right\},\quad \tan^2 A=\dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}.$

$\sin 2A=\dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A};\quad \cos 2A=\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}.$

8. $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$

$\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A.$

$\tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A},\ \cot 3A=\dfrac{\cot^3 A-3\cot A}{3\cot^2 A-1}.$

9. $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},$

$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$\tan\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}},\quad \cot\theta=\dfrac{\cot^2\frac{\theta}{2}-1}{2\cot\frac{\theta}{2}}$

$\sin\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}},\quad \cos\theta=\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}};$

$\left.\begin{array}{l}1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}\\ 1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}\end{array}\right\}\quad \tan^2\frac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}.$

10. If $A+B+C=\pi$, we have the following results :

(*a*) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C.$

(*b*) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C.$

(c) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$

(d) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$

(e) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-4\cos A\cos B\cos C-1.$

(f) $\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A\tan 2B\tan 2C.$

(g) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C.$

(h) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C.$

(i) $\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1.$

(j) $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$

$$=1+4\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4}$$

(k) $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$

$$=4\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}\cos\frac{A+B}{4}.$$

(l) $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1.$

(m) $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$

Co-ordinate Geometry

1. If $P(x_1, y_1)$ and $Q(x_2, y_2)$ be two points, then

(i) the distance $PQ=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

(ii) (a) if PQ is divided internally at the pt. (x, y) in the ratio $m : n$, then $x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$, $y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$.

(b) if PQ is divided externally, then

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\quad y=\frac{my_2-ny_1}{m-n}.$$

(c) the middle point of PQ is $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

2. (*a*) Area of a triangle with (x_1, y_1), (x_2, y_2) and (x_3, y_3) as vertices $=\frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}$.

(*b*) Co-ordinates of the centroid of the above triangle are

$\{\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3), \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)\}$.

(*c*) Conditions for collinearity of 3 points (x_1, y_1), (x_2, y_2) and (x_3, y_3) is $(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)=0$.

3. (i) Equation of a st. line parallel to x-axis is $y=b$.

(ii) ,, ,, ,, ,, y-axis is $x=a$.

(iii) Equation of x-axis is $y=0$ and that of y-axis is $x=0$.

4. General equation of a st. line is $ax+by+c=0$.

Equation of a st. line in standard forms :

(i) Intercept form is $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

(ii) Gradient or m form is $y=mx+c$.

(iii) Perpendicular or normal form is $x \cos\theta+y \sin\theta=p$

(iv) Through two points form is $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$.

5. If (x, y) be the pt. of intersection of two lines $a_1x+b_1y+c_1=0$ and $a_2x+b_2y+c_2=0$, then

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \quad y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

6. Condition for concurrence of three lines $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ and $a_3x+b_3y+c_3=0$ is

$a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)=0$.

7. (i) The angle (θ) between the lines $y=m_1x+c_1$, $y=m_2x+c_2$ is $\theta=\tan^{-1}\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ (the acute angle or the obtuse is found according as the value is positive or negative).

(ii) The angle (θ) between the lines $a_1x+b_1y+c_1=0$ and

$a_2x+b_2y+c_2=0$ is $\theta=\tan^{-1}\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1a_2+b_1b_2}$.

8. Conditions for two lines being parallel ;

(i) $m_1 = m_2$ (i.e., gradients equal), (ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

9. Conditions for two lines being perpendicular :

(i) $m_1 m_2 = -1$, (ii) $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$.

10. The equations of the bisectors of the angle between the lines $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ and $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ are

$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

11. The length of the perpendicular from the pt (x_1, y_1)

(i) to the st. line $ax + by + c = 0$ is $\pm \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

(ii) to the st. line $x \cos \theta + y \sin \theta = p$

is $x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta - p$.

প্রথম অধ্যায়

MENSURATION (পরিমিতি)

Solids (ঘন বস্তু)

সংজ্ঞা : তোমরা জান একখানি পুস্তক বা ইষ্টক অথবা একটি গোলাকার বল এক একটি ঘন বস্তু এবং উহাদের প্রত্যেকে কিছু পরিমাণ দেশ (space বা শূন্যস্থ স্থান) দখল করিয়া অবস্থান করে।

1. সমতল অথবা বক্রতল দ্বারা বেষ্টিত দেশ বা শূন্যস্থ স্থানকে **ঘন বস্তু** বা **ঘন** (solid) বলে।

2. সমতলসমূহ দ্বারা বেষ্টিত স্থানকে বহুতলক (polyhedron) বলে।

দ্রষ্টব্য : সমতলস্থ কোন স্থানকে বেষ্টন করিতে হইলে যেমন ন্যূনপক্ষে তিনটি সরলরেখা দরকার হয়, তদ্রূপ শূন্যস্থ কোন স্থানকে বেষ্টন করিতে হইলে ন্যূনপক্ষে চারিটি সমতল দরকার।

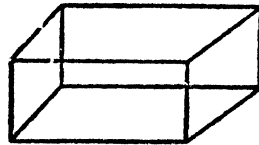
এই সমতলগুলিকে ঘন বস্তুর তল (faces) বলে এবং দুইটি তল যে সরল রেখায় পরস্পর ছেদ করে সেই সরলরেখাকে প্রান্ত রেখা বা প্রান্তিকী (edge) বলে।

দৃষ্টান্ত : একটি ইষ্টক ছয়টি সমতল ক্ষেত্র দ্বারা বেষ্টিত। এই তলগুলি 12টি সরল রেখায় ছেদ করিয়াছে।

একটি ক্রিকেট বল একটি বক্রতল দ্বারা বেষ্টিত।

3. যে ঘন তিন জোড়া সমান্তরাল সমতল দ্বারা বেষ্টিত তাহাকে ঘন সামান্তরিক (Parallelopiped) বলে।

ইহার প্রতি তল সামান্তরিক এবং দুই দুইটি বিপরীত তল সর্বসম।

চিত্র নং 1

চিত্র নং 2

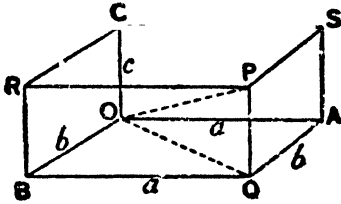
4. ঘন সামান্তরিকের তলগুলি যদি আয়তক্ষেত্র হয়, তবে উহাকে আয়তঘন বা সমকোণী চৌপল (Rectangular Parallelopiped) বলে। ইহার তলগুলি পরস্পর সমকোণে সংযুক্ত।

যেমন একটি কাঠের বাক্স। ইহার ছয়টি তল আছে ; যথা—নীচে একটি, উপরে একটি এবং চারিপাশে চারিটি, এই মোট ছয়টি।

3 নম্বর চিত্রে তলগুলি OAQB, CRPS, OASC, OBRC, BRPQ এবং AQPS.

আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা বা বেধ আছে।

ঘনফল ঃ ঘনবস্তুর তলগুলি দ্বারা সীমাবদ্ধ দেশকে উহার আয়তন বা ঘনফল (volume) বলে। ঘনফলের তিনটি মাত্রা থাকে। ক্ষেত্রফলের মাত্রা দুইটি। অতএব, ঘনফলকে ঘন এককে এবং ক্ষেত্রফলকে বর্গ এককে প্রকাশ করিতে হয়।

মনে কর, কোন আয়তঘনের দৈর্ঘ্য a একক, প্রস্থ b একক এবং উচ্চতা c একক।

চিত্র নং 3

অতএব,

(a) আয়তঘনের তলগুলির **ক্ষেত্রফল**

$=(2ab+2bc+2ca)$ বর্গ একক

$=2(ab+bc+ca)$ বর্গ একক।

(b) আয়তঘনের **ঘনফল**

$=$ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা $=$ দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা

$=abc$ ঘন একক।

(c) এখানে [চিত্র 3] OP, আয়তঘনের **কর্ণ**।

$OP^2=OQ^2+PQ^2$ [$\because$ $\angle OQP=1$ সমকোণ]

$=OA^2+AQ^2+PQ^2$ [$\because$ $\angle OAQ=1$ সমকোণ]

$=a^2+b^2+c^2$,

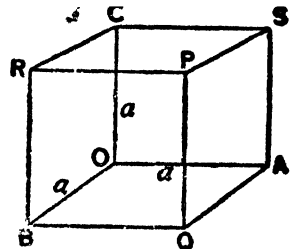
$\therefore$ কর্ণ $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{\text{দৈর্ঘ্য}^2+\text{প্রস্থ}^2+\text{উচ্চতা}^2}$।

5. যদি আয়তঘনের তলগুলি বর্গক্ষেত্র হয় এবং উহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান হয়, তবে তাহাকে **ঘনক** (cube) বলে।

ইহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা প্রত্যেকটি a দৈর্ঘ্য একক হইলে

(i) ঘনকের **তলগুলির ক্ষেত্রফল** $=2a^2+2a^2+2a^2=6a^2$ বর্গ একক।

(ii) **ঘনকের ঘনফল** $=a\times a\times a$

$=a^3$ ঘন একক।

চিত্র নং 4

(iii) ঘনকের কর্ণ $=\sqrt{3a^2}=a\sqrt{3}$ দৈর্ঘ্য একক

উদাহরণমালা 1

উদা. 1. Find the area of the whole surface, the volume and the diagonal of a rectangular solid whose dimensions are 4 yds., 1 yd. 1 ft. and 3 ft.

[যে আয়তঘনের মাত্রাগুলি যথাক্রমে 4 গজ, 1 গ. 1 ফু. ও 3 ফুট তাহার তলসমূহের ক্ষেত্রফল, ঘনফল এবং কর্ণ নির্ণয় কর।]

আয়তঘনের দৈর্ঘ্য $(a)=4$ গ.$=12$ ফু., প্রস্থ $(b)=1$ গ. 1 ফু.$=4$ ফু. এবং উচ্চতা $(c)=3$ ফুট।

$\therefore$ উহার তলসমূহের ক্ষেত্রফল$=2(ab+bc+ca)$

$=2(12\times4+4\times3+3\times12)$ বর্গ ফু.$=192$ বর্গ ফুট।

উহার ঘনফল$=abc=12$ ফু.$\times 4$ ফু.$\times 3$ ফু.$=144$ ঘনফুট।

উহার কর্ণ$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{12^2+4^2+3^2}$ ফুট$=\sqrt{169}$ ফুট

$=13$ ফুট।

উদা. 2. Find the area of the whole surface, the volume and the diagonal of a cube, each edge of which is 7 cm.

[একটি ঘনকের প্রত্যেক ধার 7 সেন্টিমিটার হইলে উহার সমগ্রতল, ঘনফল ও কর্ণ নির্ণয় কর।]

ঘনকটির তলসমূহের ক্ষেত্রফল$=6a^2=6\times7^2$ বর্গ সে.মি.$=294$ বর্গ সে.মি.।

উহার ঘনফল$=a^3=(7)^3$ ঘন সে. মি.$=343$ ঘন সেন্টিমিটার।

উহার কর্ণ$=\sqrt{3}a=\sqrt{3}\times7$ সে. মি.$=7\sqrt{3}$ সেন্টিমিটার।

উদা. 3. What is the length of the edge of a cube of which the total area of the surfaces is 346·56 sq. cm.?

[C. U. 1956]

[কোন ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল মোট 346·56 বর্গ সেন্টিমিটার; উহার প্রান্তিকীয় দৈর্ঘ্য কত?]

মনে কর, ঘনকটির প্রত্যেক প্রান্তিকীয় দৈর্ঘ্য$=a$ সে. মি.।

$\therefore$ উহার সমগ্রতল$=6a^2$ বর্গ সে. মি.,

$\therefore$ $6a^2=346{\cdot}56$ বর্গ সে. মি.

বা, $a^2=\dfrac{346{\cdot}56}{6}$ বর্গ সে. মি.$=57{\cdot}76$ বর্গ সে. মি.,

$\therefore$ $a=\sqrt{57{\cdot}76}$ সে. মি.$=7{\cdot}6$ সে. মি.

$\therefore$ নির্ণেয় প্রান্তিকী$=7\,6$ সেন্টিমিটার।

উদা. 4. Find the length of the edge of a cube whose total area of the surfaces is equal in magnitude to the volume of the cube.

[একটি ঘনকের তলগুলির ক্ষেত্রফল যত একক উহার ঘনফলও তত একক। উহার বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?]

এখানে বলা আছে যে, ঘনকটির তলগুলির ক্ষেত্রফল যত একক উহার ঘনফলও তত একক। মনে কর, উহার বাহুর দৈর্ঘ্য a একক।

এখানে, উহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $=6a^2$ বর্গ একক

এবং উহার ঘনফল $=a^3$ ঘন একক। $\therefore \quad a^3=6a^2, \quad \therefore \quad a=6.$

অতএব ঘনকটির প্রান্তিকী $=6$ দৈর্ঘ্য একক

উদা. 5. একটি জলাধারে $243\frac{3}{4}$ ঘনফুট জল ধরে। আর একটি বর্গাকার তলবিশিষ্ট এবং 4 ফুট 4 ইঞ্চি গভীর জলাধারে উহার 4 গুণ জল ধরে। দ্বিতীয় জলাধারের দৈর্ঘ্য কত ? [C. U. '10]

দ্বিতীয় জলাধারের আয়তন $=243\frac{3}{4}$ ঘন ফু. $\times 4=975$ ঘন ফুট।

উহার গভীরতা $=4$ ফু. 4 ই. $=\frac{13}{3}$ ফুট।

$\therefore$ উহার বর্গাকার তলের ক্ষেত্রফল = আয়তন ÷ গভীরতা

$=(975\div\frac{13}{3})$ বর্গফুট $=\frac{975\times 3}{13}$ বর্গ ফু. $=225$ বর্গ ফুট।

$\therefore$ উহার নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $=\sqrt{225}$ ফু. $=15$ ফুট।

উদা. 6. The dimensions of a rectangular solid are as 4 : 3 : 2 and its total surface is 1300 sq. cm., find its length, breadth and height.

[একটি আয়তঘনের মাত্রাগুলির অনুপাত 4 : 3 : 2 এবং উহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 1300 বর্গ সেন্টিমিটার। উহার মাত্রাগুলি নির্ণয় কর।]

এখানে আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত $=4:3:2.$

সুতরাং, দৈর্ঘ্য যদি $4a$ সে. মি. হয়, তবে প্রস্থ $3a$ সে. মি. এবং উচ্চতা $2a$ সে. মি. হইবে।

এক্ষণে, সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $=2(4a\times 3a+4a\times 2a+3a\times 2a)$ব.সে.মি.

$=52a^2$ বর্গ সে. মি.,

$\therefore\ 52a^2=1300$ব.সে.মি. (স্বীকার), বা, $a^2=25$ব.সে.মি., $\therefore\ a=5$সে.মি.।

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $=5$ সে.মি. $\times 4=20$ সে.মি., প্রস্থ $=5$ সে.মি. $\times 3=15$ সে মি

এবং উচ্চতা $=5$ সে. মি. $\times 2=10$ সে. মিটার।

উদা. 7. Three cubes of metal whose edges are 3, 4 and 5 inches respectively are melted and formed into a single cube, show that the edge of the new cube will be 6 inches. [P. U.]

[ধাতুনির্মিত তিনটি ঘনকের ধারগুলি যথাক্রমে 3, 4 ও 5 ইঞ্চি। উহাদিগকে গলাইয়া একটি ঘনকে পরিণত করা হইল। দেখাও যে নূতন ঘনকটির ধার 6 ইঞ্চি।]

প্রদত্ত ঘনক তিনটির মোট ঘনফল $=\{(3)^3+(4)^3+(5)^3\}$ ঘন ইঞ্চি

$=216$ ঘন ইঞ্চি।

অতএব, নূতন ঘনকটির ঘনফল $=216$ ঘন ইঞ্চি,

$\therefore$ উহার (প্রান্তিকী $)^3=216$ ঘন ইঞ্চি

$\therefore$ উহার নির্ণেয় প্রান্তকী $=\sqrt[3]{216}$ ই. $=\sqrt[3]{6\times6\times6}$ ই. $=6$ ইঞ্চি।

উদা. 8. Find the length of the longest rod that can be placed in a room 30 ft. long, 24 ft. broad and 18 ft. high. [P. U.]

[30 ফুট দীর্ঘ, 24 ফুট প্রশস্ত ও 18 ফুট উচ্চ কোন ঘরের মধ্যে কত বৃহত্তম দৈর্ঘ্যের দণ্ড স্থাপন করা যায়?]

এখানে বুঝা যায় যে, দীর্ঘতম দণ্ডটি ঐ গৃহের কর্ণের সমান হইবে।

এক্ষণে, কর্ণ $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; এখানে $a=30$ফু., $b=24$ফু., $c=18$ফু.।

$\therefore$ নির্ণেয় দণ্ডের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{30^2+24^2+18^2}$ ফু. $=\sqrt{1800}$ ফু.

$=30\sqrt{2}$ ফু $=42{\cdot}42$ ফুট (প্রায়)।

উদা. 9. A closed box which externally measures 16 in. long, 12 in. broad and 8 in. high, is made of wood half an inch thick. Find the cost of painting its inner surface at 1 a. 6p. per sq. ft.

[একটি ঢাকনাযুক্ত কাঠের বাক্সের বাহিরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 16, 12 ও 8 ইঞ্চি এবং উহার কাঠ অর্ধ ইঞ্চি পুরু। প্রতি বর্গফুটে 1 আ. 6 পাই হিসাবে উহার ভিতরটি রং করিতে কত ব্যয় হইবে?]

কাঠের তক্তা $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি পুরু হওয়ায় বাক্সটির ভিতরের দিকের মাত্রাগুলির প্রত্যেকটি $\frac{1}{2}$ ই. $\times 2$ বা 1 ইঞ্চি করিয়া কম হইবে।

$\therefore$ ভিতরের দিকের দৈর্ঘ্য $=15$ ই., প্রস্থ $=11$ ই., এবং উচ্চতা $=7$ ই.

$\therefore$ ভিতরের সমগ্রতল $=2(15\times11+11\times7+15\times7)$ বর্গ ই.

$=694$ বর্গ ই. $=\frac{694}{144}$ বর্গফুট।

$\because$ এক বর্গফুটের খরচ $= \frac{3}{2}$ আনা,

$\therefore$ নির্ণেয় খরচ $= \frac{3}{2}$ আ. $\times \frac{694}{144} = \frac{347}{48}$ আ. $= 7$ আনা $2\frac{3}{4}$ পাই।

[**দ্রষ্টব্য :** বাক্সটির ঢাকনা না থাকিলে ভিতরের উচ্চতা $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি কম হইত, অন্য মাত্রাগুলি 1 ইঞ্চি কম হইত।]

উদা. 10. A school room is to be built to accommodate 70 children, so as to allow $8\frac{1}{2}$ sq. ft. at floor and $110\frac{1}{2}$ cubic ft. of space for each child ; if the room be 34 ft. long, what must be its breadth and height ?

[70 জন ছাত্রের জন্য এরূপ একটি স্কুলঘর নির্মাণ করিতে হইবে যেন প্রত্যেক ছাত্রের জন্য $8\frac{1}{2}$ বর্গফুট মেঝে ও $110\frac{1}{2}$ ঘনফুট শূন্যস্থান থাকে। ঘরটির দৈর্ঘ্য 34 ফুট হইলে উহার প্রস্থ ও উচ্চতা কত হইবে ?]

প্রত্যেক বালকের জন্য $8\frac{1}{2}$ বর্গ ফুট মেঝে লাগে,

$\therefore$ ঘরটির মেঝের ক্ষেত্রফল $= 8\frac{1}{2}$ বর্গ ফু. $\times 70 = 595$ বর্গ ফু.

$\because$ ঘরের দৈর্ঘ্য $= 34$ ফুট, $\therefore$ উহার নির্ণেয় প্রস্থ $= \frac{595}{34}$ ফু. $= 17\frac{1}{2}$ ফুট।

আবার, প্রত্যেক বালকের জন্য $110\frac{1}{2}$ ঘন ফুট আয়তনের স্থান লাগে,

$\therefore$ ঘরটির ঘনফল $= 110\frac{1}{2}$ ঘন ফু. $\times 70 = 7735$ ঘন ফু,

কিন্তু উহার দৈর্ঘ্য $= 34$ ফু. এবং প্রস্থ $= \frac{35}{2}$ ফু.,

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা $= \frac{7735 \times 2}{34 \times 35}$ ফুট $= 13$ ফুট।

উদা. 11. The three conterminous edges of a rectangular solid are 36, 75 and 80 inches respectively ; find the edge of a cube which will be of the same capacity. [R. E.]

[কোন আয়তঘনের সমবিন্দু ধারগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 36, 75 ও 80 ইঞ্চি। উহার সম আয়তনের ঘনকের প্রান্তিকী (বাহু) নির্ণয় কর।]

এখানে আয়তঘনের মাত্রাগুলি 36 ই., 75 ই., 80 ই. ;

$\therefore$ ঘনকের ঘনফল $=$ আয়তঘনের ঘনফল $= 36 \times 75 \times 80$ ঘন ই.

$\therefore$ ঘনকের প্রান্তিকী (বাহু) $= \sqrt[3]{36 \times 75 \times 80}$ ই.

$= \sqrt[3]{3^3 \times 4^3 \times 5^3}$ ই. $= 3 \times 4 \times 5$ ই. $= 60$ ইঞ্চি।

উদা. 12. A rectangular reservoir is 100 ft. long by 64 ft. broad ; at what rate of speed per hour must water flow into it through a pipe, whose cross-section is a square of side 2 in., in order to make the water rise 2 ft. in 8 hrs. ? [B. U.]

[একটি আয়তাকার জলাধারের দৈর্ঘ্য 100 ফুট ও প্রস্থ 64 ফুট। যে নলের প্রস্থচ্ছেদ (cross-section) 2 ইঞ্চি বর্গ তাহার ভিতর দিয়া ঘণ্টায় কত বেগে জল প্রবেশ করিলে 8 ঘণ্টায় উহাতে 2 ফুট উচ্চ জল হইবে ?]

জলাধারের দৈর্ঘ্য = 100 ফুট এবং প্রস্থ = 64 ফুট।

8 ঘণ্টায় উহাতে 2 ফুট গভীর জল প্রবেশ করিয়াছে,

∴ ঐ জলের ঘনফল $= 100 \times 64 \times 2$ ঘন ফু. = 12800 ঘন ফুট।

∴ 1 ঘণ্টায় উহাতে $\frac{12800}{8}$ বা 1600 ঘন ফুট জল প্রবেশ করে। যে নল দিয়া জল প্রবেশ করে তাহার প্রস্থচ্ছেদ (cross-section) $= 2$ ই. $\times 2$ ই. $= 4$ বর্গ ই. $= \frac{1}{36}$ বর্গ ফুট ;

∴ প্রতি ঘণ্টায় ইহাতে $(1600 \div \frac{1}{36})$ ফুট বা $\frac{1600 \times 36}{3 \times 1760}$ মাইল বা $10\frac{10}{11}$ মাইল বেগে জল প্রবেশ করে।

Exercise 1

1. Find the total surface, the volume and the diagonal of a rectangular solid whose dimensions are 3 ft., 2 ft. and 4 ft.

[যে আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 3 ফুট, 2 ফুট ও 4 ফুট তাহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল, ঘনফল ও কর্ণ কত ?]

2. Find the whole surface, the volume and the diagonal of a cube whose edge is 5 cms.

[একটি ঘনকের প্রত্যেক বাহু 5 সেন্টিমিটার হইলে উহার তলগুলির ক্ষেত্রফল, ঘনফল ও কর্ণ নির্ণয় কর।]

3. Find the total surface and the volume of a cube whose diagonal measures $3\sqrt{3}$ cms.

[একটি ঘনকের কর্ণ $3\sqrt{3}$ সেন্টিমিটার ; উহার সমগ্রতল ও ঘনফল নির্ণয় কর।]

4. What is the length of the edge of a cube whose total surface is 37·5 sq. ft. ?

[যে ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 37·5 বর্গফুট তাহার প্রান্তিকীয় দৈর্ঘ্য কত ?]

5. The dimensions of a rectangular solid are 8, 6 and 5 cms., find its total surface. ✓

একটি আয়তঘনের মাত্রাগুলি 8, 6 ও 5 সেন্টিমিটার। উহার তলগুলির মোট পরিমাণ নির্ণয় কর।]

6. The diagonal of a cube is 30 inches ; what is the solid content ? [S. A.]

[যে ঘনকের কর্ণ 30 ইঞ্চি তাহার ঘনফল কত ?]

7. The dimensions of a rectangular solid are as 5 : 3 : 2 and its total surface measures 558 sq. inches, find the dimensions. [H. S. '68]

[একটি আয়তঘনের মাত্রাগুলির অনুপাত 5 : 3 : 2 এবং উহার সমগ্রতলের পরিমাণ 558 বর্গইঞ্চি। উহার মাত্রাগুলি নির্ণয় কর।]

8. The whole surface of a cube is equal to the sum of the whole surfaces of three other cubes whose edges are 3 in., 4 in. and 1 ft. respectively. Find the edge of the first cube.

[একটি ঘনকের সমগ্রতল যথাক্রমে 3 ইঞ্চি, 4 ইঞ্চি ও 1 ফুট ধারবিশিষ্ট তিনটি ঘনকের সমগ্রতলগুলির সমষ্টির সমান। প্রথম ঘনকটির বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?]

9. The total surface of a rectangular solid of square base is 506 sq. ft. and its height is 6 ft , find its length and breadth.

[বর্গাকার ভূমিবিশিষ্ট একটি আয়তঘনের সমগ্রতল 506 বর্গ ফুট এবং উচ্চতা 6 ফুট ; উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।]

✓ 10. Find how many bricks of which the length, breadth and thickness are 9, $4\frac{1}{2}$ and 3 inches, will be required to build a wall of which the length, height and thickness are 72, 8 and $1\frac{1}{2}$ ft [R. E.]

[যদি প্রত্যেক ইটের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ (thickness) যথাক্রমে 9, $4\frac{1}{2}$ ও 3 ইঞ্চি হয়, তবে 72 ফুট দীর্ঘ, 8 ফুট প্রশস্ত ও $1\frac{1}{2}$ ফুট পুরু একটি প্রাচীর নির্মাণ করিতে ঐরূপ কতগুলি ইট লাগিবে ?]

11. A closed box, which externally measures $5\frac{1}{2}$ ft. long, $4\frac{2}{3}$ ft. wide and $5\frac{1}{6}$ ft. high, is made of wood 1 inch thick. Find the cost of painting its inner surface at 9 pies per sq. ft.

[একটি ঢাকনাযুক্ত কাঠের সিন্দুকের বাহিরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে $5\frac{1}{2}$ ফুট, $4\frac{2}{3}$ ফুট ও $5\frac{1}{6}$ ফুট এবং উহার কাঠ 1 ইঞ্চি পুরু। প্রতি বর্গফুটে 9 পাই হিসাবে উহার ভিতরের তলগুলি রং করিতে কত ব্যয় হইবে ?]

12. A box without a lid is made of wood an inch thick ; the external length, breadth and height of the box are 2 ft. 10 in , 2 ft 5 in. and 1 ft. 7 in. respectively ; find what volume the box will hold and the number of cubic inches of wood. [S.A.]

[এক ইঞ্চি পুরু কাষ্ঠনির্মিত ঢাকনাবিহীন একটি বাক্সের বাহিরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 2 ফুট 10 ইঞ্চি, 2 ফু. 5 ই. ও 1 ফু. 7 ইঞ্চি। উহার আয়তন কত এবং উহার জন্য কত ঘন ইঞ্চি কাঠ লাগিয়াছে?]

13. Find the length of the longest rod that can be placed in a room which is 20 m. long, 12 m. broad and 9 m. high.

[20 মিটার দীর্ঘ, 12 মি. প্রশস্ত ও 9 মি. উচ্চ কোন ঘরের মধ্যে কত দীর্ঘতম মাপের দণ্ড স্থাপন করা যায়?]

13. (*a*) একটি আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও কর্ণ যথাক্রমে 48 মি., 16 মি. ও 52 মিটার। উহার উচ্চতা নির্ণয় কর।

14. Three cubes of metal whose edges are 5, 4 and 3 ft. respectively are melted and formed into a single cube. Find its diagonal.

[যথাক্রমে 5, 4 ও 3 ফুট ধারবিশিষ্ট তিনটি ধাতুনির্মিত ঘনক গলাইয়া একটি মাত্র ঘনকে পরিণত করা হইল। উহার কর্ণের দৈর্ঘ্য কত?]

15. The external length, breadth and height of a rectangular wooden box are 18 in., 10 in. and 6 in. respectively, and the thickness of wood is half an inch. When the box is empty it weighs 15 lbs., and when filled with sand 100 lbs. Find the weight of a cubic inch of wood and that of sand. [S. A.]

[একটি আয়তাকার কাঠের বাক্সের বাহিরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 18 ইঞ্চি, 10 ইঞ্চি ও 6 ইঞ্চি এবং উহার কাঠ অর্ধ ইঞ্চি পুরু। খালি বাক্সটির ওজন 15 পাউণ্ড এবং বালিপূর্ণ হইলে উহার ওজন হয় 100 পাউণ্ড। এক ঘনইঞ্চি কাঠের ও বালির ওজন কত?]

16. If a be the length of each edge of a cube, show that the diagonal of each face is $a\sqrt{2}$, and the diagonal of the solid is $a\sqrt{3}$. [R. U. S.]

[একটি ঘনকের প্রত্যেক ধারের দৈর্ঘ্য a হইলে, প্রমাণ কর যে উহার প্রত্যেক তলের কর্ণের দৈর্ঘ্য $a\sqrt{2}$ এবং ঘনকটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $a\sqrt{3}$.]

17. A reservoir is 24 ft. 8 in. long by 12 ft. 9 in. wide; find how many cubic feet of water must be drawn off to make the surface sink 1 ft. [S. A.]

[24 ফুট 8 ইঞ্চি দীর্ঘ ও 12 ফুট 9 ইঞ্চি প্রশস্ত জলাধার হইতে কত ঘন ফুট জল তুলিয়া লইলে উহার জলতল 1 ফুট নামিয়া যাইবে?]

18. A cistern is filled in $3\frac{1}{2}$ hrs. by a pipe 3 sq. in. in cross-section, through which water flows at the rate of 6·4 miles an hour ; what is the volume of the cistern ? [R.M.A.]

[3 বর্গ ইঞ্চি প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট একটি নলের ভিতর দিয়া ঘণ্টায় 6·4 মাইল বেগে জল প্রবেশ করিয়া $3\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় একটি জলাধারকে জলপূর্ণ করে। জলাধারটির আয়তন কত ?]

19. Find the number of bricks required to construct a wall, 6 ft. high and 9 in. thick, surrounding a rectangular garden whose length is 120 ft. and breadth 90 ft., the length, breadth and thickness of each brick being 9, $4\frac{1}{2}$ and 3 in. respectively. [C. U. '35]

[একটি 120 ফুট দৈর্ঘ্য ও 90 ফুট প্রস্থবিশিষ্ট আয়তাকার বাগানকে ঘিরিয়া 6 ফুট উচ্চ ও 9 ইঞ্চি পুরু একটি প্রাচীর নির্মাণ করিতে 9 ইঞ্চি দৈর্ঘ্য, $4\frac{1}{2}$ ইঞ্চি প্রস্থ ও 3 ইঞ্চি বেধবিশিষ্ট কতগুলি ইট লাগিবে ?]

20. The length of a cistern, $10\frac{1}{2}$ ft. deep, is twice its breadth and it holds $37\frac{1}{2}$ tons of water. If the weight of 1 c. ft. of water is 1000 oz., find the length and the breadth of the cistern. [P. U. '26]

[$10\frac{1}{2}$ ফুট গভীর একটি জলাধারের দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণ এবং উহাতে $37\frac{1}{2}$ টন জল ধরে। এক ঘনফুট জলের ওজন 1000 আউন্স হইলে, ঐ জলাধারের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত ?]

Prism (প্রিজ্‌ম্)

2. কয়েকটি সমতল দ্বারা বেষ্টিত ঘনের যদি প্রান্ততল দুইটি (ends) সমান্তরাল ও সর্বসম হয় এবং পার্শ্বতলসমূহ (side faces) সামান্তরিক হয়, তবে উহাকে **প্রিজ্‌ম্** বলে।

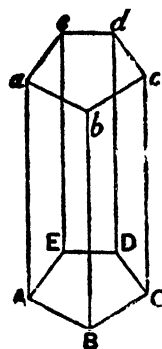
5 নম্বর চিত্রে অঙ্কিত প্রিজ্‌ম্‌টির একটি প্রান্ততল ABCDE এবং আর একটি প্রান্ততল *abcde* ; এই তল দুইটি সর্বসম এবং প্রত্যেকটির পাঁচটি করিয়া বাহু। AB*ba*, BC*cb*, C*cd*D প্রভৃতি তলগুলিকে ইহার **পার্শ্বতল** বলে। এই পার্শ্বতলগুলি সামান্তরিক।

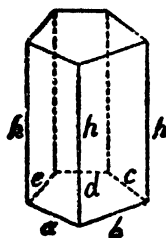
সর্বসম প্রান্ততলগুলি ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ বা বহুভুজ হইতে পারে এবং তদনুসারে ইহার ত্রিভুজ প্রিজ্ম্ (triangular prism), চতুর্ভুজ প্রিজ্ম্, প্রভৃতি নাম হয়।

প্রিজ্ম্টি যে প্রান্ততলের উপর দণ্ডায়মান থাকে তাহাকে প্রিজ্মের **ভূমি** (base) বলে। চিত্রে ABCDE তলটি প্রিজ্মের ভূমি।

প্রিজ্মের প্রান্ততল দুইটির মধ্যে লম্ব দূরত্বকে উহার উচ্চতা বলে।

প্রতি দুইটি পার্শ্বতল যে সরলরেখায় ছেদ করে সেই সরলরেখাকে পার্শ্ব-প্রান্তিকী (side edge) বলে।

যে প্রিজ্মের পার্শ্বপ্রান্তিকীগুলি প্রান্ততলের উপরে লম্ব হয় তাহাকে **লম্ব প্রিজ্ম্** (Right prism) বলে। এতদ্ব্যতীত অন্য প্রিজ্ম্কে **তির্যক প্রিজ্ম্** (oblique prism) বলে।

চিত্র নং 5

লম্ব প্রিজ্মের পার্শ্বতলগুলি আয়তক্ষেত্র হয় এবং পার্শ্বপ্রান্তিকীকে উহার উচ্চতা বলা হয়। যে কোন প্রিজ্মের পার্শ্বপ্রান্তিকীগুলি সমান হয়।

চিত্র নং 6

[**দ্রষ্টব্য :** আয়তঘন একটি লম্ব প্রিজ্ম্]

যদি লম্ব প্রিজ্মের উচ্চতা h একক এবং প্রান্ততলের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য $a, b, c, d \cdots$ একক হয়, তবে

(a) লম্ব প্রিজ্মের **পার্শ্বতলসমূহের ক্ষেত্রফল**

$$= ah + bh + ch + dh + \cdots$$

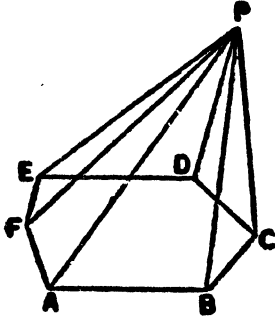
$$= (a + b + c + d + \cdots)h$$

= **প্রান্ততলের পরিসীমা × উচ্চতা**।

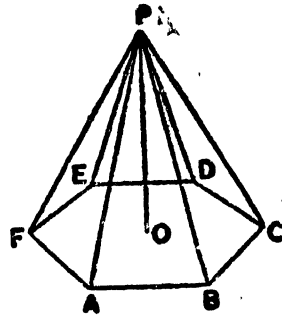
(b) **লম্ব প্রিজ্মের ঘনফল = প্রান্ততলের ক্ষেত্রফল × উচ্চতা**।

Pyramid (পিরামিড)

3. কতিপয় সমতলদ্বারা বেষ্টিত যে ঘনের ভূমিতলটি একটি যে কোন সরলরৈখিক ক্ষেত্র এবং যাহার পার্শ্ব-তলগুলি ঐ ভূমিতলের বহিঃস্থ কোন বিন্দুতে মিলিত সাধারণ শীর্ষবিশিষ্ট কতিপয় ত্রিভুজ তাহাকে পিরামিড (pyramid) বলে।

চিত্র নং 7

অতএব, পিরামিডের প্রান্ততলটি একটি ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ বা বহুভুজ এবং ইহার পার্শ্বতলগুলি কতিপয় সমশীর্ষ ত্রিভুজ। চিত্র 7 দেখ।

প্রান্ততলটিকে পিরামিডের ভূমি (base) এবং ত্রিভুজগুলির সাধারণ শীর্ষবিন্দুটিকে পিরামিডের **শীর্ষ** (vertex) বলা হয়। শীর্ষ হইতে ভূমির উপরে অঙ্কিত লম্বকে ইহার উচ্চতা (height) বলা হয়। প্রতি দুইটি ত্রিভুজ যে সরলরেখায় ছেদ করে সেই সরল-রেখাকে পার্শ্বপ্রান্তিকী বলে।

যদি পিরামিডের শীর্ষ হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্ব ভূমির কেন্দ্র (অর্থাৎ উহার পরিবৃত্তের বা অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র) দিয়া যায়, তবে ঐ পিরামিডকে **লম্ব পিরামিড** (right pyramid) বলে। চিত্র 8 দেখ। লম্ব পিরামিডের ভূমিটি আয়ত বা বর্গক্ষেত্র হইলে উহার শীর্ষ হইতে অঙ্কিত লম্বটি ভূমির কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুতে মিলিত হয়।

চিত্র নং 8

যে লম্ব পিরামিডের ভূমিটি সুষম ক্ষেত্র তাহাকে regular (সুষম) পিরামিড বলে। লম্ব পিরামিডের পার্শ্বতলগুলি সর্বসম সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হয়।

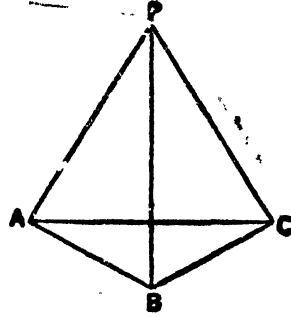
এতদ্ব্যতীত অন্য পিরামিডগুলিকে তির্যক পিরামিড বলে। চিত্র 9 দেখ। এই পিরামিডের শীর্ষ হইতে প্রান্ততলের যে কোন বাহুর উপর লম্ব টানিলে এই লম্বকে **তির্যক উচ্চতা** (slant height) বলে।

[**দ্রষ্টব্য :** 10 নম্বর চিত্রে PO পিরামিডের উচ্চতা এবং PK উহার তির্যক উচ্চতা।]

যে পিরামিডের ভূমি একটি ত্রিভুজ তাহাকে **চতুস্তলক** (tetrahedron) বলে। ইহার ভূমি সমবাহু ত্রিভুজ হইলে উহাকে লম্ব চতুস্তলক (right tetrahedron) বলে।

চিত্র নং 9

চতুস্তলকের চারিটি তল, চারিটি শীর্ষ এবং ছয়টি প্রান্তিকী থাকে।

যে চতুস্তলকের চারিটি তলই সমান ও সমবাহু ত্রিভুজ তাহাকে regular বা সুষম চতুস্তলক বলে।

যদি কোন লম্ব পিরামিডের ভূমির বাহুগুলির দৈর্ঘ্য $a, b, c, d \cdots\cdots$ একক হয় এবং পিরামিডের উচ্চতা h একক এবং তির্যক উচ্চতা l একক হয়, তবে

চিত্র নং 10

(a) লম্ব পিরামিডের **পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল**

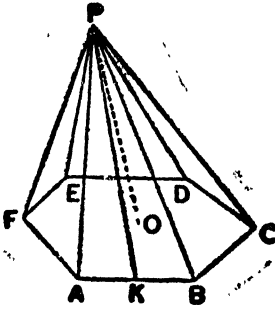
$=\frac{1}{2}al+\frac{1}{2}bl+\frac{1}{2}cl+\frac{1}{2}dl+\cdots$

$=\frac{1}{2}(a+b+c+d+\cdots)l$

$=$ভূমির অর্ধ-পরিসীমা $\times$ তির্যক উচ্চতা।

(b) পিরামিডের সমগ্রতল $=$ পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল $+$ ভূমির ক্ষেত্রফল।

(c) লম্ব পিরামিডের **ঘনফল**

$=\frac{1}{3}\times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা।

উদাহরণমালা 2

উদা 1. The base of a right prism, 12 dm. high, is an equilateral triangle on a side of 3 dm. ; find the area of its rectangular faces.

[12 ডেসিমিটার উচ্চ একটি লম্ব-প্রিজ্‌মের ভূমি 3 ডেসি মি. বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ। উহার পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল কত ?]

আয়ত পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল $=$ ভূমির পরিসীমা $\times$ উচ্চতা

এখানে ভূমির পরিসীমা $=$ সমবাহু ত্রিভুজটির পরিসীমা $=3$ ডেসি মি. $\times 3$

$=9$ ডেসি মি. এবং উচ্চতা $=12$ ডেসি মিটার।

$\therefore$ নির্ণেয় পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল $=9$ ডেসিমি. $\times 12$ ডেসিমি.

$=108$ বর্গ ডেসিমিটার।

উদা. 2. The base of a right prism is a triangle whose sides are 17, 25 and 28 cms. If its height is 20 cms., find its volume.

[কোন 20 সে. মি. উচ্চ লম্ব-প্রিজ্‌মের ভূমি একটি ত্রিভুজ। ত্রিভুজটির বাহুগুলি 17 সে. মি., 25 সে. মি. ও 28 সে. মিটার হইলে প্রিজ্‌মটির ঘনফল কত ?]

এখানে ভূমি-ত্রিভুজটির অর্ধ-পরিসীমা $(s)=\frac{1}{2}(28+25+17)$ সে. মি.
$=35$ সেন্টিমিটার ;

$\therefore$ উহার ক্ষেত্রফল $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ সে. মি.
$=\sqrt{35(35-28)(35-25)(35-17)}$ বর্গ সে. মি.
$=\sqrt{35\times7\times10\times18}$ বর্গ সে. মি.
$=\sqrt{5^2\times6^2\times7^2}$ বর্গসে.মি. $=210$ বর্গ সে. মিটার।

$\therefore$ লম্ব প্রিজ্‌মটির ঘনফল = প্রান্ততল বা ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা
$=210$ বর্গ সে. মি. $\times$ 20 সে. মি. $=4200$ ঘন সে.মি.।

উদা. 3. Find the volume and lateral surface of a right prism 8 inches high standing on an isosceles triangle, each of whose equal sides is 5 inches and the other side 6 inches.
[C. U. 1945]

[একটি 8 ইঞ্চি উচ্চ লম্ব-প্রিজ্‌মের ভূমি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। ঐ ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকটি 5 ইঞ্চি ও অন্য বাহুটি 6 ইঞ্চি দীর্ঘ হইলে প্রিজ্‌মটির ঘনফল ও পার্শ্বতলের পরিমাণ নির্ণয় কর।]

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্ব টানিলে উহা ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। মনে কর, ঐ লম্বটি h.

$\therefore\ h^2=(5)^2-(3)^2=16,\quad \therefore\ h=4$;

সুতরাং ত্রিভুজটির উচ্চতা = 4 ইঞ্চি।

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা
$=\frac{1}{2}\times6$ ই. $\times4$ ই. $=12$ বর্গ ইঞ্চি।

$\therefore$ লম্ব-প্রিজ্‌মটির ঘনফল $=12$ বর্গ ই. $\times8$ ই. $=96$ ঘনইঞ্চি,

এবং উহার পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল = ভূমির পরিসীমা $\times$ উচ্চতা
$=(5+5+6)$ ই. $\times8$ ই. $=128$ বর্গ ইঞ্চি।

[দ্রষ্টব্য : এখানে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ এই সূত্রের সাহায্যেও নির্ণয় করা যায়।]

উদা. 4. The base of a right prism, 10 inches high, is an equilateral triangle on a side of 8 inches ; find the volume of the prism.

[কোন 10 ইঞ্চি উচ্চ লম্ব-প্রিজ্‌মের ভূমি 8 ইঞ্চি বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ। প্রিজ্‌ম্‌টির ঘনফল নির্ণয় কর।]

সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ [a ত্রিভুজের বাহু ধরিয়া]

$\therefore$ এখানে প্রিজ্‌ম্‌টির ভূমির ক্ষেত্রফল $=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 8^2$ ব. ই. $=16\sqrt{3}$ ব. ই.

$\therefore$ উহার নির্ণেয় ঘনফল = ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

$=16\sqrt{3}$ বর্গ ই. $\times 10$ ই. $=160\sqrt{3}$ ঘন ইঞ্চি।

উদা. 5. The volume of a right prism, is 330 c. c. and its base is a triangle whose sides are 5, 12 and 13 cm. respectively. Find the height and the total surface of the prism.

[ত্রিভুজ ভূমিবিশিষ্ট কোন লম্ব প্রিজ্‌মের ঘনফল 330 ঘন সেন্টিমিটার এবং ঐ ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য 5, 12 ও 13 সেন্টিমিটার। প্রিজ্‌ম্‌টির উচ্চতা ও সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত ?]

এখানে দেখা যায় যে $5^2+12^2=169=13^2$.

$\therefore$ ত্রিভুজটি সমকোণী এবং সমকোণ-সংলগ্ন বাহুদ্বয় 5 সে.মি. ও 12 সে.মি.।

$\therefore$ প্রিজ্‌মের ভূমির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times 12\times 5$ ব.সে. মি. $=30$ বর্গ সে.মি.।

এক্ষণে, নির্ণেয় উচ্চতা $=\frac{\text{ঘনফল}}{\text{ভূমির কালি}}=\frac{330 \text{ ঘ. সে. মি.}}{30 \text{ ব. সে. মি.}}=11$ সে.মি.।

আবার, ভূমির পরিসীমা $=(5+12+13)$ সে. মি. $=30$ সে. মি.,

$\therefore$ পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল $=30$ সে. মি. $\times 11$ সে. মি. $=330$ ব. সে.মি.

$\therefore$ প্রিজ্‌ম্‌টির সমগ্রতল-পরিমাণ = পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল + প্রান্ততল দুইটির ক্ষেত্রফল $=(330$ ব. সে. মি. $+30$ ব. সে. মি. $\times 2)=390$ বর্গ সে. মি.।

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে ত্রিভুজটির কালি $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ এই সূত্র হইতেও ত্রিভুজটির কালি নির্ণয় করা যাইত। আরও দেখ, এখানে সমগ্রতল বলিতে পার্শ্বতলগুলির এবং দুইটি প্রান্ততলের সমষ্টি বুঝাইতেছে এবং প্রান্ততল দুইটি মিলিয়া ভূমির দ্বিগুণ।]

উদা. 6. The area of the lateral surface of a right prism is 882 sq. cm. and its height 14 cm. ; if the base is a regular polygon of seven sides, find the length of each side.

[একটি লম্ব-প্রিজ্‌মের ভূমি একটি সুষম সপ্তভুজ এবং উহার পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল 882 বর্গ সে. মিটার ও উচ্চতা 14 সে. মিটার। ভূমির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?]

মনে কর, ভূমির বাহুর দৈর্ঘ্য a সে মিটার।

∴ প্রিজ্‌মটির পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল = ভূমির পরিসীমা × উচ্চতা

$= 7a \times 14$ বর্গ সে. মি. $= 98a$ বর্গ সে. মি.।

∴ $98a = 882$ (স্বীকার), ∴ $a = \frac{882}{98} = 9$,

∴ ভূমির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য = 9 সেন্টিমিটার।

উদা. 7. The base of a right prism, $5\sqrt{3}$ ft. high, is a regular hexagon whose side is 6 ft. Find its volume.

[কোন লম্ব-প্রিজ্‌মের উচ্চতা $5\sqrt{3}$ ফুট ও ভূমি 6 ফুট বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম-ষড়্‌ভুজ। প্রিজ্‌মটির ঘনফল নির্ণয় কর।]

এখানে ভূমিটি সুষম ষড়্‌ভুজ, সুতরাং উহার ক্ষেত্রফল 6 ফুট বাহুবিশিষ্ট ছয়টি সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান।

∴ এখানে প্রিজ্‌মের ভূমির ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 \times 6$ বর্গ ফুট

$= 54\sqrt{3}$ বর্গ ফুট

∴ উহার ঘনফল = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$= 54\sqrt{3}$ বর্গ ফু. $\times 5\sqrt{3}$ ফু. $= 810$ ঘনফুট।

উদা. 8. The base of a right prism is a trapezium whose parallel sides are 7 cm. and 13 cm, the perpendicular distance between those sides being 8 cm. If the height of the prism is 10 cm., find its volume.

[10 সেন্টিমিটার উচ্চ কোন লম্ব-প্রিজ্‌মের ভূমি একটি ট্রাপিজিয়ম যাহার সমান্তরাল বাহুদ্বয় 7 সে. মি. ও 13 সে. মি. দীর্ঘ এবং ঐ বাহুদ্বয়ের মধ্যে লম্বদূরত্ব 8 সে. মিটার। প্রিজ্‌মটির ঘনফল কত ?]

ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি × লম্ব দূরত্ব

$= \frac{1}{2}(7+13) \times 8$ বর্গ সে. মি. $= 80$ বর্গ সে. মিটার।

∴ প্রিজ্‌মটির ঘনফল = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$= 80$ বর্গ সে. মি. $\times 10$ সে. মি. $= 800$ ঘন সে. মি.।

[Pyramid]

উদা. 9. The base of a right pyramid, 6 inches high, is an equilateral triangle of side 4 inches. Find its volume and the area of the side faces.

[একটি 6 ইঞ্চি উচ্চ লম্ব পিরামিডের ভূমি 4 ইঞ্চি বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ। ঐ পিরামিডের ঘনফল ও সমগ্র পার্শ্বতল পরিমাণ নির্ণয় কর।]

মনে করা যাক, পিরামিডের P শীর্ষ এবং ABC সমবাহু ত্রিভুজটি ভূমি। $AD \perp BC$ হইলে AD ত্রিভুজের মধ্যমা। মনে কর O, ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র।

∴ PO, ABC সমতলের উপর লম্ব।

∴ PO, AD মধ্যমার উপর লম্ব।

মনে করা যাক, $PD = l$ এবং $PO = h$,

∴ $h = 6$ ইঞ্চি।

এখন $AD^2 = AB^2 - BD^2$

$= 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12,$

∴ $AD = \sqrt{12}$ ই. $= 2\sqrt{3}$ ইঞ্চি।

P
B A
l h
D O
C

চিত্র নং 11

∴ $OD = \frac{1}{3}AD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ই. $= \frac{2}{\sqrt{3}}$ ইঞ্চি।

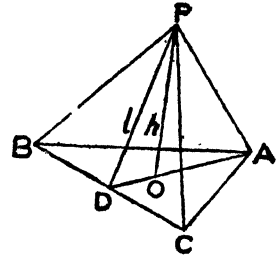
∴ $l^2 = h^2 + OD^2 = (36 + \frac{4}{3})$ বর্গ ই. $= \frac{112}{3}$ বর্গ ই.

∴ $l = \sqrt{\frac{112}{3}}$ ই. $= \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ ইঞ্চি।

পিরামিডের ঘনফল $= \frac{1}{3} \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} \times 6$ ঘন ই. $= 8\sqrt{3}$ ঘন ইঞ্চি।

তলসমূহের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ পরিসীমা $\times$ তির্যক উচ্চতা

$= \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ বর্গ ই. $= 8\sqrt{21}$ বর্গ ইঞ্চি।

উদা. 10. A right pyramid stands on a base 16 cm. square and its height is 15 cm, find its slant surface and the volume. [H. S. '64 (Compl.)]

[16 সেন্টিমিটার বর্গ ভূমিবিশিষ্ট একটি লম্ব পিরামিডের উচ্চতা 15 সে. মিটার। উহার তির্যক তলগুলির ক্ষেত্রফল ও ঘনফল নির্ণয় কর।]

এখানে ভূমি একটি বর্গক্ষেত্র ABCD এবং উহার প্রত্যেক বাহু 16 সে. মি.। মনে কর AC, BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে এবং $OP \perp AB$;

সুতরাং OP, ABকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে, এবং OP=AP=8 সে. মি.।
পিরামিডের উচ্চতা=15 সে. মি. ;

∴ পিরামিডের তির্যক উচ্চতা $l=\sqrt{8^2+15^2}$ সে. মি.=17 সে. মি.,

∴ উহার তির্যক তলগুলির ক্ষেত্রফল=$\frac{1}{2}\times$পরিসীমা$\times$তির্যক উচ্চতা
$=\frac{1}{2}\times(16$ সে. মি.$\times 4)\times 17$ সে. মি.=544 বর্গ সেন্টিমিটার।

আবার, উহার ঘনফল=$\frac{1}{3}\times$ভূমির ক্ষেত্রফল$\times$উচ্চতা
$=\frac{1}{3}\times(16\times16)$ বর্গ সে. মি.$\times 15$ সে. মি.
=1280 ঘন সেন্টিমিটার।

উদা. 11. Determine the volume of a pyramid whose height is $10\sqrt{7}$ ft. and which stands on a triangle of sides 16 ft., 11 ft. and 9 ft. [C. U. '41]

[একটি ত্রিভুজের বাহুত্রয় 16 ফুট, 11 ফুট ও 9 ফুট। উহার উপর দণ্ডায়মান $10\sqrt{7}$ ফুট উচ্চ পিরামিডের ঘনফল কত ?]

ত্রিভুজটির অর্ধ-পরিসীমা $s=\frac{1}{2}(16+11+9)$ ফু.=18 ফুট।

∴ উহার ক্ষেত্রফল= $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ ফু.
$=\sqrt{18(18-16)(18-11)(18-9)}$ বর্গ ফু.
$=\sqrt{18\times2\times7\times9}$ বর্গ ফু.$=18\sqrt{7}$ বর্গফুট।

∴ নির্ণেয় ঘনফল=$\frac{1}{3}\times$ভূমির ক্ষেত্রফল$\times$উচ্চতা
$=\frac{1}{3}\times18\sqrt{7}$ বর্গ ফুট$\times10\sqrt{7}$ ফুট
$=60\times7$ ঘন ফুট=420 ঘনফুট।

উদা. 12. A right pyramid stands on a square base of side 12 ft. Find the height of the pyramid, if its volume is 576 cu. ft. [C. U. '43]

[12 ফুট বাহুবিশিষ্ট বর্গাকার ভূমির উপর দণ্ডায়মান একটি লম্ব পিরামিডের ঘনফল 576 ঘনফুট হইলে উহার উচ্চতা কত ?]

এখানে পিরামিডের ভূমির ক্ষেত্রফল$=12\times12$ বর্গ ফু.=144 বর্গ ফু.,
এবং উহার ঘনফল=576 ঘনফুট।

∴ নির্ণেয় উচ্চতা=$\dfrac{\text{ঘনফল}}{\frac{1}{3}\times\text{ভূমির ক্ষেত্রফল}}=\dfrac{576 \text{ ঘ. ফু.}}{\frac{1}{3}\times144 \text{ ব. ফু.}}$=12 ফুট।

উদা. 13. A pyramid on a square base has four equilateral triangles for its four other faces, each edge being 20 ft. ; find the volume. [S. A.]

[একটি পিরামিডের ভূমি একটি বর্গক্ষেত্র এবং উহার অপর চারিটি তল চারিটি সমবাহু ত্রিভুজ। ত্রিভুজগুলির প্রত্যেক বাহু 20 ফুট হইলে পিরামিডের ঘনফল নির্ণয় কর।]

এখানে ভূমির ক্ষেত্রফল $= 20$ ফু. $\times 20$ ফু. $= 400$ বর্গফুট।

এখানে, পিরামিডের উচ্চতা নির্ণয় করিতে হইবে। মনে কর, পিরামিডের ভূমি ABCD বর্গক্ষেত্র এবং শীর্ষ P বিন্দু। যদি AC ও BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে, তবে PO পিরামিডের উচ্চতা হইবে।

মনে কর, $OE \perp AB$ সুতরাং $OE = AE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 20$ ফু. $= 10$ ফুট।
এখন, OEP একটি সমকোণী ত্রিভুজ, উহার PE বাহু = প্রদত্ত সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 20$ ফুট $= 10\sqrt{3}$ ফুট।

$\therefore \quad PO^2 = PE^2 - OE^2 = (10\sqrt{3})^2 - 10^2 = 200,$

$\therefore \quad PO = \sqrt{200}$ ফুট $= 10\sqrt{2}$ ফুট।

$\therefore$ পিরামিডের ঘনফল $= \frac{1}{3} \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{3} \times 400$ বর্গ ফু. $\times 10\sqrt{2}$ ফু. $= \frac{4000\sqrt{2}}{3}$ ঘন ফু.

$= 1885 \cdot 6$ ঘনফুট (আসন্ন)।

উদা. 14. The faces of a tetrahedron are four equal equilateral triangles, find the area of the faces of the tetrahedron, if the length of a side of each triangle is 4 ft. Find also the volume of the tetrahedron. [C. U. '38]

[একটি চতুস্তলকের তল চারিটি সর্বসম সমবাহু ত্রিভুজ। ঐ ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহু 4 ফুট হইলে তলগুলির ক্ষেত্রফল এবং চতুস্তলকটির ঘনফল কত হইবে ?]

এখানে চতুস্তলকটির তির্যক উচ্চতা = 4 ফুট বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা $= \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4$ ফু. $= 2\sqrt{3}$ ফুট।

$\therefore$ উহার পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমির পরিসীমা $\times$ তির্যক উচ্চতা

$= \frac{1}{2} \times 12$ ফু. $\times 2\sqrt{3}$ ফু. $= 12\sqrt{3}$ বর্গ ফুট

এবং উহার ভূমির ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ [a ত্রিভুজের বাহু]

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 16$ বর্গ ফুট $= 4\sqrt{3}$ বর্গফুট।

$\therefore$ নির্ণেয় সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= (12\sqrt{3} + 4\sqrt{3})$ ব.ফু. $= 16\sqrt{3}$ বর্গ ফুট।

মনে কর, ABCD চতুস্তলকের শীর্ষ D এবং DE⊥BC, ∴ BC-র মধ্যবিন্দু E এবং △ABCর মধ্যমা AE. মনে কর, G বিন্দু △ABCর ভরকেন্দ্র,

∴ DG = চতুস্তলকের উচ্চতা h. ∴ EG = $\frac{1}{3}$AE.

এখন, DE = AE = $2\sqrt{3}$, এবং EG = $\frac{1}{3}.2\sqrt{3}$

$$\therefore\quad h=\sqrt{DE^2-EG^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\tfrac{2}{3}\sqrt{3})^2}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}\sqrt{6}.$$

∴ নির্ণেয় ঘনফল = $\frac{1}{3}$ × ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

= $\frac{1}{3}\times4\sqrt{3}\times\frac{4}{3}\sqrt{6}$ ঘন ফু. = $\frac{16}{3}\sqrt{2}$ ঘনফুট।

উদা. 15. Find the cost of painting the vertical sides of a wooden column, 10 ft. high and standing on a regular nonagon whose side is 6 inches, at 2s. per sq. ft.

[10 ফুট উচ্চ একটি উল্লম্ব স্তম্ভের ভূমি 6 ইঞ্চি বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম নবভুজ। প্রতি বর্গফুট 2 শিলিং হিসাবে উহার লম্বপার্শ্বগুলি চিত্রিত করিতে কত ব্যয় হইবে ?]

স্তম্ভটির ভূমি 6 ই. বা $\frac{1}{2}$ ফুট বাহুবিশিষ্ট সুষম নবভুজ।

∴ উহার ভূমির পরিসীমা = $\frac{1}{2}$ ফু. × 9 = $\frac{9}{2}$ ফুট।

∴ উহার লম্বতলগুলির ক্ষেত্রফল = $\frac{9}{2}$ ফু. × 10 ফু. = 45 বর্গফুট।

∴ নির্ণেয় খরচ = 2 শি. × 45 = 90 শি. = 4 পা. 10 শিলিং।

Exercise 2

1. The base of a right prism, 9 in. high, is an equilateral triangle whose side is 1 ft. 4. Find the area of its lateral surface.

[9 ইঞ্চি উচ্চ একটি লম্ব-প্রিজ্‌মের ভূমি 1 ফুট 4 ইঞ্চি বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ। ইহার পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল কত ?]

2. The base of a right prism is a triangle whose each side measures 6 cm. If the height of the prism is $16\sqrt{3}$ cm., find its volume.

[একটি লম্ব-প্রিজ্‌মের ভূমি 6 সেন্টিমিটার বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ এবং উচ্চতা $16\sqrt{3}$ সেন্টিমিটার। প্রিজ্‌মটির ঘনফল নির্ণয় কর।]

3. The base of a right prism is an equilateral triangle whose each side is a. If the height of the prism is h, shew that its volume is $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h$.

[কোন লম্ব-প্রিজ্‌মের ভূমি a বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ এবং উচ্চতা h হইলে, প্রমাণ কর যে উহার ঘনফল $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h.$]

4. The volume of a right prism is 80 cu. ft. and its base is a triangle whose sides are 3 ft., 4 ft. and 5 ft. Find the height and the total surface of the prism. [H. S. '64]

[একটি লম্ব-প্রিজ্‌মের ঘনফল 80 ঘনফুট এবং উহার ভূমি 3 ফুট, 4 ফুট ও 5 ফুট দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ। প্রিজ্‌মটির উচ্চতা ও সমগ্রতল পরিমাণ নির্ণয় কর।]

5. The area of the lateral surface of a right prism is 1080 sq. ft. and its height is 12 ft.; if the base is a regular nonagon, find the length of each side of the base.

[সুষম নবভুজ ভূমিবিশিষ্ট একটি লম্ব-প্রিজ্‌মের পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল 1080 বর্গফুট। উহার উচ্চতা 12 ফুট হইলে, ভূমির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?]

6. Find the volume of a pyramid when its base is a regular hexagon, each side measuring 6 ft. and height 30 ft. [B. U.]

[একটি পিরামিডের ভূমি 6 ফুট বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম ষড়্‌ভুজ এবং উচ্চতা 30 ফুট। উহার ঘনফল কত ?]

7. The base of a right prism is a trapezium whose parallel sides are 10 ft. and 12 ft. and the perpendicular distance between them is 10 ft. If the height of the prism is 8 ft., find its volume.

[কোন লম্ব-প্রিজ্‌মের ভূমি একটি ট্রাপিজিয়ম। ঐ ভূমির সমান্তরাল বাহুদ্বয় 10 ফুট ও 12 ফুট এবং ঐ বাহুদ্বয়ের লম্ব দূরত্ব 10 ফুট। প্রিজ্‌মটির উচ্চতা 8 ফুট হইলে উহার ঘনফল কত ?]

8. Find the total surface of a right prism, 18 ft. high and standing on a regular hexagon whose each side is 3 ft. long.

[কোন লম্ব-প্রিজমের ভূমি 3 ফুট বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম ষড়্‌ভুজ এবং উচ্চতা 18 ফুট। উহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত ?]

9. A pyramid on a square base has four equilateral triangles for its four other faces, each edge being 30 feet; find the volume. [R. E.]

[বর্গাকার ভূমিবিশিষ্ট একটি পিরামিডের অপর চারিটি তল 30 ফুট বাহুবিশিষ্ট চারিটি সমবাহু ত্রিভুজ। উহার ঘনফল নির্ণয় কর।]

10. Find the area of the surface of a right prism, whose ends are squares of sides 3 inches, the height of the prism being one foot.

[একটি লম্ব-প্রিজ্‌মের প্রান্ততলগুলি (ends) 3 ইঞ্চি বর্গ এবং উহার উচ্চতা এক ফুট। উহার তলপরিমাণ নির্ণয় কর।]

11. The base of a pyramid, 12 metres high, is a rectangle 15 m. by 10 m. Find the volume.

[একটি 12 মিটার উচ্চ পিরামিডের ভূমিটি 15 মি. দৈর্ঘ্য ও 10 মি. প্রস্থবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র। উহার ঘনফল কত ?]

12. The base of a pyramid, 10 ft. high, is a regular hexagon of side 6 ft. Find the volume.

[একটি 10 ফুট উচ্চ পিরামিডের ভূমি 6 ফুট বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম ষড়্‌ভুজ। উহার ঘনফল কত ?]

13. In a regular tetrahedron of side a, show that the height is equal to $\frac{1}{3}\sqrt{6}a$ and the volume is equal to $\frac{1}{6\sqrt{2}}a^3$.

[একটি সুষম চতুস্তলকের বাহু a হইলে প্রমাণ কর যে উহার উচ্চতা $\frac{1}{3}\sqrt{6}a$ এবং ঘনফল $\frac{1}{6\sqrt{2}}a^3$ হইবে।]

14. The base of a pyramid, 12 cm. high, is a triangle whose sides are 8 cm., 15 cm. and 17 cm. Find the volume of the pyramid. [C. U. '46, '48]

[কোন পিরামিডের উচ্চতা 12 সে. মিটার এবং উহার ভূমি একটি ত্রিভুজ। ঐ ত্রিভুজের বাহুগুলি 8 সে. মি., 15 সে. মি. ও 17 সে. মি. হইলে পিরামিডের ঘনফল নির্ণয় কর।]

15. A right pyramid stands on a base 8 ft. square and its height is 3 ft. ; find its slant surface and volume.

[8 ফুট বর্গ ভূমিবিশিষ্ট একটি লম্ব পিড়ামিডের উচ্চতা 3 ফুট। উহার তির্যক তলগুলির ক্ষেত্রফল ও ঘনফল কত ?]

16. The base of a right prism, 10 cm. high, is a triangle whose sides are 17 cm., 10 cm. and 9 cm. Find the volume and the whole surface of the prism. [C. U. '40]

[10 সেন্টিমিটার উচ্চ একটি লম্ব-প্রিজ্‌মের ভূমি 17 সে. মি., 10 সে. মি. ও 9 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ। উহার ঘনফল ও সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।]

17. The base of a right column, 12 ft. high, is a regular pentagon whose side is 4 inches. Find the cost of white-washing the vertical sides of the column at 4 annas per sq.ft.

[কোন 12 ফুট উচ্চ উল্লম্ব স্তম্ভের ভূমি ঐকটি সুষম পঞ্চভুজ এবং ভূমির প্রত্যেক বাহু 4 ইঞ্চি। এক বর্গফুট চুনকাম করিতে 4 আনা খরচ হইলে ঐ স্তম্ভের লম্ব তলগুলি চুনকাম করিতে কত ব্যয় হইবে ?]

18. A right pyramid stands on a rectangular base whose sides are 12 cm. and 9 cm. and the length of the slant edge is 8·5 cm. ; find the height and volume of the pyramid.

[G. U. '48 ; H. S. '62]

[একটি লম্ব পিরামিডের ভূমি 12 সে. মি. ও 9 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র এবং উহার প্রত্যেক তির্যক ধারের দৈর্ঘ্য 8·5 সে. মিটার। পিরামিডটির উচ্চতা ও ঘনফল নির্ণয় কর।]

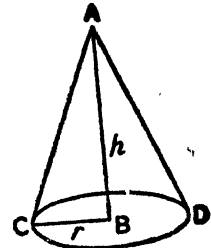
19. A right pyramid stands on a rectangular base whose sides are 24 cm. and 18 cm. and each of the slant edges is 17 cm. ; find the height and volume of the pyramid.

[cf. H. S. '68 ; N. U. '47]

[একটি লম্ব পিরামিডের ভূমি 24 সে. মি. ও 18 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র এবং উহার প্রত্যেক তির্যক ধারের দৈর্ঘ্য 17 সে. মিটার। উহার উচ্চতা ও ঘনফল নির্ণয় কর।]

Cone (শঙ্কু)

4. সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের একটি বাহুকে অক্ষ ধরিয়া ত্রিভুজটিকে ঘুরাইলে যে ঘন উৎপন্ন হয় তাহাকে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু (right circular cone) বলে।

ABC সমকোণী ত্রিভুজের ∠B সমকোণ। ABকে অক্ষ ধরিয়া ত্রিভুজটিকে ঘোরান হইলে C বিন্দু একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিবে। এই বৃত্তকে শঙ্কুর ভূমি (base) বলে। বৃত্তের ব্যাসার্ধ BC, A বিন্দু শঙ্কুর শীর্ষ এবং ∠CAD ইহার শিরঃকোণ। AB, শঙ্কুর ভূমির উপর লম্ব। ABকে শঙ্কুর উচ্চতা এবং AC বা ADকে ইহার তির্যক উচ্চতা (slant height) বলে।

চিত্র 12

মোচার অগ্রভাগ, লিখিবার জন্য কাটা পেন্সিলের অগ্রভাগ শঙ্কুর দৃষ্টান্ত।

কোন লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা h এবং উহার ভূমির ব্যাসার্ধ r এবং তির্যক উচ্চতা l হইলে নিম্নের সূত্রগুলি পাই :—

(i) **শঙ্কুর বক্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল**
$=\frac{1}{2}\times$ ভূমির পরিধি $\times$ তির্যক উচ্চতা $=\frac{1}{2}\times 2\pi r\times l$
$=\pi rl$ বর্গ একক……(2)
$=\pi r\sqrt{h^2+r^2}$ বর্গ একক……(2)

[$\because$ $\angle ABC=1$ সমকোণ, $\therefore AC^2=AB^2+BC^2$, $\therefore l^2=h^2+r^2$]

(ii) **শঙ্কুর সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল**
= বক্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল + ভূমির ক্ষেত্রফল
$=\pi rl+\pi r^2=\pi r(l+r)$ বর্গ একক।

(iii) **শঙ্কুর ঘনফল** $=\frac{1}{3}\times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা
$=\frac{1}{3}\pi r^2h$ ঘন একক।

উদাহরণমালা 3

[অন্যরূপ উল্লেখ না থাকিলে $\pi=\frac{22}{7}$ ধরিবে]

উদা. 1. Find (*a*) the slant height, (*b*) the curved surface, (*c*) the whole surface and (*d*) the volume of the cone whose height is 15 inches and the diameter of whose base is 16 inches.

[একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 15 ইঞ্চি এবং ভূমির ব্যাস 16 ইঞ্চি। উহার (*a*) তির্যক উচ্চতা, (*b*) বক্রতল, (*c*) সমগ্রতল এবং (*d*) ঘনফল নির্ণয় কর।]

এখানে উচ্চতা = 15 ইঞ্চি, ব্যাসার্ধ = 8 ইঞ্চি।

(*a*) $\therefore$ শঙ্কুটির তির্যক উচ্চতা $(l)=\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{15^2+8^2}$ ই.
$=17$ ইঞ্চি।

(*b*) শঙ্কুটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল $=\pi rl$ বর্গ একক $=\frac{22}{7}\times 8\times 17$ বর্গ ই.
$=427\frac{3}{7}$ বর্গ ইঞ্চি।

(*c*) শঙ্কুটির সমগ্রতল $=\pi r(l+r)$ বর্গ একক $=\frac{22}{7}\times 8(17+8)$ বর্গ ই.
$=628\frac{4}{7}$ বর্গ ইঞ্চি।

(*d*) শঙ্কুটির ঘনফল $=\frac{1}{3}\pi r^2h$ ঘন একক $=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 8^2\times 15$ ঘন ই.
$=1005\frac{5}{7}$ ঘন ইঞ্চি।

উদা. 2. Find the vertical height and the slant height of a right circular cone whose curved surface is 704 sq. inches and the diameter of whose base is 2 ft. 4 in.

[একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রতলের পরিমাণ 704 বর্গ ইঞ্চি এবং উহার ভূমির ব্যাস 2 ফুট 4 ইঞ্চি। উহার লম্ব-উচ্চতা ও তির্যক-উচ্চতা নির্ণয় কর।]

এখানে ভূমির ব্যাসার্ধ $=2$ ফু. 4 ই. $\times \frac{1}{2} = 14$ ইঞ্চি।

$\therefore$ শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল $=\pi r l$,

$\therefore$ নির্ণেয় তির্যক উচ্চতা $l=\frac{\text{বক্রতল}}{\pi r}=\frac{704}{\frac{22}{7}\times 14}$ ই. $=16$ ইঞ্চি।

আবার, $\because l^2=h^2+r^2, \quad \therefore h^2=l^2-r^2, \quad h=\sqrt{l^2-r^2}.$

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা $=\sqrt{16^2-14^2}$ ই. $=\sqrt{60}$ ই. $=2\sqrt{15}$ ইঞ্চি।

উদা. 3. The slant height of a right circular cone is 1 ft. 9 in and its curved surface is 396 sq. inches ; find the diameter of the base.

[একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা 1 ফুট 9 ইঞ্চি এবং বক্রতল 396 বর্গ ইঞ্চি ; উহার ব্যাস নির্ণয় কর।]

এখানে তির্যক উচ্চতা $l=1$ ফু. 9 ই. $=21$ ইঞ্চি।

$\because$ বক্রতলের ক্ষেত্রফল $=\pi r l$,

$\therefore$ নির্ণেয় $r=\frac{\text{বক্রতল}}{\pi l}=\frac{396 \text{ বর্গ ই.}}{\frac{22}{7}\times 21 \text{ ই.}}=6$ ইঞ্চি।

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাস $=2r=12$ ই. $=1$ ফুট।

উদা 4. The volume of a cone is 154 cu. ft. and its height is 12 ft. Find the radius of the base.

[কোন শঙ্কুর ঘনফল 154 ঘনফুট এবং উচ্চতা 12 ফুট। উহার ভূমির ব্যাসার্ধ কত ?]

$\because \frac{1}{3}\pi r^2 h=$ শঙ্কুর ঘনফল,

$\therefore$ এখানে $\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times r^2\times 12=154$ ঘন ফুট

$\therefore r^2=\frac{154\times 3\times 7}{22\times 12}$ বর্গ ফু. $=\frac{49}{4}$ বর্গ ফু. $=(\frac{7}{2})^2$ বর্গ ফু., $\therefore r=\frac{7}{2}$ ফুট।

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ $=3$ ফুট 6 ইঞ্চি।

উদা. 5. The height of a conical tent is $7\frac{1}{2}$ ft. and it is to enclose 200 sq. yds. of ground. Find how much canvas will be required. [R. M. A.]

[একটি শঙ্কু-আকারের তাঁবুর উচ্চতা $7\frac{1}{2}$ ফুট এবং উহা 200 বর্গ গজ ভূমি বেষ্টন করিয়াছে। তাঁবুটি প্রস্তুত করিতে কি পরিমাণ ক্যান্‌ভাস বস্ত্র লাগিয়াছে ?]

এখানে বৃত্তাকার ভূমির ক্ষেত্রফল $=200$ বর্গগজ,

অর্থাৎ $\pi r^2=200$ বর্গ গ., বা, $\frac{22}{7}r^2=1800$ বর্গ ফু.

$r^2 = \frac{1800 \times 7}{22}$ বর্গ ফু. $= \frac{6300}{11}$ বর্গ ফুট, $\therefore \quad r = 30\sqrt{\frac{7}{11}}$ ফুট।

$l^2 = r^2 + h^2$, $\therefore$ এখানে $l^2 = \frac{6300}{11} + (\frac{15}{2})^2 = \frac{27675}{44}$ বর্গ ফু.

$l = \sqrt{\frac{27675}{44}}$ ফু. $= \frac{15}{2}\sqrt{\frac{123}{11}}$ ফুট।

নির্ণেয় বস্ত্রের পরিমাণ = তাঁবুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল

$= \pi r l = \frac{22}{7} \times \frac{30\sqrt{7}}{\sqrt{11}} \times \frac{15 \times \sqrt{123}}{2 \times \sqrt{11}}$ বর্গ ফু.

$= \frac{30 \times 15\sqrt{7} \times \sqrt{123}}{7} \times \frac{1}{9}$ ব. গ. $= \frac{50\sqrt{861}}{7}$ ব. গ.

$= 209{\cdot}5$ বর্গ গজ (প্রায়)।

উদা. 6. A right-angled triangle, of which the sides are 3 ft. 6 in. and 5 ft. in length, is made to turn round on the longer side ; find the volume of the solid thus formed. [S.A.]

[একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 3 ফুট 6 ইঞ্চি ও 5 ফুট। দীর্ঘতর বাহুটিকে অক্ষ করিয়া ত্রিভুজটি ঘুরাইলে যে শঙ্কু উৎপন্ন হয় তাহার ঘনফল নির্ণয় কর।]

এখানে বুঝা গেল 5 ফুট দীর্ঘ বাহুটিকে অক্ষ করিয়া ঘুরান হইতেছে বলিয়া উৎপন্ন শঙ্কুটির উচ্চতা = 5 ফুট ;

সুতরাং অপর বাহুটি ভূমির ব্যাসার্ধ $= \frac{7}{2}$ ফুট।

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনফল $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (\frac{7}{2})^2 \times 5$ ঘন ফু.

$= \frac{385}{6}$ ঘন ফু. $= 64\frac{1}{6}$ ঘনফুট।

উদা. 7. The sides of a right-angled triangle are 3 in. and 4 in. respectively ; find the volume of the cone formed by the revolution of the triangle round the hypotenuse. [S. A.]

[একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুদ্বয় 3 ইঞ্চি ও 4 ইঞ্চি। উহার অতিভুজকে অক্ষ করিয়া ত্রিভুজটি ঘুরাইলে যে শঙ্কু উৎপন্ন হয় তাহার ঘনফল কত হইবে ?

মনে কর, ABC ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ এবং $AB = 4$ ই. ও $BC = 3$ ই.।

$\therefore \quad AC = \sqrt{4^2 + 3^2}$ ই. $= 5$ ইঞ্চি। $BD \perp AC$ টান।

$\because$ সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ হইতে ভূমির উপর BD লম্ব,

$\therefore \quad \frac{BD}{AB} = \frac{BC}{AC}$, বা, $\frac{BD}{4} = \frac{3}{5}$, $\therefore \quad BD = \frac{12}{5}$ ইঞ্চি।

এক্ষণে AC বাহুকে অক্ষ করিয়া ত্রিভুজটিকে ঘুরাইলে দুইটি শঙ্কু উৎপন্ন হয়। একটির ব্যাসার্ধ BD ও উচ্চতা AD এবং অন্যটির ব্যাসার্ধ BD ও উচ্চতা CD.

∴ ঐ দুই শঙ্কুর মোট ঘনফল $=\frac{1}{3}\pi\times BD^2\times AD+\frac{1}{3}\pi\times BD^2\times CD$
$=\frac{1}{3}\pi\times BD^2(AD+CD)=\frac{1}{3}\pi.BD^2.AC=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times(\frac{12}{5})^2\times 5$ ঘন ই.
$=\frac{1056}{35}$ ঘন ই. $=30\frac{6}{35}$ ঘন ইঞ্চি।

উদা. 8. A right-angled triangle, whose remaining angles are 60° and 30°, revolves about its hypotenuse, which is 12 in. long; find the volume of the solid thus formed.

[কোন সমকোণী ত্রিভুজের অপর কোণদ্বয় 60° ও 30° এবং অতিভুজের দৈর্ঘ্য 12 ইঞ্চি। অতিভুজকে অক্ষ করিয়া ত্রিভুজটিকে ঘুরাইলে উৎপন্ন ঘনের ঘনফল কত হইবে?]

∵ এখানে সমকোণী ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্মকোণ অপর সূক্ষ্মকোণটির দ্বিগুণ,
∴ ক্ষুদ্রতম বাহুটি (30° কোণের বিপরীত বাহুটি) অতিভুজের অর্ধেক।
[উদা. 7এর মত চিত্র আঁক] এখানে BC=6 ইঞ্চি, AC=12 ইঞ্চি,
∴ $AB^2=AC^2-BC^2=(12^2-6^2)$ব.ই. $=108$ ব.ই., ∴ $AB=6\sqrt{3}$ ইঞ্চি।

∵ $\frac{BD}{AB}=\frac{BC}{AC}$, ∴ এখানে $\frac{BD}{6\sqrt{3}}=\frac{6}{12}$, ∴ $BD=3\sqrt{3}$ ইঞ্চি।

∴ নির্ণেয় ঘনফল $=\frac{1}{3}\pi\times BD^2(AD+DC)=\frac{1}{3}\pi\times BD^2\times AC$
$=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times(3\sqrt{3})^2\times 12$ ঘন ই.
$=\frac{2376}{7}$ ঘন ই. $=339\frac{3}{7}$ ঘন ইঞ্চি।

উদা. 9. A conical tent is required to accommodate 5 people; each person must have 16 sq. ft. of space on the ground and 100 cu. ft. of air to breathe; give the vertical height, slant height, and the width of the tent. [R. U. S.]

[পাঁচজন ব্যক্তির জন্য একটি শঙ্কু-আকারের তাঁবুর প্রয়োজন। যদি প্রত্যেক ব্যক্তির জন্য 16 বর্গফুট ভূমি ও 100 ঘনফুট বায়ুর প্রয়োজন হয়, তবে ঐ তাঁবুর লম্ব-উচ্চতা, তির্যক-উচ্চতা এবং ভূমির বিস্তার কত হইবে?]

এখানে তাঁবুর ভূমির বিস্তার বা ব্যাস $2r$, উহার উচ্চতা h এবং তির্যক উচ্চতা l নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে 5 জনের জন্য মোট স্থান লাগে 16×5 বা 80 বর্গ ফুট।
∴ ভূমির ক্ষেত্রফল $\pi r^2=80$ বর্গ ফু., বা $\frac{22}{7}r^2=80$ বর্গ ফু.
বা, $r^2=\frac{80\times 7}{22}$ বর্গ ফু. $=\frac{280}{11}$ বর্গ ফু., ∴ $r=\sqrt{\frac{280}{11}}$ ফু. $=5{\cdot}045\cdots$ ফুট।
∴ নির্ণেয় তাঁবুর বিস্তার $=2r=2\times 5{\cdot}045\cdots$ ফু. $=10{\cdot}09$ ফুট (প্রায়)।

আবার, প্রদত্ত তাঁবুর ঘনফল $=100$ ঘন ফু. $\times 5=500$ ঘন ফু.

অর্থাৎ $\frac{1}{3}\pi r^2 h=500$ ঘন ফু., বা $\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times\frac{280}{11}$ বর্গ ফু. $\times h=500$ ঘন ফু.

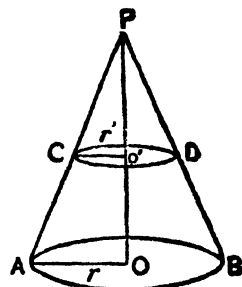
$\therefore \quad h=\frac{500\times 3\times 7\times 11}{22\times 280}$ ফু. $=\frac{75}{4}$ ফু. $=18\frac{3}{4}$ ফুট।

এক্ষণে, $\because \quad l^2=r^2+h^2=\frac{280}{11}+(\frac{75}{4})^2=\frac{66355}{176}$ বর্গ ফু.

$\therefore \quad l=\sqrt{\frac{66355}{176}}$ ফু. $=19{\cdot}4$ ফুট (প্রায়)।

উদা. 10. Divide a right circular cone into two parts by a plane drawn parallel to the base so that the curved surfaces of the two parts are equal. [C. U. '47]

[একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির সমান্তরাল সমতল ক্ষেত্র আঁকিয়া শঙ্কুটিকে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন ঐ অংশদ্বয়ের বক্রতল দুইটির ক্ষেত্রফল সমান হয়।]

মনে করা যাক, APB একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু, AB বৃত্ত ইহার ভূমি, O ভূমির কেন্দ্র এবং r ব্যাসার্ধ। মনে করা যাক, AP রেখার C বিন্দু দিয়া ভূমির সমান্তরাল করিয়া একটি সমতল আঁকিলে CPD শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল বাকী অংশ ACDBর বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সমান হইবে, অর্থাৎ CPD শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল APB শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে। আবার, C বিন্দু দিয়া ভূমির সমান্তরাল করিয়া সমতল আঁকিলে উহা শঙ্কুকে একটি বৃত্তে ছেদ করিবে। মনে করা যাক, O' এবং r' যথাক্রমে এই বৃত্তের কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ।

চিত্র নং 13

এখন, PCO' এবং PAO ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ [$\because$ CO' ∥ AO],

$$\therefore \quad \frac{CO'}{AO}=\frac{PC}{PA}, \text{ অর্থাৎ } \frac{r'}{r}=\frac{PC}{PA},$$

$$\therefore \quad \frac{\text{CPD শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল}}{\text{APB শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল}}=\frac{\pi r'.PC}{\pi r.PA}=\frac{r'}{r}.\frac{PC}{PA}$$

$$=\frac{PC}{PA}.\frac{PC}{PA}=\frac{PC^2}{PA^2}=\frac{1}{2}, \quad \therefore \quad PC^2=\frac{1}{2}PA^2=PA.\frac{1}{2}PA.$$

$\therefore$ PC রেখা PA এবং $\frac{1}{2}$PAর মধ্যসমানুপাতী হইল।

উদা. 11. A right circular cone 20 ft. high has its upper part cut off by a plane passing through the middle point of

its axis. If the plane of section be at right angles to the axis and if the radius of the original cone be 4 ft., find the volume of the truncated cone. [C. U. 1936]

[একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 20 ফুট এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 4 ফুট। উহার অক্ষের মধ্যবিন্দু দিয়া অক্ষের সহিত লম্বভাবে একটি সমতলের দ্বারা শঙ্কুটিকে ছেদ করিলে ছিন্ন শঙ্কুভাগের ঘনফল কত হইবে ?]

প্রদত্ত শঙ্কুর ঘনফল $=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\times 4^2\times 20$ ঘন ফু. $=\frac{320}{3}\pi$ ঘনফুট।

উহার অক্ষের মধ্যবিন্দু দিয়া অক্ষের সহিত লম্বভাবে একটি সমতলের দ্বারা শঙ্কুটিকে বিভক্ত করায় উপর দিকের ছিন্ন শঙ্কুর উচ্চতা হইল $\frac{1}{2}\times 20$ ফু. বা 10 ফুট এবং ভূমির ব্যাসার্ধ হইলে $\frac{1}{2}\times 4$ ফুট বা 2 ফুট।

$\therefore$ উপরের ছিন্ন শঙ্কুর ঘনফল $=\frac{1}{3}\pi\times 2^2\times 10$ ঘন ফু. $=\frac{40}{3}\pi$ ঘন ফু.

$\therefore$ প্রদত্ত শঙ্কুর ছিন্ন খণ্ডের ঘনফল

$=(\frac{320}{3}\pi-\frac{40}{3}\pi)$ ঘন ফু. $=\frac{280}{3}\times\frac{22}{7}$ ঘন ফু. $=293\frac{1}{3}$ ঘনফুট।

Exercise 3

1. The height and the diameter of the base of a right circular cone are 12 in. and 10 in. respectively. Find (1) the slant height, (2) the curved surface, (3) the whole surface and (4) the volume of the cone.

[একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 12 ইঞ্চি এবং ভূমির ব্যাস 10 ইঞ্চি। উহার (1) তির্যক উচ্চতা, (2) বক্রতল, (3) সমগ্রতল ও (4) ঘনফল নির্ণয় কর।]

2. Find the vertical height and the slant height of a right circular cone whose curved surface is 330 sq. in. and the diameter of whose base is 7 inches.

[একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রতল 330 বর্গ ইঞ্চি এবং ভূমির ব্যাস 7 ইঞ্চি। উহার উল্লম্ব উচ্চতা ও তির্যক-উচ্চতা কত ?]

3. The height and radius of the base of a cone are 12 cm. and 5 cm. respectively. Find the curved surface and the volume of the cone.

[যে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 12 সেন্টিমিটার এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 5 সেন্টিমিটার, তাহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল ও ঘনফল নির্ণয় কর।]

4. Find the radius of the base of a right circular cone whose volume is 1232 cu. cm. and height 24 cm.

[একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ঘনফল 1232 ঘন সে. মিটার এবং উচ্চতা 24 সে. মিটার হইলে উহার ভূমির ব্যাসার্ধ কত ?]

5. The slant height of a right circular cone is 1 ft. 2 in. and its curved surface is 264 sq. inches. Find the diameter of the base.

[একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা 1 ফুট 2 ইঞ্চি এবং বক্রতল 264 বর্গ ইঞ্চি ; উহার ব্যাস নির্ণয় কর ।]

6. The height and the radius of the base of a cone are 15 cm. and 8 cm. respectively ; find its curved surface and the volume of the cone.

[একটি শঙ্কুর উচ্চতা ও ভূমির ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 15 ও 8 সেন্টিমিটার। উহার বক্রতল ও ঘনফল নির্ণয় কর ।]

7. How much canvas will make a conical tent 11 ft. in height and 12 ft. in diameter at the base ?

[উচ্চতা 11 ফুট ও ভূমির ব্যাস 12 ফুট হইবে এরূপ একটি শঙ্কুর আকারের তাঁবু নির্মাণ করিতে কি পরিমাণ ক্যান্‌ভ্যাস বস্ত্র লাগিবে ?]

8. A right-angled triangle, of which the sides are 3 in. and 4 in. in length, is made to turn round on the longer side. Find the volume of the cone thus formed. [S. A.]

[একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুদ্বয় 3 ইঞ্চি ও 4 ইঞ্চি। দীর্ঘতর বাহুটিকে অক্ষ করিয়া ত্রিভুজটি ঘুরাইলে যে শঙ্কু উৎপন্ন হয় তাহার ঘনফল নির্ণয় কর ।]

9. A right angled triangle of sides equal to 20 in., 16 in. and 12 in. respectively is made to spin round on its hypotenuse as axis. Find the volume of the double cone thus formed. [R. E.]

[একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 20 ই., 16 ই. ও 12 ইঞ্চি। ইহার অতিভুজকে অক্ষ করিয়া ত্রিভুজটিকে ঘুরাইলে যে শঙ্কুদ্বয় উৎপন্ন হয় তাহাদের মোট ঘনফল কত ?]

10. A cone 3 ft. high and 2 ft. in diameter at the bottom is placed on the ground and sand is poured over it until a conical heap is formed 5 ft. high and 30 it. in circumference at the bottom. Find how many cubic feet of sand there are.

[3 ফুট উচ্চ একটি শঙ্কুর তলদেশের ব্যাস 2 ফুট। উহাকে ভূমিতে বসাইয়া উহার উপর বালি ঢালিতে থাকায় এরূপ একটি শঙ্কু আকারের স্তূপ হইল যাহার উচ্চতা 5 ফুট এবং তলদেশের পরিধি 30 ফুট। উহাতে কত ঘন ফুট বালি আছে ?]

11. Find the lateral surface and the volume of a right circular cone of height 15 ft. ; the radius of whose base is 8 ft. [C. U. '42]

[একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 15 ফুট এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 8 ফুট ; উহার বক্রতল পরিমাণ ও ঘনফল নির্ণয় কর।]

12. Find the volume and the area of the slanting surface of a right circular cone of height 4 ft. and the radius of whose base is 3 feet. ($\pi=\frac{22}{7}$). [C. U. '39]

[একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 4 ফুট এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 3 ফুট। উহার ঘনফল ও বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।]

13. The upper part of a right circular cone whose curved surface is 20 sq. cm., is cut off by a plane parallel to the base, so that the curved surface of the remainder is 15 sq. cm. Show that the plane bisects the height of the cone.

[একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 20 বর্গ সে. মিটার। উহার ভূমির সমান্তরাল একটি সমতলের দ্বারা উহার অগ্রভাগকে ছিন্ন করায় অবশিষ্ট অংশের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 15 বর্গ সে. মিটার হইল। প্রমাণ কর যে সমতলটি শঙ্কুর উচ্চতাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।]

14. The section of a right circular cone by a plane through its vertex perpendicular to the base is an equilateral triangle, each side of which is 12 cm., find the volume of the cone.

[একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর শীর্ষগামী ও ভূমির উপর লম্ব কোন সমতল দ্বারা শঙ্কুটিকে ছেদ করায় উহার ছেদ-তলটি (section) একটি 12 সে. মিটার বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ হইল। শঙ্কুটির ঘনফল নির্ণয় কর।]

15. A right circular cone 42 cm. high has its upper part cut off by a plane drawn parallel to its base through the middle point of its axis. If the radius of the original cone be 5 cm., find the volume of the truncated cone.

[42 সে. মিটার উচ্চ একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর অগ্রভাগকে উহার অক্ষের মধ্যবিন্দু দিয়া ভূমির সমান্তরাল কোন সমতল দ্বারা কাটিয়া ফেলা হইল। যদি মূল শঙ্কুর ব্যাসার্ধ 5 সে. মিটার হয়, তবে অবশিষ্ট ছিন্ন শঙ্কুর ঘনফল নির্ণয় কর।]

[চোঙ (cylinder) ও গোলক (sphere)-এর আলোচনা পরিশিষ্টে দেখ।]

দ্বিতীয় অধ্যায়

ALGEBRA (বীজগণিত)

Elimination (অপনয়ন)

5. **অপনয়ন ও অপনীতক।** অপনয়ন অর্থে বর্জন বুঝায়। কতিপয় প্রদত্ত সমীকরণ হইতে এক বা একাধিক বীজগণিতীয় রাশি অপনয়ন করিতে (eliminate) হইলে ঐ সমীকরণগুলির সাহায্যে ঐ রাশিবর্জিত একটি সমীকরণ নির্ণয় করিতে হয়।

ঐ রাশিবর্জিত যে সমীকরণটি গঠিত হয় তাহাকে **অপনীতক** (eliminant) বলা হয়।

অপনয়ন প্রণালী। মনে কর $2x+a=0$ ও $3x+4b=0$ এই সমীকরণ দুইটি হইতে x অপনয়ন করিতে হইবে।

একণে, $\because \; 2x+a=0, \; \therefore \; x=-\frac{a}{2}$ ·····(1)

আবার, $\because \; 3x+4b=0. \; \therefore \; x=-\frac{4b}{3}$······(2)

$\therefore \; -\frac{a}{2}=-\frac{4b}{3}$, বা $3a-8b=0$. এই সমীকরণে x নাই (অর্থাৎ ইহা x-বর্জিত) এবং ইহা প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি হইতে গঠিত হইয়াছে, সুতরাং **ইহাই** এখানে অপনীতক। এই $3a-8b=0$ সমীকরণটিকে প্রদত্ত সমীকরণ দুইটির x-অপনীতক (x eliminant) বলে।

সাধারণ নিয়ম। দুইটি সমীকরণ হইতে একটি রাশি (x বা y) অপনয়ন করিবার জন্য প্রথমে প্রত্যেক সমীকরণ হইতে ঐ রাশির মান নির্ণয় করিবে।

এইরূপে সমীকরণ দুইটি হইতে ঐ রাশির যে দুইটি মান পাওয়া যাইবে তাহারা যদি সমান হয়, কেবল তবেই ঐ মান দ্বারা সমীকরণ দুইটি সিদ্ধ হয়। অতএব, ঐ লব্ধ মান দুইটিকে সমিত-করিয়া যে সমীকরণটি পাওয়া যাইবে তাহাই ঐ সমীকরণদ্বয়ের ঐ রাশি অপনীতক হইবে।

এখানে বুঝা গেল যে, ঐ লব্ধ অপনীতকটি হইল প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি যুগপৎ সিদ্ধ হইবার সর্ত।

অপনয়নে সমীকরণ-সংখ্যা। উপরের উদাহরণে দেখা যাইতেছে যে, একটি রাশি (x) অপনয়নের জন্য দুইটি সমীকরণ প্রয়োজন হইয়াছে। এ সম্বন্ধে

সাধারণতঃ যতগুলি রাশি অপনয়ন করিতে হইবে প্রদত্ত সমীকরণের সংখ্যা তাহা অপেক্ষা এক অধিক হওয়া আবশ্যক।

একটি রাশি অপনয়নের জন্য দুইটি সমীকরণ আবশ্যক। কারণ, একটি সমীকরণ হইতে ঐ রাশির যে মান পাওয়া যায় তাহা আর একটি সমীকরণে ঐ রাশির পরিবর্তে বসাইয়া তবে ঐ রাশি-বর্জিত সমীকরণটি পাওয়া যাইবে।

অনুরূপে দুইটি রাশি অপনয়নের জন্য তিনটি সমীকরণের প্রয়োজন হয়। কারণ, এখানে যে কোন দুইটি সমীকরণ হইতে ঐ অপনেয় রাশি দুইটির যে মান পাওয়া যাইবে, তৃতীয় সমীকরণে ঐ রাশি দুইটির সেই মান বসাইলে তবে ঐ রাশিদ্বয়-বর্জিত সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

কিন্তু যদি প্রদত্ত সমীকরণগুলি অপনেয় রাশিগুলির **সমমাত্র সমীকরণ** (homogeneous equation) হয়, তবে সমীকরণের সংখ্যা অপনেয় রাশি-সংখ্যার সমান হইলেও চলিবে।

মনে কর, $4x+my=0$ এবং $nx+3y=0$ এই সমীকরণ দুইটি হইতে x ও y অপনয়ন করিতে হইবে।

এখন দেখ, প্রদত্ত সমীকরণ দুইটিকে y দ্বারা ভাগ করিয়া পাই

$4.\frac{x}{y}+m=0\cdots(1)$ এবং $n.\frac{x}{y}+3=0\cdots(2)$

(1) হইতে $\frac{x}{y}=-\frac{m}{4}$ এবং (2) হইতে $\frac{x}{y}=-\frac{3}{n}$.

$\therefore\quad -\frac{m}{4}=-\frac{3}{n},$ বা, $mn=12.$

অতএব অপনীতকটি হইল $mn=12.$

[**দ্রষ্টব্য :** উপরের উদাহরণের $\frac{x}{y}$-কে একটি মাত্র রাশি ধরিয়া উহাকে অপনীত করা হইয়াছে।]

উদাহরণমালা 1

উদা. 1. Eliminate (অপনয়ন কর) x from the equations $a_1x+b_1=0$ and $a_2x+b_2=0.$

$\because\quad a_1x+b_1=0,\qquad x=-\frac{b_1}{a_1}.$

আবার, $\because\quad a_2x+b_2=0,\qquad x=-\frac{b_2}{a_2}.$

$-\frac{b_1}{a_1}=-\frac{b_2}{a_2},\quad\therefore\quad a_1b_2-b_1a_2=0$ হইল নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 2. Eliminate x and y from the equations $a_1x+b_1y=0$ and $a_2x+b_2y=0$.

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে y দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $a_1\frac{x}{y}+b_1=0\cdots(1)$

এবং $a_2\frac{x}{y}+b_2=0\cdots(2)$. এক্ষণে, (1) হইতে পাই $\frac{x}{y}=-\frac{b_1}{a_1}$.

$\therefore$ (2)-এ $\frac{x}{y}$-এর ঐ মান বসাইয়া পাই

$a_2\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)+b_2=0$, বা, $a_1b_2-a_2b_1=0$, ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 3. Eliminate x, y, z from the equations

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z=0\cdots\cdots(1)\\ a_2x+b_2y+c_2z=0\cdots\cdots(2)\\ a_3x+b_3y+c_3z=0\cdots\cdots(3)\end{array}\right\}$$

তোমরা বজ্রগুণন প্রণালীতে সমীকরণ সমাধানের প্রণালী পূর্বে শিখিয়াছ। এখানে (2) ও (3) হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই

$$\frac{x}{b_2c_3-b_3c_2}=\frac{y}{c_2a_3-c_3a_2}=\frac{z}{a_2b_3-a_3b_2}.$$

মনে কর প্রত্যেক অনুপাত$=k$.

$\therefore$ $x=k(b_2c_3-b_3c_2)$, $y=k(c_2a_3-c_3a_2)$, $z=k(a_2b_3-a_3b_2)$.

এক্ষণে, (1)-সমীকরণে x, y, z-এর ঐ মান বসাইয়া পাই,

$k\{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)\}=0$,

$\therefore$ $a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0$.

[দ্রষ্টব্য: প্রদত্ত সমীকরণগুলিকে উপরে প্রদত্ত আকারে পরিণত করিয়া লওয়া যায়।]

উদা. 4. Eliminate m and n from the equations $mx+ny=a$, $nx-my=b$, $m^2+n^2=1$.

প্রথম ও দ্বিতীয় সমীকরণ দুইটির বর্গ করিয়া পাই

$$m^2x^2+n^2y^2+2mnxy=a^2\cdots\cdots(1)$$

এবং $n^2x^2+m^2y^2-2mnxy=b^2\cdots\cdots(2)$

$\therefore$ (1)+(2) করিয়া পাই $x^2(m^2+n^2)+y^2(n^2+m^2)=a^2+b^2$,

$\therefore$ অপনীতক হইল $x^2+y^2=a^2+b^2$ [$\because m^2+n^2=1$].

উদা. 5. Eliminate p from the equations

$$x^2=p^2+\frac{1}{p^2} \text{ and } y=p+\frac{1}{p}.$$

এখানে $y^2=\left(p+\frac{1}{p}\right)^2=p^2+\frac{1}{p^2}+2=x^2+2, \quad \therefore \quad y^2-x^2=2.$

$\therefore$ নির্ণেয় অপনীতক হইল $y^2-x^2=2.$

উদা. 6. Eliminate x from the equations $ax^2+bx+c=0$ and $a_1x^2+b_1x+c_1=0$.

প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই

$$\frac{}{bc_1-b_1c}=\frac{}{ca_1-c_1a}=\frac{1}{ab_1-a_1b},$$

$\therefore \quad x^2=\frac{bc_1-b_1c}{ab_1-a_1b}$ এবং $x=\frac{ca_1-c_1a}{ab_1-a_1b},$

$\therefore \quad \frac{bc_1-b_1c}{ab_1-a_1b}=\frac{(ca_1-c_1a)^2}{(ab_1-a_1b)^2},$

$\therefore \quad (ca_1-c_1a)^2=\frac{bc_1-b_1c}{ab_1-a_1b}\times(ab_1-a_1b)^2.$

$=(bc_1-b_1c)(ab_1-a_1b)$, ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 7. Eliminate x and y from the equations

$x-y=a\cdots(1)$, $x^2-y^2=b^2\cdots(2)$ and $x^3-y^3=c^3\cdots(3)$.

$\because \quad x^2-y^2=b^2, \quad \therefore \quad (x+y)(x-y)=b^2,$

বা, $(x+y)\times a=b^2, \quad . \quad x+y=\frac{b^2}{a}\cdots\cdots(4)$

(1)এর বর্গ করিয়া পাই $x^2+y^2-2xy=a^2 \quad \cdot(5)$

এবং (4) ,, ,, ,, $\quad x^2+y^2+2xy=\frac{b^4}{a^2}\cdot \quad \cdot\cdot(6)$

(6)−(5) করিয়া পাই $4xy = b^4-c \qquad xy = b^4-a^4$

এক্ষণে (3) হইতে পাই $c^3=x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$$=a\{(x+y)^2-xy\}$$

$$=a\left\{\frac{b^4}{a^2}-\frac{b^4-a^4}{4a^2}\right\}$$

$$=a\left(\frac{3b^4+a^4}{4a^2}\right)=\frac{3b^4+a^4}{4a},$$

$\therefore$ বজ্রগুণন দ্বারা $3b^4+a^4=4ac^3$

$\therefore$ নির্ণেয় অপনীতক হইল $a^4+3b^4-4ac^3=0.$

উদা. 8. Eliminate $\cos\theta$ and $\sin\theta$ between the equations $x\cos\theta+y\sin\theta=a$ and $x\sin\theta-y\cos\theta=b$.

$\because\quad x\cos\theta+y\sin\theta=a,$

$\therefore\quad x^2\cos^2\theta+y^2\sin^2\theta+2xy\cos\theta\sin\theta=a^2\cdots\cdots(1)$

আবার, $\because\quad x\sin\theta-y\cos\theta=b,$

$\therefore\quad x^2\sin^2\theta+y^2\cos^2\theta-2xy\sin\theta\cos\theta=b^2\cdots\cdots(2)$

এক্ষণে, (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই

$x^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+y^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=a^2+b^2,$

$\therefore\quad x^2+y^2=a^2+b^2\ (\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$, ইহাই অপনীতক।

উদা. 9. Show that $p^2+q^2+r^2-4=pqr$ is the eliminant of the equations $\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=p, \frac{z}{x}+\frac{x}{z}=q, \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=r.$

প্রদত্ত সমীকরণ তিনটি গুণ করিয়া পাই

$$2+\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)+\left(\frac{z^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}\right)+\left(\frac{x^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)=pqr,$$

বা, $2+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-2+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)^2-2+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)^2-2=pqr,$

বা, $2+r^2-2+p^2-2+q^2-2=pqr,$

$\therefore\quad p^2+q^2+r^2-4=pqr.$

অতএব প্রমাণিত হইল যে

প্রদত্ত সমীকরণ তিনটির অপনীতক $p^2+q^2+r^2-4=pqr.$

উদা. 10. Find the eliminant of the following equations

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=a\cdots\cdots(1)\\ xy+yz+zx&=b\cdots\cdots(2)\\ x^3+y^3+z^3&=c\cdots\cdots(3)\\ xyz&=d\cdots\cdots(4)\end{aligned}\right\}$$

(3) ও (4) হইতে পাই $x^3+y^3+z^3-3xyz=c-3d,$

$\therefore\quad (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=c-3d,$

বা, $a\{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\}=c-3d,$

বা, $a(a^2-3b)=c-3d,$

$\therefore\quad a^3-3ab+3d-c=0$, ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 11. Eliminate x from $ax^2+bx+c=0\cdots\cdots(1)$ and $x^3+x+d=0\cdots\cdots(2)$.

প্রথম সমীকরণকে x দ্বারা এবং দ্বিতীয়টিকে a দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$ax^3+bx^2+cx=0 \cdots\cdots (3)$$
$$ax^3+ax \ +ad=0 \cdots\cdots (4)$$

(3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া পাই $bx^2+(c-a)x-ad=0 \cdots\cdots (5)$.

এক্ষণে (1) ও (5) হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই

$$\frac{x^2}{-abd-c(c-a)}=\frac{x}{bc+a^2d}=\frac{1}{a(c-a)-b^2},$$

$\therefore \quad (bc+a^2d)^2=(abd+c^2-ac)(a^2+b^2-ac).$ [উদা. 6 দেখ]

উদা. 12. Eliminate x and y from $px+qy=0 \cdots\cdots (1)$ and $ax^2+bxy+cy^2=0 \cdots (2)$.

(1) হইতে পাই $px=-qy$,

সুতরাং $\dfrac{x}{-q}=\dfrac{y}{p}=k$ (মনে কর), $\quad x=-qk,\ y=pk$.

এক্ষণে (2) হইতে পাই $a(-qk)^2+b(-qk)(pk)+c(pk)^2=0$,

বা, $aq^2k^2-bpqk^2+cp^2k^2=0$,

বা, $k^2(aq^2-bpq+cp^2)=0$,

$\therefore \quad aq^2-bpq+cp^2=0$, ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

Exercise 1

Eliminate x from the following equations :—

1. $\left.\begin{array}{l} x+b \ =0 \\ 3x+2a=a \end{array}\right\}$ 2. $\left.\begin{array}{l} 2x-m=0 \\ nx-5=0 \end{array}\right\}$

3. $ax+b=0,\ a'x+b'=0$.

4. $ax^2-2a^2x+1=0,\ a^2+x^2=3ax$.

5. $x^2+ax+b=0,\ x^3+cx+d=0$.

6. $x+\dfrac{1}{x}=a+b, \quad x-\dfrac{1}{x}=a-b$.

7. $x^2+x+a=0,\ bx+c=0$.

8. $x^3+\dfrac{1}{x^3}+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=a, \quad x^3-\dfrac{1}{x^3}-3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=b$.

Eliminate x and y from the following equations :—

9. $2x+ay=0,\ bx+3y=0$.

10. $x-y=a,\ x^2+y^2=b,\ xy=c$.

11. $x^2-y^2=ax-by,\ x^2+y^2=1,\ 4xy=bx+ay.$

12. $x+y=p,\ x^2+y^2=q,\ x^3+y^3=r.$

13. $x+y=m,\ x^3+y^3=n,\ xy=l.$

14. $x+y=a,\ x^2+y^2=b^2,\ x^4+y^4=c^4.$

Eliminate x, y, z from the following equations :—

15. $ax+by+cz=0,\ a_1x+b_1y+c_1z=0,\ a_2x+b_2y+c_2z=0.$

16. $bx+ay-z=0,\ cx+az-y=0,\ cy+bz-x=0.$

17. $xy=c^2,\ yz=a^2,\ zx=b^2,\ x^2+y^2+z^2=d^2.$

18. $\frac{x}{a}=y+z,\ \frac{y}{b}=z+x,\ \frac{z}{c}=x+y.$

19. Eliminate m and n from the equations $mx-ny=a(m^2-n^2),\ nx+my=2amn,\ m^2+n^2=1.$

20. Show that $a^2+b^2+c^2-abc=4$ is the eliminant of $x^2+y^2=cxy,\ y^2+z^2=ayz,\ z^2+x^2=bzx.$

21. Eliminate l and m from the equations $l^3x+m^3y=a$, $l^2+m^2=1$ and $lx-my=0.$ [P. U. 1902]

22. Eliminate a, b, c from the equations, $bz+cy=a$, $cx+az=b,\ ay+bx=c.$ [C. U., A. U.]

Progression (প্রগতি)

6. **শ্রেণী।** যদি কোন রাশিমালার অন্তর্গত পর পর রাশি বা পদগুলি এরূপ হয় যে উহাদের যে কোনও একটিকে উহার পূর্ববর্তী পদ হইতে কোন একটি নির্দিষ্ট নিয়মে পাওয়া যায়, তাহা হইলে সেই রাশিমালাকে **শ্রেণী** (series) বলে। যথা, 3, 5, 7, 9 প্রভৃতি রাশি, অথবা 3, 6, 12, 24 প্রভৃতি রাশি এক একটি শ্রেণী গঠন করিয়াছে।

সমান্তর শ্রেণী (Arithmetical Progression)

7. **সমান্তর শ্রেণী।** যদি কোন শ্রেণীর অন্তর্গত যে কোন পদের সহিত তাহার ঠিক পূর্ববর্তী পদের অন্তর সর্বদা সমান থাকে, তবে সেই শ্রেণীকে **সমান্তর শ্রেণী** (A. P.) বলে।

আর ঐ সমান অন্তরটিকে **সাধারণ অন্তর** (common difference) বলে। যথা, (i) 1, 3, 5, 7,⋯একটি সমান্তর শ্রেণী ; কারণ, ইহার পর পর

পদগুলি ঠিক একই ভাবে বাড়িয়া গিয়াছে, এক্ষেত্রে সাধারণ অন্তর 2; (ii) 10, 7, 4, 1…ইহাও একটি সমান্তর শ্রেণী; কারণ, ইহার পর পর পদগুলি ঠিক একই ভাবে কমিয়া গিয়াছে। এস্থলে সাধারণ অন্তর −3.

8. **সাধারণ অন্তর নির্ণয়।** সমান্তর শ্রেণীর যে কোন পদ হইতে তাহার ঠিক পূর্বের পদটি বিয়োগ করিলে সাধারণ অন্তর পাওয়া যায়। সাধারণতঃ দ্বিতীয় পদ হইতে প্রথম পদ বিয়োগ করা হয়। যথা,

(1) 2, 6, 10, 14… শ্রেণীর সাধারণ অন্তর $=6-2=4$

(2) 7, 4, 1, −2…শ্রেণীতে সাধারণ অন্তর $=4-7=-3$

(3) $a, a+b, a+2b\cdots$শ্রেণীতে সাধারণ অন্তর $=(a+b)-a=b$

(4) $a, a-b, a-2b\cdots$শ্রেণীতে সাধারণ অন্তর $=(a-b)-a=-b$.

9. **সাধারণ পদ, শেষ পদ ও পদসংখ্যা।** মনে কর, 4, 6, 8, 10, 12, 14 একটি সমান্তর শ্রেণী, ইহার শেষ পদ $=14$, পদসংখ্যা $=6$; এস্থলে 14কে ষষ্ঠ পদও বলা যায়। এইরূপ যদি কোন সমান্তর শ্রেণীতে কতকগুলি পদ থাকে, তবে তাহার সপ্তম, দশম প্রভৃতি পদকে বিশেষ পদ বলে, আর ঐ শ্রেণীর n-তম পদকে (nth termকে) সাধারণ পদ (general term) বলে।

এস্থলে যদি n-তম পদে শ্রেণীটি শেষ হয়, তবে n-তম পদই শেষ পদ (last term) হইবে এবং পদসংখ্যা হইবে n. এই n একটি পূর্ণসংখ্যা ও ধনসংখ্যা হইবে—ইহা কখনও ভগ্নাংশ বা ঋণসংখ্যা হইবে না।

সাধারণতঃ সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদকে a, সাধারণ অন্তরকে b, শেষ পদকে l, পদসংখ্যাকে n এবং পদগুলির যোগফলকে s দ্বারা প্রকাশ করা হয়। আবার, t_1 দ্বারা ১ম পদ, t_2 দ্বারা ২য় পদ, t_3 দ্বারা ৩য় পদ,…,t_n দ্বারা n-তম পদকে নির্দেশ করা যায়।

10. **সমান্তর শ্রেণীর n-তম পদ নির্ণয়।** কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b হইলে,

t_1 (১ম পদ) $=a \quad =a+(1-1)b$,

t_2 (২য় পদ) $=a+b=a+(2-1)b$,

t_3 (৩য় পদ) $=a+2b=a+(3-1)b$,

t_4 (৪র্থ পদ) $=a+3b=a+(4-1)b$, ইত্যাদি।

এক্ষেত্রে দেখা যাইতেছে যে, যে কোন পদে bএর সহগ হইবে সেই পদসংখ্যা অপেক্ষা এক কম। প্রথম পদ a-র সহিত ঐরূপ সহগযুক্ত b যোগ করিলেই যে কোন পদ পাওয়া যায়।

অতএব, যে কোন সমান্তর শ্রেণীর $t_n = a+(n-1)b$.

ঐ শ্রেণীতে যদি মোট n-সংখ্যক পদ থাকে, তবে t_n হইবে শেষ পদ, তখন $l=a+(n-1)b$.

উদাহরণমালা 2

উদা. 1. Find the 12th term of an A. P. whose first term is 3 and the common difference is 2.

[একটি সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 3 ও সাধারণ অন্তর 2 ; উহার দ্বাদশ (12-তম) পদটি নির্ণয় কর।]

এখানে a (১ম পদ)$=3$, b (সাধারণ অন্তর)$=2$ এবং n (পদসংখ্যা)$=12$.

$\because$ সূত্রানুসারে $t_n=a+(n-1)b$,

$\therefore$ নির্ণেয় পদ অর্থাৎ $t_{12}=3+(12-1)\times 2=3+22=25$.

উদা. 2. Find the 15th term of the series 6, 8, 10,...

এস্থলে ১ম পদ $a=6$, সাধারণ অন্তর $b=8-6=2$, পদসংখ্যা $n=15$.

এক্ষণে $t_n=a+(n-1)b$ এই সূত্র হইতে পাই

$t_{15}=6+(15-1)\times 2=6+28=34$.

উদা. 3. Find the 20th term of the series 10, 7, 4,$\cdots$

এখানে ১ম পদ $a=10$, সা. অন্তর $b=7-10=-3$, পদসংখ্যা $n=20$.

$\therefore \quad t_{20}=a+(n-1)b=10+(20-1)\times -3=10+19\times -3$
$=10-57=-47$.

উদা. 4. The first term of an A. P. is 1 and the 18th term is 52 ; find the common difference (সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর)।

মনে কর, সাধারণ অন্তর $=b$.

এখানে $t_{18}=52$, অর্থাৎ $a+(18-1)b=52$,

বা, $1+17b=52$ [$\because \quad a=1$], বা, $17b=51$, $\therefore \quad b=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ অন্তর $=3$.

উদা. 5. Find the 21st term of a series whose 7th and 13th terms are 23 and 41 respectively.

[যে শ্রেণীর সপ্তম ও 13-তম পদ যথাক্রমে 23 ও 41, তাহার 21-তম পদ কত ?]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$, এবং সাধারণ অন্তর $=b$.

এখানে $t_7=23$ অর্থাৎ $a+6b=23\cdots(1)$

এবং $t_{13}=41$ অর্থাৎ $a+12b=41\cdots(2)$

এক্ষণে, (2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া পাই $6b=18$, $\therefore \quad b=3$.

আবার, (1) হইতে পাই $a+18=23$, $\therefore$ $a=5$.

$\therefore$ নির্ণেয় $t_{21}=a+20b=5+20\times 3=5+60=65$.

উদা. 6. Find the series whose 5th and 12th terms are 8 and -6 respectively.

[এমন একটি সমান্তর শ্রেণী নির্ণয় কর যাহার পঞ্চম ও দ্বাদশ পদ যথাক্রমে 8 ও -6.]

মনে কর, প্রথম পদ$=a$ এবং সাধারণ অন্তর$=b$.

অতএব, প্রদত্ত সর্ত হইতে $a+4b=8$...(1)

এবং $a+11b=-6$...(2)

$\therefore$ (বিয়োগ করিয়া) $-7b=14$, $\therefore$ $b=-2$,

এখন (1) হইতে পাই $a+4\times -2=8$, $\therefore$ $a=16$.

$\therefore$ নির্ণেয় শ্রেণীটি 16, 14, 12, 10,...

উদা. 7. Which term of the series 2, 5, 8,$\cdots$is 59 ?

[2,5, 8,$\cdots$শ্রেণীটির কোন্ পদ 59 ?]

মনে কর 59 ঐ শ্রেণীটির n-তম পদ। এখানে $a=2$, $b=5-2=3$.

$\therefore$ $a+(n-1)b=59$,

বা, $2+(n-1)\times 3=59$, বা, $3(n-1)=57$,

বা, $n-1=19$, $\therefore$ $n=20$. অতএব শ্রেণীটির 20শ পদ 59.

উদা. 8. Is 46 a term of the series 1, 4, 7,$\cdots$?

[46 কি 1, 4, 7,$\cdots$শ্রেণীর কোন পদ ?]

যদি সম্ভব হয় মনে কর 46 প্রদত্ত শ্রেণীর n-তম পদ। এখানে $a=1$, এবং $b=4-1=3$. এক্ষণে, $a+(n-1)b=46$, বা, $1+(n-1)\times 3=46$,

বা, $3(n-1)=45$, বা, $n-1=15$, $\therefore$ $n=16$.

অতএব, 46 প্রদত্ত শ্রেণীটির একটি পদ এবং উহা ষোড়শ পদ।

উদা. 9. If the pth and qth terms of an A.P. are respectively q and p, find the first term and the common difference.

[কোন সমান্তর শ্রেণীর p-তম ও q-তম পদ যথাক্রমে q ও p ; উহার প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।]

মনে কর, প্রথম পদ$=a$ এবং সাধারণ অন্তর$=b$.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই, $a+(p-1)b=q\cdots(1)$

এবং $a+(q-1)b=p\cdots(2)$

বিয়োগ করিয়া, $(p-q)b=q-p$, $b=\dfrac{q-p}{p-q}=-1$.

এখন (1) হইতে পাই, $a+(p-1)\times-1=q$, বা, $a-p+1=q$,

$\therefore\quad a=p+q-1.$

$\therefore$ নির্ণেয় প্রথম পদ $=p+q-1$ এবং সাধারণ অন্তর $=-1.$

উদা. 10. The mth term of an A.P. is n and the nth term is m. Find the pth term of it. [C. U. '47, E. B. S. B. '51]

[কোন সমান্তর শ্রেণীর m-তম পদ n এবং n-তম পদ m ; উহার p-তম পদ নির্ণয় কর।]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অন্তর $=b.$

$\therefore$ শর্ত হইতে পাই $a+(m-1)b=n\cdots(1)$

এবং $a+(n-1)b=m\cdots(2)$

$\therefore$ (বিয়োগ করিয়া) $(m-n)b=n-m$, $\therefore\ b=\dfrac{n-m}{m-n}=-1.$

এখন (1) হইতে পাই $a+(m-1)\times(-1)=n$,

বা, $a-m+1=n$, $\therefore\ a=m+n-1.$

$\therefore$ নির্ণেয় p-তম পদ $=a+(p-1)b=m+n-1+(p-1)\times(-1)$

$=m+n-1-p+1=m+n-p.$

উদা. 11. If a be the first term and l the last term of an A. P., show that the sum of the pth term from the beginning and the pth term from the end is $a+l$.

[কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a ও শেষ পদ l ; প্রমাণ কর যে শ্রেণীটির গোড়া হইতে p-তম এবং শেষ হইতে পূর্বের p-তম পদদ্বয়ের সমষ্টি $a+l.$]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অন্তর $=b.$

$\therefore$ গোড়ার দিক হইতে p-তম পদ $=a+(p-1)b$

এবং শেষ দিক হইতে পূর্বের p-তম পদ $=l-(p-1)b.$

$\therefore$ ঐ দুই পদের সমষ্টি $=a+(p-1)b+l-(p-1)b=a+l.$

[**দ্রষ্টব্য :** গোড়ার দিক হইতে পর পর পদগুলি যে ভাবে বাড়িয়া গিয়াছে, শেষ দিক হইতে আগের পদগুলি ঠিক সেইভাবে কমিয়া গিয়াছে। $\therefore$ যদি গোড়ার দিক হইতে কোন পদ $a+rd$ হয়, তবে শেষ দিক হইতে পূর্বের ঐ সংখ্যক পদ $l-rd$ হইবে।]

Exercise 2

1. The first term of an A. P. is 6 and the common difference is 2. Find the 15th term. [C. U. '22]

2. Find the common difference of an A. P. of which the 1st term is 1 and the 10th term is 10. [C. U. '25]

3. The first term of an A. P. is 2 and the 20th term is 59. Find the common difference. [C. U. '24]

4. Find the series in A. P. of which the first term and the common difference are a and d respectively.

[এমন একটি সমান্তর শ্রেণী নির্ণয় কর যাহার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d.]

5. Find the series in A.P. of which the 1st term is 5 and the common difference is -3.

[এমন একটি সমান্তর শ্রেণী নির্ণয় কর যাহার প্রথম পদ 5 এবং সাধারণ অন্তর -3.]

6. Find the 15th term of the series 16, 13, 10,⋯

7. Find the 12th and rth terms of the series 2, 5, 8,⋯

8. Find the 20th and the nth terms of the series 8, 6, 4,⋯

9. Find the 10th term of the series $1+\frac{5}{4}+1\frac{1}{2}+\cdots$

10. Find the nth term of the series (i) $a, (a+\frac{1}{n}), (a+\frac{2}{n}),\cdots$ and of (ii) $\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}, \frac{2n+1}{n},\cdots$ [C. U. 1886]

11. Which term of the series 6, 10, 14, ⋯ is 38 ?

12. Which terms of the series 10, 8, 6,⋯are 0 and -10 ?

13. Is 29 a term of the series 3, 6, 9, ⋯ ?

[3, 6, 9 শ্রেণীটির কোন পদ 29 হইতে পারে কি ?]

14. Is $6\frac{3}{5}$ a term of the series $\frac{3}{5}, 1, \frac{7}{5}$ ⋯ ?

15. The second term of an A. P. is 6 and the fourth term is 14. Find the 10th term. [C. U. '29]

16. Find the 20th term of an A. P, of which the 5th and the 12th terms are -4 and -25 respectively.

[যে সমান্তর শ্রেণীর পঞ্চম ও দ্বাদশ পদ যথাক্রমে -4 ও -25 তাহার 20-তম পদ কত ?]

17. Find the first and the 10th terms of the A. P. whose 5th and 13th tetms are 5 and -3 respectively.

[যে সমান্তর শ্রেণীর পঞ্চম ও 13-তম পদ যথাক্রমে 5 ও -3, তাহার প্রথম ও দশম পদ নির্ণয় কর।]

18. Find the series in A. P. of which the pth term is $3p-1$.

[কোন সমান্তর শ্রেণীর p-তম পদ $3p-1$; শ্রেণীটি নির্ণয় কর।]

19. If the pth and qth terms of an A. P. be respectively c and d, find the first term and the common difference [C. U. '34]

[কোন সমান্তর শ্রেণীর p-তম ও q-তম পদ যথাক্রমে c ও d হইলে উহার প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর কত হইবে ?]

20. If the mth term of an A. P. is n and the nth term is m, find the $(m+n)$th term.

[কোন সমান্তর শ্রেণীর m-তম পদ n এবং n-তম পদ m ; উহার $(m+n)$তম পদ নির্ণয় কর।]

21. If the pth term of an A. P. is a and the qth term is b, find the rth term.

[যে সমান্তর শ্রেণীর p-তম পদ a এবং q-তম পদ b, তাহার r-তম পদ নির্ণয় কর।]

22. Prove that in an A. P. the sum of two equidistant terms from the beginning and the end is constant.

[প্রমাণ কর যে, সমান্তর শ্রেণীর প্রথম ও শেষ প্রান্তদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের সমষ্টি ধ্রুবক।]

সমান্তরীয় মধ্যক (Arithmetic Mean)

11. **সমান্তরীয় মধ্যক।** (1) যদি পর পর তিনটি রাশি সমান্তর শ্রেণীতে থাকে, তবে মধ্যপদটিকে সমান্তরীয় মধ্যক বলে। যথা, a, b, c সমান্তর শ্রেণীর ক্রমিক তিনটি পদ হইলে bকে a ও c-র সমান্তরীয় মধ্যক বলে। (2) যদি কতকগুলি পদ একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, তাহা হইলে প্রথম ও শেষ পদের মধ্যবর্তী পদগুলিকে প্রথম ও শেষ পদের মধ্যে ততগুলি সমান্তরীয় মধ্যক বলা হয়। যথা : $a, m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n, b$ একটি সমান্তর শ্রেণী হইলে, $m_1, m_2, \cdots, m_n$ পদগুলিকে a ও b-র মধ্যবর্তী n সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক বলে। (3) সমান্তরীয় মধ্যককে সংক্ষেপে ইংরাজিতে A. M. লেখা যায়।

উদাহরণমালা 3

উদা. 1. Find the Arithmetic mean between a and b. [C. U. '48]

মনে কর, সমান্তরীয় মধ্যকটি m, $\therefore$ a, m, b একটি সমান্তর শ্রেণী,

$\therefore$ $m-a=b-m$ (উভয় পক্ষ সাধারণ অন্তরের সমান বলিয়া)

বা, $2m=a+b$, $\therefore$ $m=\frac{a+b}{2}$.

[**দ্রষ্টব্য :** যে কোন দুইটি পদের সমষ্টির অর্ধেক, ঐ পদদ্বয়ের সমান্তরীয় মধ্যক হইবে।]

উদা. 2. Find n arithmetic means between a and b.

$\because$ a ও bর মধ্যে n সংখ্যক মধ্যক আছে,

$\therefore$ a ও bর মধ্যবর্তী n মধ্যকগুলি লইয়া এমন একটি সমান্তর শ্রেণী হইল যাহার পদসংখ্যা $=n+2$, প্রথম পদ a, এবং শেষ পদ বা $(n+2)$-তম পদ $=b$. মনে কর সাধারণ অন্তর $=d$.

$\because$ $(n+2)$-তম পদ $=b$, $\therefore$ $a+(n+2-1)d=b$,

বা, $a+(n+1)d=b$, বা, $(n+1)d=b-a$, $\therefore$ $d=\frac{b-a}{n+1}$.

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যকগুলি

$$=(a+\tfrac{b-a}{n+1}), (a+2.\tfrac{b-a}{n+1}), (a+3.\tfrac{b-a}{n+1}), \cdots, (a+n.\tfrac{b-a}{n+1}).$$

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে মধ্যে আছে n সংখ্যক মধ্যক এবং তাহাদের আগে আছে a ও শেষে আছে b, সেইজন্য মোট পদসংখ্যা $n+2$ হইল। প্রথম পদের সঙ্গে সাধারণ অন্তর যোগ করিয়া ২য় পদ অর্থাৎ প্রথম মধ্যক পাওয়া গেল, এইভাবে সাধারণ অন্তর যোগ করিয়া পর পর অন্য মধ্যকগুলি পাওয়া যাইবে। শেষ মধ্যক হইল $a+n\frac{b-a}{n+1}$, ইহা $b-d$ বা $b-\frac{b-a}{n+1}$ এরূপও প্রয়োজন মত লেখা যায়।]

উদা. 3. Insert (বসাও) 10 arithmetic means between 2 and 57. [C. U. '19 ; D. B. '28]

2 এবং 57এর মধ্যে 10টি মধ্যক লইলে মোট 12টি পদযুক্ত একটি সমান্তর শ্রেণী হইবে। ইহার প্রথম পদ 2 এবং দ্বাদশপদ 57. মনে কর, সাধারণ অন্তর b. $\therefore$ $t_{12}=57$, বা $2+11b=57$, বা $11b=55$, $\therefore$ $b=5$.

$\therefore$ প্রথম মধ্যক $=2+5=7$, দ্বিতীয় মধ্যক $=7+5=12$. এইরূপে নির্ণেয় মধ্যকগুলি $=7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52$.

4. There are n arithmetic means between 4 and 31 such that the second mean : the last mean $=5:14$. Find n.

[4 ও 31 এর মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক আছে এবং দ্বিতীয় মধ্যক : শেষ মধ্যক $=5:14$; n এর মান কত ?]

4 ও 31এর মধ্যে n মধ্যক লইয়া মোট $(n+2)$ সংখ্যক পদ-যুক্ত সমান্তর শ্রেণী হইল। উহার প্রথম পদ 4 এবং $(n+2)$-তম পদ 31.

মনে কর, সাধারণ অন্তর b.

$\therefore \quad t_{n+2}=4+(n+2-1)b=31,$

বা, $(n+1)b=27 \cdots\cdots(1)$

আবার, $\because$ b সাধারণ অন্তর,

$\therefore$ দ্বিতীয় মধ্যক $=4+2b$ এবং শেষ মধ্যক $=31-b$.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত হইতে $\dfrac{4+2b}{31-b}=\dfrac{5}{14}$,

বা, $28b+56=155-5b$, বা, $33b=99$, $\therefore \quad b=3$.

একণে (1) হইতে পাই $(n+1)\times 3=27$,

বা, $n+1=9$, $\therefore \quad n=8$.

Exercise 3

Find the arithmetic mean (সমান্তরীয় মধ্যক) between :—

1. 7 and 23.
2. -5 and 13.
3. -4 and -14.
4. $(x-a)^2$ and $(x+a)^2$
5. $2\frac{1}{4}$ and $3\frac{1}{2}$.
6. $\frac{m+n}{m-n}$ and $\frac{m-n}{m+n}$.
7. Insert (বসাও) 7 arithmetic means between 1 and 41. [C. U. '14]
8. Insert 4 arithmetic means between 4 and 324. [C. U. 1890]
9. There are n arithmetic means between 2 and 23 and the first mean : the last mean $=1:4$; find n.

[2 ও 23-এর মধ্যে এরূপ n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক আছে যে প্রথম মধ্যক : শেষ মধ্যক $=1:4$; n-এর মান নির্ণয় কর।]

10. There are n arithmetic means between 14 and 38 such that the 2nd mean : the last mean $=4:7$; find n.

[14 ও 38-এর মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক আছে এবং দ্বিতীয় মধ্যক : শেষ মধ্যক $=4:7$; n-এর মান কত ?]

12. সমান্তর শ্রেণীর যে কোন সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়।

Show how to find the sum of n terms of an A. P., being given the first term and the common difference.

[কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর দেওয়া আছে। উহার n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।]

মনে কর, কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a, সাধারণ অন্তর b এবং উহার n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, উহার যোগফল S এবং শেষ পদ l.

অতএব, $S=a+(a+b)+(a+2b)+\cdots+(l-2b)+(l-b)+l$

শ্রেণীটিকে উল্টাইয়া লিখিলে,

$$S=l+(l-b)+(l-2b)+\cdots+(a+2b)+(a+b)+a$$

যোগ করিয়া $2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)$

$+(a+l)=(a+l)+(a+l)+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত $=n(a+l)$.

$\therefore\quad S=\frac{n}{2}(a+l)\cdots(1)$

এক্ষণে, $\because$ l শেষ পদ বা n-তম পদ, $\therefore$ $l=a+(n-1)b$.

$\therefore$ (1) হইতে l-এর মান বসাইয়া পাই $S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}\cdots(2)$

[**দ্রষ্টব্য :** কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম ও শেষ পদ জানা থাকিলে সূত্র-(1) এবং অন্যস্থলে সূত্র-(2) এর সাহায্যে যোগফল নির্ণয় করিবে।]

উদাহরণমালা 4

উদা. 1. Sum to 21 terms the Arithmetic progression $3+7+11+\cdots$ [$3+7+11+\cdots$ শ্রেণীটির 21 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।]

এস্থলে প্রথম পদ $a=3$, সাধারণ অন্তর $b=7-3=4$ এবং পদসংখ্যা $n=21$. মনে কর, যোগফল S.

$\therefore\quad S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}=\frac{21}{2}\{3\times2+(21-1)\times4\}=\frac{21}{2}\times86=903.$

উদা. 2. The first two terms of an A. P. are 3 and 1. Write down the 10th term and the sum of the first 10 terms. [C. U. '13]

[কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম দুইটি পদ 3 ও 1 ; উহার দশম পদ ও প্রথম 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।]

এখানে প্রথম পদ $a=3$, সাধারণ অন্তর $b=1-3=-2$,

পদসংখ্যা $n=10$. মনে কর, যোগফল $=S$.

$\therefore\ t_{10}=a+(n-1)b=3+(10-1)\times(-2)=3-18=-15$ (উত্তর),

এবং $S=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{10}{2}(3-15)=5\times(-12)=-60$ (উত্তর)।

উদা. 3. Find the sum of $3+5+7\cdots$ to n terms.

এখানে $a=3$, $b=5-3=2$. মনে কর, সমষ্টি $=S$.

$\therefore\quad S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}$

$=\frac{n}{2}\{2\times3+(n-1)\times2\}=\frac{n}{2}\{2n+4\}=n^2+2n.$

উদা. 4. Find the sum of the series $5+7+9+\cdots+65$.

এস্থলে $a=5$, $b=7-5=2$. মনে কর, পদ সংখ্যা $=n$.

সুতরাং n-তম পদ বা শেষ পদ $=65$.

$\therefore\quad a+(n-1)b=65$, বা, $5+(n-1)\times2=65$,

বা, $2(n-1)=60$, বা, $n-1=30$, $\therefore\quad n=31$.

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=\frac{31}{2}(5+65)=\frac{31}{2}\times70=1085.$

উদা. 5. Find the A. P. of which the sum to n terms is $(2n+1)(2n-1)$.

[এরূপ একটি সমান্তর শ্রেণী নির্ণয় কর যাহার প্রথম n পদের সমষ্টি $(2n+1)(2n-1)$ হয়।]

মনে কর, n-সংখ্যক পদের যোগফল S_n.

$\therefore\quad S_n=(2n+1)(2n-1)=4n^2-1.$

এখন যদি n-এর স্থানে 1, 2, 3 প্রভৃতি বসাই তাহা হইলে S_1 অর্থাৎ প্রথম একটি পদের যোগফল, S_2 অর্থাৎ প্রথম দুইটি পদের যোগফল ইত্যাদি পাইব।

$\therefore\quad S_1=4.1^2-1=3,\ S_2=4.2^2-1=15,\ S_3=4.3^2-1=35.$

আবার, $t_1=S_1=3$ [$\because$ প্রথম একটি পদের যোগফল ও প্রথম পদ একই]

এবং $t_2=S_2-S_1=15-3=12$ [কারণ, প্রথম দুই পদের সমষ্টি হইতে প্রথম পদ বিয়োগ করিলে দ্বিতীয় পদের সমান হয়।]

অনুরূপে $t_3=S_3-S_2=35-15=20$

এবং $t_4=S_4-S_3=63-35=28.$

$\therefore$ নির্ণেয় শ্রেণী $=3, 12, 20, 28,\cdots\cdots$ ইহার প্রথম পদটি বাদে বাকী পদগুলি সমান্তর শ্রেণী (A. P.) হইবে।

[দ্রষ্টব্য : এইরূপ ক্ষেত্রে অন্ততঃ 4টি পদ নির্ণয় করিয়া তবে উত্তর স্থির করিবে।]

উদা. 6. Find the sum of all the multiples of 13 between 750 and 1000. [C. U. '35]

[750 ও 1000এর মধ্যবর্তী 13-র গুণিতকগুলির যোগফল নির্ণয় কর।]

13-এর গুণিতকগুলি একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে এবং উহার সাধারণ অন্তর=13. এখন, 750এর ঠিক পরবর্তী যে সংখ্যা 13-এর গুণিতক বা 13 দ্বারা বিভাজ্য তাহাই ঐ শ্রেণীর প্রথম পদ হইবে এবং 1000-এর ঠিক পূর্ববর্তী যে সংখ্যা 13-এর গুণিতক তাহাই ঐ শ্রেণীর শেষ পদ হইবে।

```
13 ) 750 ( 57                    13 ) 1000 ( 76
     65                                91
     ---                               ---
     100                                90
      91                                78
     ---                               ---
       9     13-9=4.                    12
```

$\therefore$ $750+4=754$ প্রথম পদ। $\therefore$ $1000-12=988$ শেষ পদ

মনে কর, পদ সংখ্যা$=n$. $\therefore$ n-তম পদ $a+(n-1)b=988$,

বা, $754+(n-1)\times 13=988$, বা, $13(n-1)=988-754=234$,

বা, $n-1=18$. $\therefore$ $n=19$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি$=\frac{19}{2}(754+988)=\frac{19}{2}\times 1742=16549$.

উদা. 7. Find, *without assuming any formula* (কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া), the sum of $1+3+5+\cdots\cdots$to 40 terms.

[C. U. '21]

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অন্তর $b=3-1=2$ এবং $t_1=a=1$,
$t_2=a+1.b=1+1.2=3$, $t_3=a+2.b=1+2.2=5$,

$\therefore$ স্পষ্টত: $t_{40}=a+39b=1+39.2=79$; মনে কর, যোগফলটি$=s$.

এক্ষণে $s=1+3+5+\cdots\cdots+75+77+79$

এবং $s=79+77+75+\cdots\cdots+5+3+1$ (উল্টাইয়া লিখিলে)

$\therefore$ $2s=80+80+80+\cdots\cdots 40$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত$=80\times 40$,

$\therefore$ $s=\frac{80\times 40}{2}=1600$.

উদা. 8. Find, without assuming any formula, the sum of the first n terms of the series $1+3+5+7+\cdots\cdots$

[কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া $1+3+5+7+\cdots$শ্রেণীটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।]

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অন্তর $b=3-1=2$ এবং $t_1=1$,
$t_2=1+1.2=3$, $t_3=1+2.2=5$, $t_4=1+3.2=7$,

অনুরূপে $t_n=1+(n-1).2=2n-1$.

এক্ষণে, $s=1+3+5+\cdots+(2n-5)+(2n-3)+(2n-1)$

আবার, $s=(2n-1)+(2n-3)+(2n-5)+\cdots+5+3+1$

যোগ করিয়া $2s=2n+2n+2n+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত$=2n\times n=2n^2$,

$\therefore$ $s=n^2$.

উদা. 9. Find the sum of the series $39+37+35+\cdots+3$, without assuming the formula of summation of a series in A.P.

[সমান্তর শ্রেণীর যোগফলের সূত্রটির সাহায্য না লইয়া $39+37+35+\cdots+3$ শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় কর।]

এস্থলে ১ম পদ $a=39$, সা. অন্তর $b=37-39=-2$. মনে কর, পদসংখ্যা $=n$.

$\therefore\ a+(n-1)b=3$, বা, $39+(n-1)\times(-2)=3$,

বা, $-2(n-1)=-36$, বা, $n-1=18$, $\therefore\ n=19$.

$\therefore\ s=39+37+35+\cdots\cdots+7+5+3$

আবার $s=3+5+7+\cdots\cdots+35+37+39$

$\therefore\ 2s=42+42+42+\cdots\cdots 19$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত [$\because\ n=19$]

$=42\times19$, $\therefore\ s=\frac{42\times19}{2}=399$.

[দ্রষ্টব্য : এস্থলে কেবল যোগের সূত্রটি প্রয়োগ করা নিষিদ্ধ, সেইজন্য পদসংখ্যা নির্ণয়ের জন্য উহার সূত্র ব্যবহার করা হইয়াছে ; কিন্তু উদা. 7 ও উদা. 8এ যে কোন সূত্র প্রয়োগ করা নিষিদ্ধ বলিয়া পদসংখ্যা নির্ণয়ের সূত্রও ব্যবহার করা হয় নাই। ইহা লক্ষ্য কর।]

উদা. 10. Find the sum of $3+4+8+9+13+14+18+19+\cdots$ to 20 terms. [C. U. 1881]

এস্থলে দুইটি সমান্তর শ্রেণী মিশাইয়া আছে। যথা, $(3+8+13+\cdots)$ এবং $(4+9+14+\cdots)$, সুতরাং প্রত্যেক শ্রেণীতে পদসংখ্যা $=10$.

$\therefore\ s=(3+8+13+\cdots\text{to }10\text{ terms})+(4+9+14+\cdots\text{to }10\text{ terms})$

$=\frac{10}{2}\{6+9\times5\}+\frac{10}{2}\{8+9\times5\}=5\times51+5\times53=520.$

উদা. 11. How many terms of the series $3+5+7+\cdots$ must be taken in order that the sum may be equal to 624 ? [C. U. '39 Sup.]

[$3+5+7+\cdots$শ্রেণীর কতগুলি পদের সমষ্টি 624 হইতে পারে ?]

মনে কর, n-সংখ্যক পদের সমষ্টি 624. এখানে $a=3$, $b=5-3=2$.

$\because\ \frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}=s$, $\therefore\ \frac{n}{2}\{2\times3+(n-1)\times2\}=624$,

বা, $\frac{n}{2}(2n+4)=624$, বা, $n^2+2n=624$,

বা, $n^2+2n-624=0$, বা, $(n+26)(n-24)=0$, $\therefore\ n=-26$ বা 24.

$\because$ পদসংখ্যা ঋণ-রাশি হইতে পারে না, $\therefore\ -26$ গ্রহণযোগ্য নহে।

$\therefore$ নির্ণেয় পদসংখ্যা $=24$ (উত্তর)।

[**দ্রষ্টব্য :** $S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}$ এই সূত্রের a, b, n ও S এই চারিটি রাশির যে কোন তিনটি জানা থাকিলে ঐ সূত্র-সাহায্যে অবশিষ্ট রাশিটি নির্ণয় করা যায়।]

উদা. 12. **Find the number of terms of the series 17, 5, −7,······whose sum is −78.** [D. B. '31]

[17, 5, −7,···শ্রেণীর কতগুলি পদের সমষ্টি −78 ?]

মনে কর, শ্রেণীটির n-সংখ্যক পদের সমষ্টি −78 ; এস্থলে প্রথম পদ $a=17$, সাধারণ অন্তর $b=5-17=-12$.

$\because \frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}=s, \quad \therefore \frac{n}{2}\{34+(n-1)\times(-12)\}=-78,$

বা, $\frac{n}{2}(46-12n)=-78$, বা, $23n-6n^2+78=0$,

বা, $6n^2-23n-78=0$, বা, $(6n+13)(n-6)=0$, $\therefore n=-\frac{13}{6}$ বা 6.

$\because$ পদসংখ্যা ভগ্নাংশ বা ঋণসংখ্যা হয় না, $\therefore$ নির্ণেয় পদসংখ্যা $=6$.

উদা. 13. The first term of an A. P. is 9 and the last term is 96. If the sum be 1575, find the common difference. [D. B. '32]

[একটি সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 9 ও শেষপদ 96 এবং পদগুলির সমষ্টি 1575 ; উহার সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।]

$\because S=\frac{n}{2}(a+l), \therefore \frac{n}{2}(9+96)=1575$, বা, $\frac{n}{2}=\frac{1575}{105}=15, \therefore n=30$.

এখানে শেষ বা n-তম পদ $=96, \therefore a+(n-1)b=96$ (b সাধারণ অন্তর),

বা, $9+29b=96$, বা, $29b=87$, $\therefore b=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ অন্তর $=3$.

উদা. 14. **The sum of n terms of the series $10+8+6+\cdots$ is 28, find n and explain the double answer.**

[$10+8+6+\cdots$শ্রেণীর n সংখ্যক পদের সমষ্টি 28 ; nএর মান নির্ণয় কর এবং দুইটি উত্তর হওয়ার কারণ দেখাও।]

এখানে প্রথম পদ $a=10$, সাধারণ অন্তর $b=8-10=-2$.

$\because \frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}=s, \quad \therefore \frac{n}{2}\{20+(n-1)\times-2\}=28,$

বা, $11n-n^2-28=0$, বা, $n^2-11n+28=0$, বা, $(n-4)(n-7)=0$,

$\therefore n=4$ বা 7. এস্থলে দুইটি উত্তরই সম্ভব হইবে ; কারণ, শ্রেণীটির ৫ম হইতে ৭ম এই 3টি পদের সমষ্টি শূন্য। শ্রেণীটির 7টি পদ $=10, 8, 6, 4, 2, 0, -2$, সুতরাং ইহার 4টি পদের সমষ্টি ও 7টি পদের সমষ্টি সমান।

উদা. 15. Show that the sum of n terms of the series 4, 12, 20, 28,···is the square of an even number. [C.U.'27, '39]

[দেখাও যে, 4, 12, 20, 28,···শ্রেণীটির n পদের সমষ্টি একটি যুগ্ম (জোড়) সংখ্যার বর্গ।]

এস্থলে প্রথম পদ $a=4$, সাধারণ অন্তর $b=12-4=8$.

$\therefore \quad S_n=\frac{n}{2}\{2.4+(n-1)\times 8\}=\frac{n}{2}(8+8n-8)=4n^2=(2n)^2$.

$\because$ n-এর মান যে-কোন অখণ্ড যুগ্ম বা অযুগ্ম সংখ্যা হউক না কেন $2n$এর মান সর্বদাই যুগ্ম সংখ্যা হইবে, $\therefore$ $(2n)^2$ একটি যুগ্ম সংখ্যার বর্গ।

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণীর n পদের যোগফল একটি যুগ্ম সংখ্যার বর্গ হইল।

উদা. 16. The sum of n terms of an A. P. is 40, the common difference is 2, and the last term is 13. Find n.

[C. U. '46 ; Pat. U. '18]

[একটি সমান্তর শ্রেণীর n পদের যোগফল 40, উহার সাধারণ অন্তর 2 এবং শেষপদ 13 ; n নির্ণয় কর।]

এখানে n-তম পদই শেষ পদ।

$\therefore \quad a+(n-1)b=13$, বা, $a+(n-1)\times 2=13$,

$\therefore \quad a=13-2n+2=15-2n$.

আবার, $\because \quad \frac{n}{2}(a+l)=S$,

$\therefore \quad \frac{n}{2}(15-2n+13)=40$ [a, l, Sএর মান বসাইয়া],

বা, $-n^2+14n-40=0$, বা, $n^2-14n+40=0$,

বা, $(n-4)(n-10)=0$, $\therefore \quad n=4$, বা, 10.

[দ্রষ্টব্য : $\because$ শেষপদ 13 এবং সাধারণ অন্তর 2, $\therefore$ পদসংখ্যা $n=4$ হইলে, প্রথম পদ হইবে 7 ; আর $n=10$ হইলে, প্রথম পদ হইবে -5 এবং তখন প্রথম ছয়টি পদের সমষ্টি শূন্য হইবে। $\therefore$ দুইটি উত্তরই সম্ভব।]

উদা. 17. Find the sum of 21 consecutive odd numbers of which the last term is 51.

[পর পর 21টি অযুগ্ম পদের শেষ পদ 51 হইলে উহাদের সমষ্টি কত ?]

এখানে শ্রেণীটির শেষ পদ 51 এবং সাধারণ অন্তর 2, সুতরাং শ্রেণীটি উল্টাইয়া লিখিলে $51+49+47+\cdots$এই শ্রেণী হইবে। ইহার সাধারণ অন্তর -2 এবং পদসংখ্যা $n=21$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $=\frac{21}{2}\{2\times 51+(21-1)\times -2\}$

$=\frac{21}{2}(102-40)=\frac{21}{2}\times 62=651$.

উদা. 18. If the 18th term of an A. P. is 39, find the sum of 35 terms of the series.

মনে কর, প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b.

$\therefore\ t_{18}=a+(18-1)b=a+17b.\ \therefore\ a+17b=39$ (স্বীকার) ;

এক্ষণে, $S_{35}=\frac{35}{2}\{2a+(35-1)b\}=\frac{35}{2}\{2a+34b\}$

$=35(a+17b)=35\times39=1365.$

উদা. 19. The sum of 10 terms of an A. P. is 120 and the sum of 15 terms is 255 ; find the sum of n terms.

[একটি সমান্তর শ্রেণীর 10টি পদের সমষ্টি 120 এবং 15টি পদের সমষ্টি 255, উহার n-পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।]

মনে কর, প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b.

$\because\ S_{10}=120,\ \therefore\ \frac{10}{2}\{2a+(10-1)b\}=120,$

বা, $5(2a+9b)=120,\ \therefore\ 2a+9b=24\cdots(1)$

আবার, $\because S_{15}=255,\ \therefore \frac{15}{2}(2a+14b)=255,$ বা $2a+14b=34\cdots(2)$

এখন (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই $a=3,\ b=2.$

$\therefore\ S_n=\frac{n}{2}\{2.3+(n-1)\times2\}=\frac{n}{2}(2n+4)=n(n+2).$

উদা. 20. A class consists of a number of boys whose ages are in A. P., the common difference being four months. If the youngest boy is just 8 years old, and if the sum of the ages is 168 years, find the number of boys in the class.

[C. F. A. 1872]

[কোন শ্রেণীর বালকদের বয়সগুলি একটি সমান্তর শ্রেণী যাহার সাধারণ অন্তর 4 মাস। সর্বকনিষ্ঠ বালকটির বয়স 8 বৎসর এবং বয়সগুলির সমষ্টি 168 বৎসর হইলে বালকদের সংখ্যা নির্ণয় কর।]

মনে কর, বালকদের সংখ্যা n. এখানে প্রথম পদ 8 বৎসর এবং সাধারণ অন্তর $=4$ মাস $=\frac{1}{3}$ বৎসর।

$\therefore\ \frac{n}{2}\{2\times8+(n-1)\times\frac{1}{3}\}=168,$ বা, $\frac{n}{2}(16+\frac{n-1}{3})=168,$

বা, $\frac{n}{2}\times\frac{n+47}{3}=168,$ বা, $n^2+47n=1008,$

বা, $n^2+47n-1008=0,$ বা, $(n-16)(n+63)=0,$

$\therefore\ n=16,$ বা, $-63.$

$\because$ বালকের সংখ্যা ঋণাত্মক হইতে পারে না,

$\therefore$ নির্ণেয় বালক-সংখ্যা $=16.$

উদা. 21. In boring a well 200 ft. deep the cost is Re. 1. 2as. for the first foot and an additional anna for each subsequent foot. What is the cost of boring the well ? [C. U. 1934]

[একটি 200 ফুট গভীর কূপ খনন করিতে প্রথম এক ফুটের জন্য খরচ হয় 1 টাকা 2 আনা এবং পরবর্তী প্রত্যেক ফুটের জন্য এক আনা করিয়া অতিরিক্ত খরচ লাগে। ঐ কূপ খননে মোট কত ব্যয় হইবে ?]

প্রদত্ত সর্ত হইতে $a=18$ আনা, $b=1$ আনা এবং $n=200$.

$\therefore$ নির্ণেয় খরচ (অর্থাৎ S) $=\frac{200}{2}\{2.18+(200-1)\times 1\}$ আনা

$=100\times 235$ আনা $=23500$ আনা $=1468$ টাকা 12 আনা।

উদা. 22. Two travellers start together on the same road. One of them travels uniformly 10 miles a day. The other travels 8 miles the first day and increases his pace by half a mile a day each succeeding day. After how many days will the latter overtake the former ? [Pat. U. '20]

[দুই ব্যক্তি একই পথে একসঙ্গে যাত্রা আরম্ভ করিল। একজন প্রত্যহ 10 মাইল করিয়া সমভাবে যাইতে লাগিল। অপর ব্যক্তি প্রথম দিন 8 মাইল গিয়া পরে প্রতিদিন পূর্ব দিন অপেক্ষা অর্ধ মাইল করিয়া বেশী যাইতে লাগিল। দ্বিতীয় ব্যক্তি কত দিন পরে প্রথম ব্যক্তিকে ধরিবে ?]

মনে কর, নির্ণেয় দিনসংখ্যা $=n$. এই n দিনে দুই ব্যক্তিই সমান পথ যাইবে। প্রথম ব্যক্তি প্রত্যহ 10 মাইল করিয়া যায়,

$\therefore$ সে n দিনে যায় $10n$ মাইল$\cdots\cdots(1)$.

আর দ্বিতীয় ব্যক্তি ১ম দিন 8 মাইল, ২য় দিন $8\frac{1}{2}$ মা., ৩য় দিন 9 মাইল এই হিসাবে যায়। এক্ষেত্রে প্রথম পদ $a=8$, সাধারণ অন্তর $b=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ সে n দিনে যায় $\frac{n}{2}\{2.8+(n-1)\times\frac{1}{2}\}$ মা., বা, $\frac{n}{2}(\frac{31+n}{2})$ মা.$\cdots(2)$

এখন (1) ও (2) হইতে পাই, $\frac{n}{2}(\frac{31+n}{2})=10n$.

বা, $\frac{31+n}{2}=20$ [$\frac{n}{2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া], বা, $31+n=40$,

$\therefore$ $n=9$, $\therefore$ নির্ণেয় সময় $=9$ দিন।

13. স্বাভাবিক সংখ্যা সম্বন্ধীয় যোগফল

1, 2, 3, 4,$\cdots\cdots$ প্রভৃতি সংখ্যাগুলিকে স্বাভাবিক সংখ্যা (natural numbers) বলে। First n natural numbers বলিলে $1, 2, 3,\cdots, n$ এইগুলি বুঝাইবে।

I. Find the sum of the first n natural numbers.

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অন্তর $b=1$ এবং পদ-সংখ্যা $=n$.

$\therefore\ S=1+2+3+\cdots+n=\frac{n}{2}(1+n)=\frac{n(n+1)}{2}$. [ইহা মুখস্থ রাখিও]

II. Find the sum of the squares of the first n natural numbers. [C. U. '15 ; D. B. '32, '34, '45 ; G. U. '51]

মনে কর, যোগফল s, সুতরাং $s=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$.

এক্ষণে, $n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$ [Identically, অর্থাৎ nএর মান যাহাই হউক না কেন, উভয়পক্ষ সর্বদা সমান]

এখন ঐ অভেদে nএর স্থলে পর পর 1, 2, 3,⋯⋯, n পর্যন্ত লিখিয়া পাই

$$1^3-0^3=3.1^2-3.1+1$$
$$2^3-1^3=3.2^2-3.2+1$$
$$3^3-2^3=3.3^2-3.3+1$$

$$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$$

(যোগ করিয়া) $n^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-3(1+2+3+\cdots+n)+n,$

বা, $n^3=3s-\frac{3n(n+1)}{2}+n,$

বা, $3s=n^3+\frac{3n(n+1)}{2}-n=\frac{2n^3+3n(n+1)-2n}{2}$

$$=\frac{n(2n^2+3n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$\therefore\ s=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ [ইহা মুখস্থ রাখিবে।]

[**দ্রষ্টব্য :** যোগ করিবার সময় বামপক্ষের সব পদ কাটিয়া গিয়া কেবল n^3 অবশিষ্ট আছে। ডান পক্ষে 3কে common লইয়া রাখা হইয়াছে। $1+1+1+\cdots$to n terms যোগ করিয়া যোগফল n হয়; কারণ, 5টি 1 যোগ করিয়া 5 হয়, সুতরাং n সংখ্যক এক যোগ করিয়া n হইল।]

III. Find the sum of the cubes of the first n natural numbers. [C. U. '18]

মনে কর, যোগফল s, সুতরাং $s=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$.

n-এর মান যাহাই হউক না কেন,

$n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1$ [অভেদে সমান]

এক্ষণে, n-এর স্থানে পর পর 1, 2, 3,⋯, n পর্যন্ত বসাইয়া পাই

$$1^4-0^4=4.1^3-6.1^2+4.1-1$$
$$2^4-1^4=4.2^3-6.2^2+4.2-1$$
$$3^4-2^4=4.3^3-6.3^2+4.3-1$$

$$n^4-(n-1)^4=4.n^3-6.n^2+4.n-1$$

(যোগ করিয়া) $n^4=4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)$

$-6(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+4(1+2+3+\cdots+n)-n,$

বা, $n^4=4s-\dfrac{6n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{4n(n+1)}{2}-n$

$\therefore$ $4s=n^4+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)+n$

$=n^4+n+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)$

$=n(n+1)(n^2-n+1)+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)$

$=n(n+1)(n^2-n+1+2n+1-2)$

$=n(n+1)(n^2+n)=n(n+1)n(n+1)=n^2(n+1)^2,$

$\therefore$ $s=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$

[দ্রষ্টব্য : I ও III লক্ষ্য করিয়া দেখ, III-এর যোগফল I-এর যোগফলের বর্গ। সুতরাং ইহা মনে রাখা সহজ। $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.]

এই সূত্রগুলির প্রয়োগে বিবিধ সমান্তর শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় করা যাইবে। নিম্নের উদাহরণগুলি দেখ।

উদাহরণমালা 5

উদা 1. Sum to n terms the series whose nth term is $n(n-1)$.

মনে কর, সমষ্টি s. এখানে $t_n=n(n-1)=n^2-n$.

এক্ষণে, $n=1, 2, 3,\cdots\cdots$ n পর্যন্ত লিখিয়া পাই

$$t_1=1^2-1$$
$$t_2=2^2-2$$
$$t_3=3^2-3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=n^2-n$$

(যোগ করিয়া) $s=(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-(1+2+3+\cdots+n)$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n-2)}{6}=\frac{2n(n+1)(n-1)}{6}=\frac{n(n^2-1)}{3}.$$

দ্রষ্টব্য : যোগে বাম পক্ষের $t_1+t_2+\cdots+t_n=s$ লেখা হইল।]

উদা. 2. Sum to n terms $1.2+2.3+3.4+\cdots$

[C. U. '12, '17, '39 Sup., '44, '51 ; D. B. '26, '33, '41, '44]

এস্থলে প্রত্যেক পদের ন্যায় n-তম পদটিও দুইটি উৎপাদক লইয়া গঠিত। প্রদত্ত শ্রেণীর পদগুলির প্রথম উৎপাদকগুলি 1, 2, 3,$\cdots$ এইভাবে হইয়াছে এবং দ্বিতীয় উৎপাদকগুলি 2, 3, 4, $\cdots$এইভাবে হইয়াছে।

$\therefore$ ইহার $t_n=(1, 2, 3,\cdots$এর n-তম পদ$)\times(2, 3, 4,\cdots$এর n-তম পদ$)$

$=n.(n+1)=n^2+n.$ এক্ষণে, $n=1, 2, 3,\cdots, n$ বসাইয়া পাই

$$t_1=1^2+1$$
$$t_2=2^2+2$$
$$t_3=3^2+3$$
$$t_n=n^2+n$$

(যোগফল) $s=(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+(1+2+3+\cdots+n)$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+4)}{6}=\frac{2n(n+1)(n+2)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

[দ্রষ্টব্য : এরূপ স্থলে প্রথমে n-তম পদ নির্ণয় করিয়া n-এর স্থানে, 1, 2, 3,$\cdots$প্রভৃতি লিখিয়া যোগফল নির্ণয় করিতে হয়। অঙ্ক দেখিয়া n-তম পদ নির্ণয়ের উপায় স্থির করিতে হয়। প্রত্যেক পদে দুই বা তিনটি উৎপাদক থাকিলে উপরে প্রদর্শিত প্রণালী অবলম্বন করিবে।]

উদা. 3. Sum the series $1^2+3^2+5^2+\cdots$ to n terms.

[C. U. '50]

এস্থলে $t_n=1, 3, 5, \cdots$ এই শ্রেণীর n-তম পদের বর্গ

$$=\{1+(n-1)\times 2\}^2=(2n-1)^2=4n^2-4n+1.$$

এক্ষণে, $n=1, 2, 3, \cdots, n$ বসাইয়া পাই

$$t_1=4.1^2-4.1+1$$
$$t_2=4.2^2-4.2+1$$
$$t_3=4.3^2-4.3+1$$

$$t_n=4.n^2-4.n+1$$

(যোগ করিয়া) $s=4(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-4(1+2+\cdots+n)+n$

$$=\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)}{2}+n$$

$$=\frac{2n(n+1)(2n+1)-6n(n+1)+3n}{3}=\frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

উদা. 4. Sum to n terms $2^2+5^2+8^2+\cdots\cdots$ [D. B. '35]

এস্থলে $t_n=2+5+8+\cdots\cdots$ এই শ্রেণীর n-তম পদের বর্গ

$$=\{2+(n-1)\times 3\}^2=(3n-1)^2=9n^2-6n+1.$$

এক্ষণে, $n=1, 2, 3, \cdots, n$ লিখিয়া পাই

$$t_1=9.1^2-6.1+1$$
$$t_2=9.2^2-6.2+1$$
$$t_3=9.3^2-6.3+1$$

$$t_n=9.n^2-6.n+1$$

(যোগ) $\therefore\ s=9(1^2+2^2+\cdots+n^2)-6(1+2+\cdots+n)+n$

$$=\frac{9n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{6n(n+1)}{2}+n$$

$$=\frac{3n(n+1)(2n+1)-6n(n+1)+2n}{2}=\frac{n(6n^2+3n-1)}{2}.$$

উদা. 5. Sum to n terms $1+4+8+13+19+26+\cdots$

মনে কর, যোগফল s এবং n-তম পদ t_n.

অতএব, $s=1+4+8+13+19+26+\cdots+t_n$

আবার, $s=\quad 1+4+8+13+19+\cdots+t_{n-1}+t_n$

[এক পদ সরাইয়া লিখিয়া]

(বিয়োগ করিয়া) $0=1+3+4+5+6+7+\cdots+(t_n-t_{n-1})-t_n$

$\therefore \quad t_n = 1+3+4+5+6+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত [পক্ষান্তর করিয়া]

$= 1+\{3+4+5+6+\cdots(n-1)$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত$\}$

$$= 1+\frac{n-1}{2}\{6+(n-2)\times 1\} = \frac{n^2+3n-2}{2} = \tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{3}{2}n-1.$$

এখন $n=1, 2, 3, \cdots, n$ বসাইয়া পাই

$$t_1 = \tfrac{1}{2}.1^2+\tfrac{3}{2}.1-1$$
$$t_2 = \tfrac{1}{2}.2^2+\tfrac{3}{2}.2-1$$
$$t_3 = \tfrac{1}{2}.3^2+\tfrac{3}{2}.3-1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n = \tfrac{1}{2}.n^2+\tfrac{3}{2}.n-1$$

(যোগ করিয়া) $s = \tfrac{1}{2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)+\tfrac{3}{2}(1+2+\cdots+n)-n$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{3n(n+1)}{4}-n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)+9n(n+1)-12n}{12}$$

$$= \frac{2n(n^2+6n-1)}{12} = \frac{n(n^2+6n-1)}{6}.$$

[**দ্রষ্টব্য :** এস্থলে দেখ, অন্য প্রণালীতে t_n স্থির করিতে হইল। এখানে দেখা গেল যে পর পর পদগুলির অন্তরফলগুলি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে। তাই এক পদ করিয়া সরাইয়া লিখিয়া বিয়োগ করিয়া t_n নির্ণয় করা হইল। এখানে আরও দেখ t_n যে শ্রেণীর সমান তাহার প্রথম পদটি অর্থাৎ 1টি বাদে বাকী পদগুলি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত বলিয়া বাকী পদগুলির সংখ্যা n অপেক্ষা 1 কম অর্থাৎ $n-1$ ধরা হইল ; কারণ, একটি পদ (অর্থাৎ 1) বাদ গিয়াছে।]

উদা. 6. Sum to n terms the series $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots$

এস্থলে $t_n = (1, 2, 3, \ldots$এর n-তম পদ$) \times (2, 3, 4, \cdots$এর n-তম পদ$)$ $\times (3, 4, 5, \cdots$এর n-তম পদ$) = n(n+1)(n+2) = n^3+3n^2+2n.$

এক্ষণে, $n=1, 2, 3, \cdots, n$ লিখিয়া পাই

$$t_1 = 1^3+3.1^2+2.1$$
$$t_2 = 2^3+3.2^2+2.2$$
$$t_3 = 3^3+3.3^2+2.3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n = n^3+3.n^2+2.n$$

(যোগ) $\therefore \quad s = (1^3+2^3+\cdots+n^3)+3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+2(1+2+\cdots+n)$

$$= \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+\frac{3n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{2n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}+n(n+1)$$

$$=n(n+1)\left\{\frac{n(n+1)}{4}+\frac{2n+1}{2}+1\right\}=n(n+1)\left\{\frac{n^2+5n+6}{4}\right\}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

উদা. 7. Sum to n terms the series $1.3^2+2.4^2+3.5^2+\cdots$

এস্থলে $t_n=(1,2,3,\cdots$এর n-তম পদ$)\times(3,4,5,\cdots$এর n-তম পদের বর্গ$)$

$$=n\times(n+2)^2=n^3+4n^2+4n.$$

এস্থলে, $n=1, 2, 3,\cdots, n$ বসাইয়া পাই

$$t_1=1^3+4.1^2+4.1$$
$$t_2=2^3+4.2^2+4.2$$
$$t_3=3^3+4.3^2+4.3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=n^3+4.n^2+4.n$$

$$\therefore\quad s=(1^3+2^3+\cdots+n^3)+4(1^2+2^2+\cdots+n^2)+4(1+2+\cdots+n)$$

$$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{4n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}+2n(n+1)$$

$$=n(n+1)\left\{\frac{n(n+1)}{4}+\frac{2(2n+1)}{3}+2\right\}=\frac{n}{12}(n+1)(3n^2+19n+32).$$

উদা. 8. Sum to n terms $(1)+(1+2)+(1+2+3)+\cdots$

এখানে $t_n=(1+2+3+\cdots+n)=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n.$

এক্ষণে, $n=1, 2, 3,\cdots, n$ লিখিয়া পাই

$$t_1=\tfrac{1}{2}.1^2+\tfrac{1}{2}.1$$
$$t_2=\tfrac{1}{2}.2^2+\tfrac{1}{2}.2$$
$$t_3=\tfrac{1}{2}.3^2+\tfrac{1}{2}.3$$
$$t_n=\tfrac{1}{2}.n^2+\tfrac{1}{2}.n$$

(যোগ) $s=\frac{1}{2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)+\frac{1}{2}(1+2+\cdots+n)$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n(n+1)}{4}=n(n+1)\left(\frac{2n+1}{12}+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

উদা. 9. Sum to n terms $(1)+(2+3)+(4+5+6)+\cdots$

এস্থলে বন্ধনীগুলি তুলিয়া দিলে 1, 2, 3 প্রভৃতি স্বাভাবিক সংখ্যাগুলি পাওয়া যায়। এখন দেখিতে হইবে যে n-সংখ্যক বন্ধনী তুলিয়া দিলে মোট কতগুলি পদ হইবে। এখানে দেখা যায় যে, প্রথম বন্ধনীর ভিতর পদসংখ্যা 1, দ্বিতীয় বন্ধনীতে পদসংখ্যা 2, তৃতীয় বন্ধনীতে 3, সুতরাং সব বন্ধনীগুলি তুলিয়া দিলে মোট পদসংখ্যা হইবে $(1+2+3+\cdots\cdots+n)$ অর্থাৎ $\frac{n(n+1)}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=1+2+3+\ldots\ \frac{n(n+1)}{2}$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}$ [$\because$ $S_n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$,

$\therefore$ এখানে n-এর স্থানে $\frac{n(n+1)}{2}$ বসান হইল।]

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}+1\right\}=\frac{n(n+1)}{4}\times\frac{n^2+n+2}{2}$

$=\frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{8}$.

উদা. 10. Sum $1-2+3-4+5-6+\cdots$ to n terms.

(i) যদি n কোন যুগ্ম বা জোড় সংখ্যা হয়, তবে

প্রদত্ত রাশি $=(1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots\frac{n}{2}$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=(-1)+(-1)+(-1)+\cdots\cdots\frac{n}{2}$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=-1\times\frac{n}{2}=-\frac{n}{2}$.

(ii) যদি n কোন বিজোড় সংখ্যা হয়, তবে

প্রদত্ত রাশি $=1+\{(-2+3)+(-4+5)+(-6+7)+\cdots\cdots\frac{n-1}{2}$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত $\}$*

$=1+\{1+1+1+\cdots\cdots\frac{n-1}{2}$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত $\}$

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=1+1\times\frac{n-1}{2}=1+\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}$.

[*এখানে পদসংখ্যা বিজোড় বলিয়া প্রথম পদকে ছাড়িয়া বাকী পদসংখ্যা $n-1$ জোড় হইবে। এখন দুইটি করিয়া পদ এক একটি বন্ধনীভুক্ত করায় মোট $\frac{n-1}{2}$ সংখ্যক বন্ধনী বা পদ হইল।]

উদা. 11. Sum to n terms $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\cdots$

এস্থলে $t_n=\frac{1}{(1,2,3,\cdots \text{এর } n\text{-তম পদ})\times(2,3,4,\cdots \text{এর } n\text{-তম পদ})}=\frac{1}{n(n+1)}$.

$$\text{এক্ষণে, } t_1=\frac{1}{1.2}=1-\frac{1}{2}$$

$$t_2=\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$t_3=\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$(\text{যোগ করিয়া})\ s=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

উদা. 12. Sum to n terms $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots\cdots$

[W. B. S. F. '53]

এস্থলে $t_n=\frac{1}{(1,3,5,\cdots \text{এর } n\text{-তম পদ})(3,5,7,\cdots \text{এর } n\text{-তম পদ})}$

$=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

$$\text{এক্ষণে, } t_1=\frac{1}{1.3}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$t_2=\frac{1}{3.5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$

$$t_3=\frac{1}{5.7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$(\text{যোগ করিয়া})\ s=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{2n+1-1}{2n+1}=\frac{n}{2n+1}.$$

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. $\therefore$ $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})=\frac{1}{3}=\frac{1}{1.3}$ এইভাবে ধরা যায়। প্রদত্ত রাশির অসীম পদের যোগফল$=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$; t_1, t_2, t_3

প্রভৃতি অসীম পদ পর্যন্ত লিখিয়া যোগ করিলে যোগফল মাত্র $\frac{1}{2}\times(1)$ হইবে, অন্য সব ভগ্নাংশগুলি কাটিয়া যাইবে।]

উদা. 13. Find the sum to n terms of the series
$(3^3-2^3)+(5^3-4^3)+(7^3-6^3)+\cdots$ [H. S. '67]

এখানে $t_n=(3, 5, 7, \cdots$এর $t_n)^3-(2, 4, 6, \cdots$এর $t_n)^3$

$$=\{3+(n-1)2\}^3-\{2+(n-1).2\}^3=(2n+1)^3-(2n)^3$$
$$=12n^2+6n+1.$$

এক্ষণে, $n=1, 2, 3, \cdots, n$ ধরিয়া পাই

$$t_1=12.1^2+6.1+1$$
$$t_2=12.2^2+6.2+1$$
$$t_3=12.3^2+6.3+1$$
$$t_n=12.n^2+6.n+1$$

(যোগ) $\therefore s=12(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+6(1+2+3+\cdots+n)+n$

$$=12\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+6\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$
$$=n(4n^2+9n+6).$$

উদা. 14. Find the sum of all the integers which are perfect squares between 90 and 890. [S. F. '57 (Addl.)]

8'90'|29

49|490
|441
49

90এর পরবর্তী ক্ষুদ্রতম বর্গরাশি $=100=10^2$

এবং 890এর ঠিক পূর্ববর্তী বৃহত্তম বর্গরাশি $=29^2$.

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=10^2+11^2+12^2+\cdots+29^2$

$$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+29^2)-(1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2)$$
$$=\frac{29(29+1)(2\times29+1)}{6}-\frac{9(9+1)(2\times9+1)}{6}$$
$$=8555-285=8270.$$

বিবিধ উদাহরণমালা 6

উদা. 1. The sum of 3 numbers in A. P. is 27 and their product is 693 ; find the numbers.

মনে কর, সংখ্যাগুলি $a-b, a, a+b$.

প্রদত্ত শর্ত হইতে পাই $a-b+a+a+b=27\cdots(1)$

এবং $(a-b).a.(a+b)=693\cdots(2)$

একণে (1) হইতে $3a=27$, $\therefore$ $a=9$.

(2) হইতে $a(a^2-b^2)=693$, বা, $9(81-b^2)=693$,

বা, $81-b^2=77$, বা, $b^2=4$, $\therefore$ $b=\pm 2$.

অতএব, $b=2$ ধরিয়া পদগুলি হইবে $(9-2)$, 9 ও $(9+2)$ অর্থাৎ 7, 9, 11 ;
এবং $b=-2$ ধরিয়া পদগুলি হইবে $9-(-2)$, 9, $9-2$ অর্থাৎ 11, 9, 7.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাত্রয় $=7$, 9 ও 11 ; অথবা 11, 9 ও 7.

উদা. 2. Four numbers are in A. P. The sum of the extremes is 10, and the product of the means is 24. Find the numbers. [C. U. '43]

[চারিটি সংখ্যা সমান্তর শ্রেণীতে আছে। প্রান্তীয় সংখ্যা দুইটির সমষ্টি 10 এবং মধ্যপদদ্বয়ের গুণফল 24 ; সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।]

মনে কর, সংখ্যাগুলি $a-3b$, $a-b$, $a+b$, $a+3b$ [সাধারণ অন্তর $2b$]

অতএব, প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই

$a-3b+a+3b=10\cdots(1)$ এবং $(a-b)(a+b)=24\cdots(2)$.

একণে, (1) হইতে $2a=10$, $\therefore$ $a=5$; (2) হইতে $a^2-b^2=24$,

বা, $25-b^2=24$, বা, $b^2=1$, $\therefore$ $b=\pm 1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাগুলি $=(5-3), (5-1), (5+1)$ ও $(5+3)$;

অথবা, $(5+3), (5+1), (5-1)$ ও $(5-3)$

$=2, 4, 6$ ও 8 ; অথবা 8, 6, 4 ও 2.

[**দ্রষ্টব্য :** (1) পদসংখ্যা যদি অযুগ্ম হয়, তবে মধ্যপদটি a এবং সাধারণ অন্তর b ধরিতে হয়। (2) পদসংখ্যা যুগ্ম হইলে মধ্যে পর পর $a-b$, $a+b$ দুইটি মধ্যপদ এবং সাধারণ অন্তর $2b$ ধরিয়া দুই পাশের পদগুলি লিখিবে।]

উদা. 3. Divide 69 into three parts which are in A. P. and such that the product of the first two is 483.

[69কে এরূপ তিন অংশে বিভক্ত কর যেন অংশগুলি সমান্তর শ্রেণীতে থাকে এবং প্রথম দুইটির গুণফল 483 হয়।]

মনে কর, অংশত্রয় যথাক্রমে $a-b$, a, $a+b$.

$\therefore$ সর্তানুসারে $a-b+a+a+b=69\cdots(1)$ এবং $(a-b)a=483\cdots(2)$.

(1) হইতে পাই $3a=69$, $\therefore$ $a=23$.

(2) হইতে পাই $(23-b)\times 23=483$ বা, $23-b=21$, $\therefore$ $b=2$.

$\therefore$ নির্ণেয় অংশত্রয় $=21, 23, 25$.

উদা. 4. If a, b, c are in A. P., show that $ab+bc=2b^2$.

$\because$ a, b, c সমান্তর শ্রেণীর পর পর 3টি পদ,

$\therefore$ $b-a=c-b$, $\therefore$ $2b=a+c$.

এক্ষণে, উভয়পক্ষকে b দ্বারা গুণ করিয়া পাই $2b^2=ab+bc$.

উদা. 5. If a, b, c are in A. P., prove that $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ are also in A. P.

$\because$ a, b, c সমান্তর শ্রেণীর পর পর 3টি পদ,

$\therefore$ $\frac{a}{abc}, \frac{b}{abc}, \frac{c}{abc}$ সমান্তর শ্রেণী হইবে,

অর্থাৎ $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

[দ্রষ্টব্য : কোন সমান্তর শ্রেণীর পদগুলির সহিত একই সংখ্যা যোগ, বিয়োগ, গুণ বা ভাগ করিলে ফলগুলিও সমান্তর শ্রেণী হইবে। এই নিয়মের সাহায্যে উদা. 5 সমাধান করা হইল। অন্য প্রণালী নিম্নে দেখ।]

উদা. 6. If a^2, b^2, c^2 be in A. P., prove that $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ are also in A. P. [C. U. '10, '38 ; D. B. '45 ; G. U. '50]

[অন্য প্রণালী] $\because$ a^2, b^2, c^2 সমান্তর শ্রেণী (স্বীকার),

$\therefore$ $b^2-a^2=c^2-b^2$.

এক্ষণে, $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ একটি সমান্তর শ্রেণী হইবে

যদি $\frac{1}{c+a}-\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a}$ হয়,

অর্থাৎ যদি $\frac{b+c-c-a}{(c+a)(b+c)}=\frac{c+a-a-b}{(a+b)(c+a)}$ হয়,

অর্থাৎ যদি $\frac{b-a}{b+c}=\frac{c-b}{a+b}$ হয়, অর্থাৎ যদি $b^2-a^2=c^2-b^2$ হয় ; কিন্তু প্রদত্ত সর্ত হইতে ইহারা সমান দেখানো হইয়াছে।

$\overline{b+c}, \overline{c+a}, \overline{a+b}$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

উদা. 7. The sum of n terms of a series in A. P. is $5n^2+7n$. Find the first two terms of the series. [C. U. '41]

[যে সমান্তর শ্রেণীর n পদের সমষ্টি $5n^2+7n$, তাহার প্রথম দুইটি পদ নির্ণয় কর।]

n-সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n দ্বারা সূচিত করা হইল।

অতএব, $S_n=5n^2+7n$; এখন, $n=1$ ও 2 বসাইয়া পাই

$S_1=5.1^2+7.1=12$ (প্রথম একটি পদের সমষ্টি);

$S_2=5.2^2+7.2=34$ (প্রথম দুইটি পদের সমষ্টি).

$\therefore \quad t_1=S_1=12$ (প্রথম একটি পদের যোগফল প্রথম পদই হয়।)

এবং $t_2=S_2-S_1=34-12=22$ (প্রথম দুইটি পদের সমষ্টি হইতে প্রথম পদ বিয়োগ করিলে দ্বিতীয় পদ পাওয়া যায়)।

$\therefore$ প্রথম দুইটি পদ $=12$ ও 22.

উদা. 8. The sum of p terms of an A. P. is q and the sum of q terms is p ; find the sum of $p+q$ terms. [C. U. '50]

[একটি সমান্তর শ্রেণীর p পদের সমষ্টি q এবং q পদের সমষ্টি p. উহার $(p+q)$ পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$, এবং সাধারণ অন্তর $=b$.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত হইতে $\frac{p}{2}\{2a+(p-1)b\}=q \cdots (1)$

এবং $\frac{q}{2}\{2a+(q-1)b\}=p \cdots (2)$

(1) হইতে পাই $2ap+p^2b-pb=2q \cdots (3)$

এবং (2) হইতে পাই $2aq+q^2b-qb=2p \cdots (4)$

(3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া পাই

$2a(p-q)+b(p^2-q^2)-b(p-q)=2(q-p)=-2(p-q).$

$\therefore \quad 2a+(p+q)b-b=-2$ [উভয়পক্ষকে $p-q$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $2a+(p+q-1)b=-2 \cdots (5)$

এক্ষণে, $p+q$ পদের সমষ্টি $=\frac{p+q}{2}\{2a+(p+q-1)b\}$ [সূত্র অনুসারে]

$=\frac{p+q}{2}\times(-2)$ [(5) হইতে] $=-(p+q)$.

উদা. 9. Show that the sum of the latter half of $2n$ terms of any series in A. P. is equal to one-third the sum of $3n$ terms of the same series. [C. U. 1876]

[প্রমাণ কর যে, যে-কোন সমান্তর শ্রেণীর $2n$ সংখ্যক পদের শেষার্ধের সমষ্টি ইহার $3n$ পদের সমষ্টির এক-তৃতীয়াংশ।]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অন্তর $=b$.

$\therefore \quad S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}\cdots(1).$

$S_{2n}=\frac{2n}{2}\{2a+(2n-1)b\}=n\{2a+(2n-1)b\}\cdots(2)$

এবং $S_{3n}=\frac{3n}{2}\{2a+(3n-1)b\}\cdots(3)$

এক্ষণে, $2n$ সংখ্যক পদের শেষার্ধের সমষ্টি $=S_{2n}-S_n$

$=n\{2a+(2n-1)b\}-\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}$

$=\frac{n}{2}\{4a+4bn-2b-2a-bn+b\}$

$=\frac{n}{2}\{2a+3bn-b\}=\frac{n}{2}\{2a+(3n-1)b\}.$

আবার $\frac{1}{3}\times S_{3n}=\frac{1}{3}\times\frac{3n}{2}\{2a+(3n-1)b\}=\frac{n}{2}\{2a+(3n-1)b\}.$

$\therefore$ প্রমাণিত হইল যে যে-কোন সমান্তর শ্রেণীর $2n$-সংখ্যক পদের শেষার্ধের সমষ্টি $=3n$ সংখ্যক পদের সমষ্টির এক-তৃতীয়াংশ।

উদা. 10. The pth term of an A. P. is a and the qth term is b. Show that the sum of the first $p+q$ terms is $\frac{p+q}{2}\{a+b+\frac{a-b}{p-q}\}$. [M. U. 1887]

[কোন সমান্তর শ্রেণীর p-তম পদ a এবং q-তম পদ b. প্রমাণ কর যে উহার প্রথম $p+q$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $\frac{p+q}{2}\left(a+b+\frac{a-b}{p-q}\right)$ হইবে।]

মনে কর, প্রথম পদ $=f$ এবং সাধারণ অন্তর $=d$.

$\therefore \quad f+(p-1)d=a\cdots(1)$

এবং $f+(q-1)d=b\cdots(2)$

$\therefore$ (বিয়োগ করিয়া) $d(p-q)=a-b, \qquad d=\frac{a-b}{p-q}.$

আবার, $(1)+(2)$ করিয়া $a+b=2f+(p+q-2)d.$

$\therefore \quad p+q$ পদের সমষ্টি $=\frac{p+q}{2}\{2f+(p+q-1)d\}$

$=\frac{p+q}{2}\{2f+(p+q-2)d+d\}=\frac{p+q}{2}\left\{a+b+\frac{a-b}{p-q}\right\}.$

[**দ্রষ্টব্য :** অঙ্কে a ও b আছে বলিয়া প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর a ও b না ধরিয়া অন্য ধরিতে হইল।]

উদা. 11. If a, b and c be respectively the pth, qth and rth terms of an A.P., prove that $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0.$
[S. F. '63 ; C. U. '32, '37, '46]

মনে কর, প্রথম পদ$=f$ এবং সাধারণ অন্তর$=d$.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত হইতে $f+(p-1)d=a\cdots(1)$, $f+(q-1)d=b\cdots(2)$, এবং $f+(r-1)d=c\cdots(3)$.

(1)$-$(2) করিয়া পাই $(p-q)d=a-b\cdots(4)$

এবং (2)$-$(3) " " $(q-r)d=b-c\cdots(5)$

$\therefore$ (4)$\div$(5) করিয়া পাই $\dfrac{p-q}{q-r}=\dfrac{a-b}{b-c}$,

$\therefore$ $a(q-r)-b(q-r)=b(p-q)-c(p-q)$,

বা, $a(q-r)+b(r-q)-b(p-q)+c(p-q)=0$,

বা, $a(q-r)+b(r-q-p+q)+c(p-q)=0$,

$\therefore$ $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$.

উদা. 12. If a, b, c be respectively the sums of p, q and r terms of an A. P., prove that $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$.

[C. U. '45 ; D. B. '43, '45 ; G. U. '49, '51]

[যদি কোন সমান্তর শ্রেণীর p, q ও r সংখ্যক পদের সমষ্টি যথাক্রমে a, b ও c হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$ হইবে।]

মনে কর, প্রথম পদ$=f$ এবং সাধারণ অন্তর$=d$.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই $\frac{p}{2}\{2f+(p-1)d\}=a\cdots(1)$,

$\frac{q}{2}\{2f+(q-1)d\}=b\cdots(2)$ এবং $\frac{r}{2}\{2f+(r-1)d\}=c\cdots(3)$.

(1)-এর উভয় পক্ষকে $\frac{p}{2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $2f+(p-1)d=\frac{2a}{p}\cdots(4)$

অনুরূপে (2) হইতে $2f+(q-1)d=\frac{2b}{q}\cdots(5)$

এবং (3) " $2f+(r-1)d=\frac{2c}{r}\cdots(6)$.

এক্ষণে, (4)$-$(5) করিয়া পাই $(p-q)d=\frac{2a}{p}-\frac{2b}{q}=2(\frac{a}{p}-\frac{b}{q})\cdots(7)$

এবং (5)$-$(6) করিয়া পাই $(q-r)d=2(\frac{b}{q}-\frac{c}{r})\cdots(8)$

$\therefore$ (7)$\div$(8) করিয়া পাই $\dfrac{p-q}{q-r}=\dfrac{\frac{a}{p}-\frac{b}{q}}{\frac{b}{q}-\frac{c}{r}}$,

$\therefore$ $\frac{a}{p}(q-r)-\frac{b}{q}(q-r)=\frac{b}{q}(p-q)-\frac{c}{r}(p-q)$ [বজ্রগুণন দ্বারা]

বা, $\frac{a}{p}(q-r)-\frac{b}{q}(q-r)-\frac{b}{q}(p-q)+\frac{c}{r}(p-q)=0$,

বা, $\frac{a}{p}(q-r)-\frac{b}{q}(q-r+p-q)+\frac{c}{r}(p-q)=0$,

বা, $\frac{a}{p}(q-r)-\frac{b}{q}(p-r)+\frac{c}{r}(p-q)=0$,

বা, $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$.

উদা. 13. The sums of n terms of two Arithmetic series are in the ratio of $n-1 : n+1$; find the ratio of their 5th terms.

[দুইটি সমান্তর শ্রেণীর n সংখ্যক পদের সমষ্টিদ্বয়ের অনুপাত $n-1 : n+1$; উহাদের পঞ্চম পদদ্বয়ের অনুপাত নির্ণয় কর।]

মনে কর, শ্রেণীদ্বয়ের প্রথম পদ যথাক্রমে a ও f এবং সাধারণ অন্তর b ও d.

পঞ্চম পদদ্বয়ের অনুপাত অর্থাৎ $\frac{a+4b}{f+4d}$ নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই $\frac{\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}}{\frac{n}{2}\{2f+(n-1)d\}}=\frac{n-1}{n+1}$,

বা, $\frac{2a+(n-1)b}{2f+(n-1)d}=\frac{n-1}{n+1}$; এক্ষণে $n=9$ লিখিলে পাই

$\frac{2a+8b}{2f+8d}=\frac{9-1}{9+1}$, বা, $\frac{2(a+4b)}{2(f+4d)}=\frac{8}{10}$, $\therefore$ $\frac{a+4b}{f+4d}=\frac{4}{5}$.

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $=4:5$.

উদা. 14. If s_1, s_2, s_3 denote the sums of n terms of three series in A. P., the first term of each being the same and the respective common differences 1, 2 and 3, show that $s_1+s_3=2s_2$. [cf. H. S. '62]

[তিনটি সমান্তর শ্রেণীর একই প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তর যথাক্রমে 1, 2 ও 3; যদি s_1, s_2, s_3 যথাক্রমে উহাদের n সংখ্যক পদের সমষ্টি সূচিত করে, তবে দেখাও যে $s_1+s_3=2s_2$.]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$.

$\therefore$ $s_1=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)\times 1\}=\frac{n}{2}(2a+n-1)$,

$s_2=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)\times 2\}=\frac{n}{2}(2a+2n-2)$,

$s_3=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)\times 3\}=\frac{n}{2}(2a+3n-3)$.

$\therefore$ $s_1+s_3=\frac{n}{2}(2a+n-1)+\frac{n}{2}(2a+3n-3)$

$=\frac{n}{2}(4a+4n-4)=2.\frac{n}{2}(2a+2n-2)=2s_2$.

উদা. 15. The angles of a rectilineal figure are in A. P. If the least of them be 88° and their common difference 10°, find the number of sides.

[একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্রের কোণগুলি একটি সমান্তর শ্রেণী। ক্ষুদ্রতম কোণটি 88° ও সাধারণ অন্তর 10° হইলে উহার বাহুর সংখ্যা কত ?]

মনে কর, বাহুসংখ্যা $=n$. এস্থলে ১ম পদ $a=88°$, সাধারণ অন্তর $=10°$.

$\because$ কোন বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি $+4$ সমকোণ
=বাহুসংখ্যার দ্বিগুণ সমকোণ,

$\therefore \frac{n}{2}\{2.88°+(n-1).10°\}+360°=2.n.90°$,

বা, $88n+5n^2-5n+360=180n$,

বা, $5n^2-97n+360=0$, বা, $5n^2-72n-25n+360=0$,

বা, $(n-5)(5n-72)=0$, $\therefore$ $n=5$ বা $\frac{72}{5}$.

$\because$ বাহুসংখ্যা ভগ্নাংশ হইতে পারে না, $\therefore$ নির্ণেয় বাহুসংখ্যা $=5$.

Exercise 4

Find the sum of :—

1. $1+3+5+7+\cdots$ to 10 terms. [C. U. '23]
2. $5+8+11+\cdots$ to n terms.
3. $14+10+6+\cdots$ to 12 terms.
4. $-14-11-8\cdots$ to 20 terms.
5. $1+1\frac{1}{4}+1\frac{1}{2}+\cdots$ to 19 terms.
6. $1+\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\cdots$ to n terms.
7. $12+12{\cdot}6+13{\cdot}2+\cdots$ to 21 terms.
8. $1+5+9+\cdots$ to $(n-1)$ terms.
9. $n+(n-1)+(n-2)+\cdots$ to $(n+2)$ terms
10. $\sqrt{2}+\sqrt{2}(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}(1+2\sqrt{2})+\cdots$ to 19 terms.
11. $2+5+8+\cdots+152$. [C. U. '48]
12. $9+7+5+\cdots+(-25)$

Find, without assuming any formula, the sum of

13. 1, 3, 5, 7, $\cdots$ to 30 terms. [C. U. '16]
14. $4+7+10+\cdots$ to 112 terms. [D. B. '44]
15. $5+8+11+\cdots$ to 51 terms. [E. B. S. B. '51]
16. $3+7+11+\cdots$ to n terms.
17. $1+4+7+10+\cdots+37$. [C. U. '19]

18. Find, without assuming any formula, the sum of the first n natural numbers. [C. U. '10, '19 ; D. B. '28]

[কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় কর।]

19. Find the sum of all the multiples of 7 between 320 and 442.

[320 ও 442এর মধ্যবর্তী 7এর গুণিতকগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর।]

20. Find the sum of all the odd numbers between 100 and 200.

[100 ও 200-র মধ্যবর্তী অযুগ্ম (বিজোড়) সংখ্যাগুলির সমষ্টি কত ?]

21. Find the sum of 30 consecutive odd numbers of which the last is 127.

[30টি ক্রমিক অযুগ্ম সংখ্যার শেষটি 127 ; উহাদের সমষ্টি কত ?]

22. Find the sum of 21 terms of an A. P. of which the 4th and the 15th terms are 13 and 57 respectively.

[যে সমান্তর শ্রেণীর চতুর্থ ও 15-তম পদ যথাক্রমে 13 ও 57 তাহার 21টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।]

23. Find the sum of 16 terms of the series 10, 8, 6,··· beginning at the 10th term.

[10, 8, 6,···শ্রেণীর দশম পদ হইতে আরম্ভ করিয়া 16টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।]

24. The 21st term of an A. P. is 43, find the sum of its first 41 terms.

25. How many terms must be taken of the series 2, 8, 14,···to make the sum 352 ? [C. U. '49]

26. The first two terms of an A. P. are $1\frac{1}{2}$ and $2\frac{1}{3}$. How many terms of the series must be taken to give the sum 171 ? [D. B. '40]

[কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম দুইটি পদ $1\frac{1}{2}$ ও $2\frac{1}{3}$; উহার কতগুলি পদের সমষ্টি 171 হইবে ?]

27. Find the sum of $1+4+6+9+11+14+\cdots$to 21 terms.

28. The sum of n terms of an A. P. is n^2. Find the first term and the common difference. [G. U. '48]

29. Find the series in A. P. of which the sum of r terms is $2r^2+3r$.

[এমন একটি সমান্তর শ্রেণী নির্ণয় কর যাহার r পদের সমষ্টি $2r^2+3r$.]

30. The sum of a certain number of rerms of the A. P. $21+19+17+\cdots$ is 120. Find the last term and the number of terms. [D. B. '47]

[$21+19+17+\cdots$ সমান্তর শ্রেণীর কতিপয় পদের সমষ্টি 120 ; উহার শেষ পদ ও পদ-সংখ্যা নির্ণয় কর।]

31. The sum of n terms of a series in A. P. is $\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$. Find the rth term.

32. The sum of 9 terms of an A. P. is 171 and that of 24 terms is 996. Find the sum of 41 terms.

[একটি সমান্তর শ্রেণীর 9টি পদের সমষ্টি 171 ও 24টি পদের সমষ্টি 996 ; উহার 41টি পদের সমষ্টি কত ?

33. The sum of n terms of an A. P. is m, and that of m terms is n. Prove that the sum of $m+n$ terms is $-(m+n)$. [C. U. '50]

[কোন সমান্তর শ্রেণীর n পদের সমষ্টি m এবং m পদের সমষ্টি n হইলে, প্রমাণ কর যে উহার $(m+n)$ পদের সমষ্টি $-(m+n)$ হইবে।]

34. Show that if unity be added to the sum of any number of terms of the series 8, 16, 24, $\cdots$, the result will be the square of an odd number.

[প্রমাণ কর যে 8, 16, 24,$\cdots$শ্রেণীটির যে কোন সংখ্যক পদের সমষ্টির সহিত এক যোগ করিলে একটি অযুগ্ম সংখ্যার বর্গের সমান হইবে।]

34(a). Find the sum of all the integers which are perfect squares between 39 and 17823. [S. F. '60 (Addl.)]

[39 ও 17823-এর মধ্যবর্তী অখণ্ড বর্গ সংখ্যাগুলির সমষ্টি কত ?]

35. The sum of 3 numbers in A. P. is 36 and their product is 1140 ; find the numbers.

36. Find four numbers in A. P. of which the sum is 22 and the product of the extreme terms is 10.

[এমন চারিটি সমান্তর সংখ্যা নির্ণয় কর যেন তাহাদের সমষ্টি 22 এবং প্রান্তীয় সংখ্যা দুইটির গুণফল 10 হয়।]

37. Find the sum of n Arithmetic means between a and c.

38. Prove that the sum of n Arithmetic means between two quantities is n times the single mean between them.

[প্রমাণ কর যে দুইটি রাশির মধ্যস্থ n সমান্তরীয় মধ্যকের সমষ্টি ঐ রাশিদ্বয়ের সমান্তরীয় মধ্যকটির n গুণ।]

39. Sum to n terms the series in A. P. whose nth term is $2n-1$. [D. B. '46]

Sum to n terms :

40. $1\times3+3\times5+5\times7+7\times9+\cdots$ [W. B. S. F. '52]

41. $3.7+5.10+7.13+9.16+\cdots$ [D. B. '36]

42. $5^2+8^2+11^2+\cdots$

43. $1.2^2+2.3^2+3.4^2+\cdots$

44. $2.3+3.4+4.5+$ [E. B. S. B. '49]

45. $1+3+6+10+15+\cdots$

46. $1+4+9+16+25+\cdots$

47. $2.3.4+3.4.5+4.5.6+\cdots$

48. $(1)+(1+3)+(1+3+5)+\cdots$

49. $\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{6.8}+\cdots$

50. $\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\cdots$

51. (*a*) $1.7+3.9+5.11+\cdots$ [C. U. High '50]

(*b*) $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots$ to r terms.

(*c*) $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots$ to $(2n+1)$ terms. [H. S. '69]

(*d*) Sum the series

$n.1+(n-1).2+(n-2).3+(n-3).4+\cdots+1.n.$ [C. U. 1889]

(*e*) Find the sum of $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$. [H. S. '66]

52. If x, y, z are in A. P., show that $y+z,\ z+x,\ x+y$ are in A. P.

[যদি x, y, z সমান্তর শ্রেণীতে থাকে, তবে দেখাও যে $y+z$, $z+x$ ও $x+y$ সমান্তর শ্রেণীতে আছে।]

53. If $\frac{b+c}{a}$, $\frac{c+a}{b}$, $\frac{a+b}{c}$ are in A. P., prove that $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$, are in A. P.

54. If $(b-c)^2$, $(c-a)^2$, $(a-b)^2$ are in A. P., show that $\frac{1}{b-c}$, $\frac{1}{c-a}$, $\frac{1}{a-b}$ are in A. P.

55. Four numbers are in A.P. The sum of their extremes is 11, while the product of the means is $29\frac{1}{4}$. Find the numbers. [D. B. '35]

[চারিটি সমান্তরীয় সংখ্যার প্রান্তীয় সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি 11 এবং মধ্যক দুইটির গুণফল $29\frac{1}{4}$; সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।]

56. If a, b, c are in A. P., show that

$$(a+2b-c)(2b+c-a)(c+a-b)=4abc.$$ [D. B. '35]

[Hints : $\because$ a, b, c সমান্তর শ্রেণী, $\therefore$ $a+c=2b$]

57. If x, y, z be respectively the sums of the first p, q and r terms of a series in A. P., prove that $xqr(q-r)+yrp(r-p)+zpq(p-q)=0$. [C. U.]

[কোন সমান্তর শ্রেণীর p, q ও r সংখ্যক পদের সমষ্টি যথাক্রমে x, y ও z হইলে প্রমাণ কর যে, $xqr(q-r)+yrp(r-p)+zpq(p-q)=0$.]

58. A person lends Rs. 1000 to a friend agreeing to charge no interest and also to recover the amount by monthly instalments decreasing successively by Rs. 2. In how many months will the loan be paid up, if the first instalment be Rs. 64 ? [C. U. '20]

[এক ব্যক্তি তাহার বন্ধুকে বিনা সুদে 1000 টাকা এই সর্তে ধার দিল যে মাসিক কিস্তিতে ঐ ধার শোধ করিতে হইবে এবং পর পর কিস্তির পরিমাণ 2 টাকা করিয়া কমিবে। যদি প্রথম কিস্তি 64 টাকা হয়, তবে কত মাসে ঐ ধার শোধ হইবে ?]

59. The vertical angles of a polygon are in A. P. The smallest angle is $120°$ and the common difference is $5°$. Find the number of sides of the polygon.

[একটি বহুভুজের কোণগুলি সমান্তর শ্রেণীতে আছে। যদি ক্ষুদ্রতম কোণটি $120°$ ও সাধারণ অন্তর $5°$ হয়, তবে উহার পদ সংখ্যা কত ?]

60. 100 stones are placed on a straight road at intervals of 5 yds. apart. A runner has to start from a basket 5 yds. from the first stone, pick up the stones and bring them back

to the basket one by one. How many yards has he to run altogether? [Pat. U. '19]

[একটি ঋজু পথের উপর পর পর 5 গজ ব্যবধানে 100টি প্রস্তর রাখা আছে। এক ব্যক্তি প্রথম প্রস্তর হইতে 5 গজ দূরে রক্ষিত একটি ঝুড়ি হইতে চলিতে আরম্ভ করিয়া প্রতিবার একটি করিয়া প্রস্তর ঐ ঝুড়িতে আনিতে লাগিল। তাহাকে মোট কত গজ চলিতে হইবে?]

61. A man has to travel 162 miles; he goes 30 miles the first day, 27 miles the second, 24 miles the third, and so on. How many days does he take for the journey? [D. B. '24]

[এক ব্যক্তিকে 162 মাইল ভ্রমণ করিতে হইবে। সে প্রথম দিন 30 মাইল, দ্বিতীয় দিন 27 মাইল, তৃতীয় দিন 24 মাইল এই ভাবে যাইতে লাগিল। সে কত দিনে ভ্রমণ শেষ করিবে?]

62. A tree in each year grows 1 inch less than it did in the previous year. If it grows 1 yd. in the first year, in how many years will it have ceased growing and what is its height then?

[একটি গাছ প্রতি বৎসর পূর্ব বৎসর অপেক্ষা এক ইঞ্চি কম বাড়ে। উহা যদি প্রথম বৎসর এক গজ বাড়ে, তবে কত বৎসরে উহার বৃদ্ধি শেষ হইবে এবং তখন উহার উচ্চতা কত হইবে?]

63. A man undertakes to pay off a debt of Rs. 65 by monthly instalments; he pays Rs. 2 in the first month and continually increases the instalments in every subsequent month by Re. 1. In what time will the debt be cleared up? [C. U. '30, '50]

[এক ব্যক্তি মাসিক কিস্তিতে তাহার 65 টাকা ঋণ শোধ করিবার জন্য প্রথম মাসে 2 টাকা দিল এবং পর পর প্রত্যেক পরবর্তী মাসে কিস্তিগুলি এক টাকা করিয়া বাড়াইতে লাগিল। কত সময়ে ঐ ঋণ শোধ হইবে?]

64. A sets out from a place at the rate of 5 miles an hour. B sets out $4\frac{1}{2}$ hours after A and travels in the same driection, 3 miles the first hour, $3\frac{1}{2}$ miles the second hour, 4 miles the third hour and so on. Find in how many hours B will overtake A [H. S. 1965]

[কোন স্থান হইতে রওনা হইয়া A ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে যাইতে লাগিল এবং তাহার $4\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পরে B রওনা হইয়া একই দিকে প্রথম ঘণ্টায় 3 মাইল, দ্বিতীয় ঘণ্টায় $3\frac{1}{2}$ মাইল, তৃতীয় ঘণ্টায় 4 মাইল এইভাবে যাইতে লাগিল। B কত ঘণ্টায় Aকে ধরিবে?]

গুণোত্তর শ্রেণী (Geometrical Progression)

14. **গুণোত্তর শ্রেণী** (G. P.): কোন শ্রেণীর অন্তর্গত পদগুলির যে কোন পদের সহিত যদি তাহার ঠিক পূর্বপদের অনুপাত সর্বদাই সমান হয়, তাহা হইলে এরূপ শ্রেণীকে গুণোত্তর শ্রেণী বলে।

আর ঐ নিয়ত সমান অনুপাতটিকে **ঐ শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত** (Common Ratio) বলে। যথা—

(1) 1, 3, 9, 27,··· ইহা গুণোত্তর শ্রেণী, ইহার সাধারণ অনুপাত $=3$.

(2) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \cdots$ ইহা গুণোত্তর শ্রেণী, ইহার সাধারণ অনুপাত $=-\frac{1}{2}$.

[**দ্রষ্টব্য:** (1) এই সাধারণ অনুপাতকে সাধারণতঃ r দ্বারা সূচিত করা হয়। (2) প্রথমদিক হইতে পদগুলিকে পর পর ঐ সাধারণ অনুপাত দ্বারা গুণ করিলে পর পর পদগুলি পাওয়া যায়। (3) সুতরাং শেষ দিক হইতে পদগুলিকে সাধারণ অনুপাত দ্বারা পর পর ভাগ করিতে থাকিলে পর পর পূর্ববর্তী পদগুলি পাওয়া যায়। (4) কোন গুণোত্তর শ্রেণীর পদগুলি ক্রমিক সমানুপাতী হয়।]

15. **সাধারণ অনুপাত নির্ণয়।** গুণোত্তর শ্রেণীর যে কোন পদকে তাহার ঠিক পূর্ব পদের দ্বারা ভাগ করিলে সাধারণ অনুপাত পাওয়া যায়।

সাধারণ পদ (General term)। কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হইলে শ্রেণীটি হইবে $a, ar, ar^2, ar^3, \cdots$

এক্ষণে প্রথম পদ বা $t_1 = a$ অর্থাৎ $a.r^0$ বা $a.r^{1-1}$

দ্বিতীয় পদ বা $t_2 = ar$ অর্থাৎ ar^{2-1},

তৃতীয় পদ বা $t_3 = ar^2$ অর্থাৎ ar^{3-1}, ইত্যাদি

এখানে দেখা যাইতেছে যে, প্রত্যেক পদে rএর ঘাত উহার পদসংখ্যা অপেক্ষা এক কম। $\therefore$ শ্রেণীটির n-তম পদ বা $t_n = ar^{n-1}$.

উদাহরণমালা 7

উদা. 1. Find the 6th term of the series 1, 2, 4, 8,······

এখানে ১ম পদ $a=1$, সাধারণ অনুপাত $r=\frac{2}{1}=2$, এবং পদসংখ্যা $n=6$.

$\because \quad t_n = ar^{n-1}, \quad \therefore \quad t_6 = 1.2^5 = 32.$

উদা. 2. Find the 8th term of the series $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \cdots$

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অনুপাত $r=\frac{-\frac{1}{3}}{1}=-\frac{1}{3}$ এবং

পদসংখ্যা $n=8$.

$\because \quad t_n=ar^{n-1}, \quad \therefore \quad t_8=1.(-\frac{1}{3})^7=-\frac{1}{3^7}=-\frac{1}{2187}$.

উদা. 3. Find the pth term of the series $4, 8, 16, \cdots$

এখানে $a=4$, $r=\frac{8}{4}=2$ এবং $n=p$.

$\because \quad t_n=ar^{n-1}, \quad \therefore \quad t_p=4.2^{p-1}=2^2.2^{p-1}=2^{p+1}$.

উদা. 4. Find the nth term of the series $1, -3, 9, -27, \cdots$

এখানে $a=1$, $r=\frac{-3}{1}=-3$.

$\therefore \quad t_n=ar^{n-1}=1.(-3)^{n-1}=(-3)^{n-1}$.

[দ্রষ্টব্য : এখানে উত্তরটি ঋণাত্মক বা ধনাত্মক তাহা নির্ণয় করা যায় না। n-এর মান অযুগ্ম হইলে $n-1$ যুগ্ম হইবে এবং তখন $(-3)^{n-1}$এর মান ধনাত্মক হইবে। আর n যুগ্মসংখ্যা হইলে $(-3)^{n-1}$ ঋণসংখ্যা হইবে।]

উদা. 5. Find the nth term of the series

$$\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots \qquad \text{[C. U.]}$$

এখানে প্রথম পদ $a=\sqrt{3}$, সাধারণ অনুপাত $r=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$.

$\therefore \quad t_n=ar^{n-1}=\sqrt{3}.(\frac{1}{3})^{n-1}=\frac{\sqrt{3}}{3^{n-1}}=3^{\frac{1}{2}}.3^{1-n}=3^{\frac{3}{2}-n}$.

উদা. 6. Find the common ratio of the G. P. of which the first term is 2 and the 10th term is 1. [C. U. '25]

[যে গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 2 এবং দশম পদ 1. তাহার সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।]

এখানে প্রথম পদ $a=2$ এবং $t_{10}=1$. মনে কর, সাধারণ অনুপাত$=r$.

$\because \quad t_n=ar^{n-1}, \quad \therefore \quad t_{10}=2r^9$, বা, $1=2r^9$,

বা, $r^9=\frac{1}{2}$, $\quad \therefore \quad r=\sqrt[9]{\frac{1}{2}}$.

উদা. 7, Find the 9th term of the G.P. of which the 4th and 11th terms are 2 and $\frac{1}{64}$ respectively.

[কোন গুণোত্তর শ্রেণীর চতুর্থ পদ 2 এবং 11-তম পদ $\frac{1}{64}$, উহার নবম পদ কত ?]

মনে কর, প্রথম পদ$=a$ এবং সাধারণ অনুপাত$=r$.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত হইতে $t_4=2$, অর্থাৎ $ar^3=2\cdots(1)$

এবং $t_{11}=\frac{1}{64}$, অর্থাৎ $ar^{10}=\frac{1}{64}\cdots(2)$

একণে, $(2)\div(1)$ করিয়া পাই $r^7=\frac{1}{128}=(\frac{1}{2})^7$, $\therefore$ $r=\frac{1}{2}$.

একণে (1) হইতে $a(\frac{1}{2})^3=2$, বা, $\frac{1}{8}a=2$, $\therefore$ $a=16$.

$\therefore$ নির্ণেয় $t_9=ar^8=16\times\frac{1}{2^8}=2^4\times\frac{1}{2^8}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$.

উদা. 8. Find the series in G.P. whose 5th term is 16 and 9th term is 256.

[একটি গুণোত্তর শ্রেণীর পঞ্চম পদ 16 ও নবম পদ 256, শ্রেণীটি নির্ণয় কর।]

মনে কর, প্রথম পদ$=a$ এবং সাধারণ অনুপাত$=r$.

$\therefore$ সর্তদ্বয় হইতে পাই $ar^4=16\cdots(1)$ এবং $ar^8=256\cdots(2)$.

এখন (2)-কে (1) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $r^4=16$, $\therefore$ $r=\pm2$.

একণে (1) হইতে $a.16=16$, $\therefore$ $a=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় গুণোত্তর শ্রেণী$=1, 2, 4, 8,\cdots$; অথবা $1, -2, 4, -8,\cdots$

উদা. 9. Which term of the series $9, 3, 1,\cdots$ is $\frac{1}{243}$?

মনে কর, $\frac{1}{243}$ প্রদত্ত শ্রেণীটির n-তম পদ। এস্থলে প্রথম পদ $a=9$, এবং সাধারণ অনুপাত $r=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

$\therefore$ $ar^{n-1}=\frac{1}{243}$, বা, $9.(\frac{1}{3})^{n-1}=\frac{1}{243}$

বা, $3^2\times\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{1}{243}$ বা, $\frac{1}{3^{n-3}}=\frac{1}{3^5}$ বা, $3^{n-3}=3^5$,

$\therefore$ $n-3=5$, $\therefore$ $n=8$. অতএব $\frac{1}{243}$ প্রদত্ত শ্রেণীটির অষ্টম পদ।

উদা. 10. If there are 6 terms in a G.P., prove that the product of the first and last is equal to the product of the third and fourth. [P. U.]

[যদি কোন গুণোত্তর শ্রেণীতে 6টি পদ থাকে, তবে প্রমাণ কর যে উহার প্রথম ও শেষ পদের গুণফল তৃতীয় ও চতুর্থ পদের গুণফলের সমান।]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অনুপাত $=r$. এখানে শেষ পদ $t_6=ar^5$.

$\therefore$ প্রথম ও শেষ পদের গুণফল $=a\times ar^5=a^2r^5$.

আবার তৃতীয় ও চতুর্থ পদের গুণফল $=ar^2\times ar^3=a^2r^5$.

$\therefore$ প্রথম পদ $\times$ শেষ পদ $=$ তৃতীয় পদ $\times$ চতুর্থ পদ।

উদা. 11. Show that the product of any two terms of a G. P., equidistant from the beginning and the end, is constant. [D. B. '31]

[প্রমাণ কর যে, গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম ও শেষ প্রান্ত হইতে সমদূরবর্তী যে-কোন দুই পদের গুণফল ধ্রুবক।]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$, শেষ পদ $=b$ এবং সাধারণ অনুপাত $=r$.

প্রথম ও শেষ দিক হইতে p-তম পদ লইয়া পরীক্ষা করা যাউক।

প্রথম দিক হইতে p-তম পদ $=ar^{p-1}$ এবং শেষ দিক হইতে ধরিয়া পূর্বের p তম পদ $=\dfrac{b}{r^{p-1}}$.

$\therefore$ উহাদের গুণফল $=ar^{p-1}\times\dfrac{b}{r^{p-1}}=ab=$ ধ্রুবক।

উদা. 12. If the pth and qth terms of a G. P. be c and d respectively, find the first term and the common ratio. [C. U. '34]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অনুপাত $=r$.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্তদ্বয় হইতে পাই $ar^{p-1}=c\cdots(1)$ এবং $ar^{q-1}=d\cdots(2)$

এক্ষণে, (1) $\div$ (2) করিয়া পাই $\dfrac{ar^{p-1}}{ar^{q-1}}=\dfrac{c}{d}$, বা, $r^{p-q}=\dfrac{c}{d}$, $\therefore\ r=\left(\dfrac{c}{d}\right)^{\frac{1}{p-q}}$.

এখন (1) হইতে পাই $a\left(\dfrac{c}{d}\right)^{\frac{p-1}{p-q}}=c$.

$$\therefore\quad a=c\times\left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{p-1}{q-q}}=c\times\frac{d^{\frac{p-1}{p-q}}}{c^{\frac{p-1}{p-q}}}=c^{1-\frac{p-1}{p-q}}\times d^{\frac{p-1}{p-q}}$$

$$=c^{\frac{1-q}{p-q}}.\,d^{\frac{p-1}{p-q}}=(c^{1-q}.d^{p-1})^{\frac{1}{p-q}}.$$

উদা. 13. In a G.P. if the $(p+q)$th term is m and $(p-q)$th term is n, find the pth and qth terms. [B. U. 1888 ; C. U. '35, '42]

[একটি গুণোত্তর শ্রেণীর $(p+q)$-তম পদ m এবং $(p-q)$-তম পদ n; উহার p-তম ও q-তম পদ দুইটি নির্ণয় কর।]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অনুপাত $=r$.

এক্ষণে $t_{p+q}=m$ অর্থাৎ $ar^{p+q-1}=m\cdots(1)$

এবং $t_{p-q}=n$ অর্থাৎ $ar^{p-q-1}=n\cdots(2)$

$\therefore$ (1)÷(2) করিয়া $r^{p+q-1-p+q+1}=\frac{m}{n}$ বা, $r^{2q}=\frac{m}{n}$, $\therefore r=\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2q}}$.

এক্ষণে (1) হইতে পাই $a\left\{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2q}}\right\}^{p+q-1}=m$, বা, $a.\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p+q-1}{2q}}=m$

$$\therefore \quad a=m.\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p+q-1}{2q}}$$

$\therefore$ নির্ণেয় $t_p=ar^{p-1}=m.\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p+q-1}{2q}}\times\left\{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2q}}\right\}^{p-1}$

$$=m.\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p+q-1}{2q}}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p-1}{2q}}=m.\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p+q-1}{2q}}.\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1-p}{2q}}$$

$$=m.\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p+q-1+1-p}{2q}}=m.\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{q}{2q}}=m.\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}}=m\times\frac{n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}$$

$=m^{\frac{1}{2}}.n^{\frac{1}{2}}=\sqrt{mn}$. অনুরূপে $t_q=a.r^{q-1}=m\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p}{2q}}$.

[দ্রষ্টব্য : $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p-1}{2q}}=\left(\frac{m}{n}\right)^{-\left(\frac{1-p}{2q}\right)}=\frac{1}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1-p}{2q}}}=\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1-p}{2q}}$.

এইরূপে লেখা যায়।]

Exercise 5

1. Find the 6th term of the series 4, 8, 16,·
2. Find the 9th term of 1, −3, 9,···
3. Find the 7th term of $\frac{5}{4}$, 1, $\frac{4}{5}$,···
4. Find the nth term of 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$,···

টি সংখ্যা at is the nth term of the series 16, 8, 4,··· ?

টি নির্ণয় d the pth term of the series 3, −9, 27,···

d the 7th term of the G. P. of which the first term মনে ক id the common ratio is $-\frac{1}{3}$.

8. র ও b e common ratio and the 6th term of a G. P. are $\frac{1}{3}$ and 1 respectively. Find its 11th term.

9. The 4th term of a G. P. is 8 and the 9th term is 256, find the series.

10. The 10th term of a G. P. is $\frac{1}{2}$ and the 14th term is $\frac{1}{32}$, find the 17th term.

11. The first two terms of a G. P. are 3 and 1. Write down the 10th term. [C. U. '13]

12. The 5th term of a G. P. is 48 and the 12th term 6144. Find the first term and the common ratio. [D.B.'28]

13. Which term of the series 128, 64, 32,···is $\frac{1}{2}$?

14. Is 320 a term of the series 5, −10, 20,··· ?

15. Find the 10th and nth terms of the G. P. of which the rth term is 2^{r-1}.

16. If the pth and qth terms of a G. P. are a and b respectively, find its nth term.

গুণোত্তরীয় মধ্যক (Geometric Mean)

16. (1) যদি তিনটি রাশি গুণোত্তরীয় শ্রেণীতে থাকে, তবে মধ্যম রাশিকে প্রথম ও তৃতীয় রাশির গুণোত্তরীয় মধ্যক বলে।

(2) কতকগুলি রাশি গুণোত্তরীয় শ্রেণী গঠন করিলে প্রথম ও শেষ পদের মধ্যবর্তী রাশিগুলিকে প্রথম ও শেষ পদের মধ্যবর্তী ততগুলি গুণোত্তরীয় মধ্যক বলে।

উদাহরণমালা 8

উদা. 1. Find the geometric mean between a and b. [C. U. '48]

মনে কর, গুণোত্তরীয় মধ্যকটি m, সুতরাং a, m, b গুণোত্তরীয় শ্রেণী গঠন করিল। $\therefore \frac{m}{a}=\frac{b}{m}$ [$\because$ প্রত্যেকটি সাধারণ অনুপাতের সমান]

বা, $m^2=ab$. $\therefore$ $m=\pm\sqrt{ab}$.

[দ্রষ্টব্য : এখানে দেখা গেল দুইটি রাশির গুণোত্তরীয় মধ্যক তাহাদের গুণফলের বর্গমূলের সমান। ইহা মনে রাখিবে।]

উদা. 2. Insert n geometric means

এখানে প্রথম পদ a, শেষ পদ b এবং উহাদের
লইয়া একটি গুণোত্তরীয় শ্রেণী হইবে এবং ঐ শ্রেণীটির
উহার শেষ পদ বা $(n+2)$-তম পদ b.

মনে কর, উহার সাধারণ অনুপাত $=r$.

$$\therefore\quad b=ar^{n+1},\quad \text{বা}\quad r^{n+1}=\frac{b}{a},\quad \therefore\quad r=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

$$\therefore\quad \text{নির্ণেয় মধ্যকগুলি}=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}},\ a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}},\cdots,\ a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}.$$

উদা. 3. Insert 3 geometric means between 2 and 162. [C. U. '30, '49]

2 ও 162র মধ্যে তিনটি গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাইলে 5 পদযুক্ত একটি গুণোত্তরীয় শ্রেণী হইবে। তাহার প্রথম পদ 2, এবং পঞ্চম পদ 162.

মনে কর, সাধারণ অনুপাত $=r$.

$\because\quad t_5=162,\quad \therefore\quad ar^4=162,\quad$ বা $\quad 2r^4=162,$

বা, $\quad r^4=81=(\pm3)^4,\quad \therefore\quad r=\pm3.$

$\therefore\quad$ প্রথম মধ্যক $=2\times3\quad$ বা $\quad 2\times-3\ =\ 6$ বা $\ -6$

দ্বিতীয় মধ্যক $=6\times3\quad$ বা $\quad -6\times-3=18$ বা $\ +18$

তৃতীয় মধ্যক $=18\times3\quad$ বা $\quad 18\times-3=54$ বা $\ -54$

$\therefore\quad$ নির্ণেয় মধ্যক তিনটি $=6,\ 18,\ 54$; অথবা $-6,\ 18,\ -54$.

উদা. 4. Insert 5 geometric means between $3\frac{5}{9}$ and $40\frac{1}{2}$. [D. B. '35]

এখানে প্রদত্ত পদদ্বয় মধ্যবর্তী 5টি মধ্যক সমেত একটি গুণোত্তরীয় শ্রেণী গঠন করে। উহার প্রথম পদ $3\frac{5}{9}$, পদসংখ্যা $=5+2=7$.

মনে কর, উহার সাধারণ অনুপাত $=r$.

এখানে $t_7=40\frac{1}{2}$, $a=3\frac{5}{9}=\frac{32}{9}$, $\quad\therefore\quad ar^{7-1}=40\frac{1}{2}$,

বা, $\quad \dfrac{32}{9}.r^6=\dfrac{81}{2}$, বা ,$r^6=\dfrac{81\times9}{2\times32}=\dfrac{3^6}{2^6}=(\frac{3}{2})^6,\quad \therefore\ r=\pm\frac{3}{2}.$

$\therefore\quad$ নির্ণেয় মধ্যকগুলি $=5\frac{1}{3},\ 8,\ 12,\ 18,\ 27$;

অথবা, $\quad -5\frac{1}{3},\ 8,\ -12,\ 18,\ -27.$

উদা. 5. The arithmetic mean between two numbers is 15 and their geometric mean is 9. Find the numbers. [C. U. '26]

[দুইটি সংখ্যার মধ্যে সমান্তরীয় মধ্যক 15 এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক 9 ; ঐ দুইটি নির্ণয় কর।]

মনে কর, সংখ্যা দুইটি a ও b.

a ও bএর মধ্যবর্তী সমান্তরীয় মধ্যকটি$=\frac{a+b}{2}$,

এখানে $\frac{a+b}{2}=15$, বা $a+b=30\cdots(1)$

আবার, $\because$ a ও b-এর মধ্যস্থিত গুণোত্তরীয় মধ্যকটি$=\pm\sqrt{ab}$,

$\therefore$ এখানে $\pm\sqrt{ab}=9$, $\therefore$ $ab=81\cdots(2)$

এক্ষণে, $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=30^2-4\times81=900-324=576$,

$\therefore$ $a-b=\pm\sqrt{576}=\pm24\cdots(3)$

এখন (1) ও (3) সমাধান করিয়া পাই $a=27$ এবং $b=3$;

অথবা, $a=3$, $b=27$ [যদি $a-b=-24$ হয়]

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় 27 ও 3 ; অথবা, 3 ও 27.

উদা. 6. Show that the arithmetic mean of any two real positive quantities is greater than their geometric mean.
[C. U. '28, '39, '41, '44, '47, '48 ; G. U. '52

[প্রমাণ কর যে, দুইটি বাস্তব ধনাত্মক রাশির সমান্তরীয় মধ্যকটি গুণোত্তরীয় মধ্যক অপেক্ষা বৃহত্তর।]

মনে কর, সংখ্যাদ্বয় a ও b. $\because$ a, b ধনাত্মক,

$\therefore$ উহাদের সমান্তরীয় মধ্যক$=\frac{a+b}{2}$, এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক$=\sqrt{ab}$.

এক্ষণে, $\frac{a+b}{2}-(\sqrt{ab})=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$, এখানে লব পূর্ণবর্গ এবং a ও b বাস্তব বলিয়া ইহা একটি ধনরাশি।

$\therefore$ $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$, অর্থাৎ সমান্তরীয় মধ্যকটি$>$গুণোত্তরীয় মধ্যক।

উদা. 7. Prove that the product of the n geometric means between a and b is the nth power of the single mean between them.

[প্রমাণ কর যে, a ও bএর মধ্যবর্তী n সংখ্যক গুণোত্তরীয় মধ্যকের গুণফল তাহাদের মধ্যবর্তী একটি মাত্র গুণোত্তরীয় মধ্যকের n-তম ঘাতের সমান।]

মনে কর, সাধারণ অনুপাত$=r$.

a ও bর মধ্যবর্তী মধ্যকটি$=\sqrt{ab}=(ab)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore$ ঐ মধ্যকটির n-তম ঘাত$=\{(ab)^{\frac{1}{2}}\}^n=(ab)^{\frac{n}{2}}$.

এখন n-সংখ্যক মধ্যকগুলি$=ar, ar^2, ar^3, \cdots\cdots, \frac{b}{r^3}, \frac{b}{r^2}, \frac{b}{r}$.

মনে কর, উহাদের গুণফল$=p$. প্রমাণ করিতে হইবে $p=(ab)^{\frac{n}{2}}$.

একণে, $p=ar\times ar^2\times ar^3\times\cdots\times\frac{b}{r^3}\times\frac{b}{r^2}\times\frac{b}{r}$

এবং $p=\frac{b}{r}\times\frac{b}{r^2}\times\frac{b}{r^3}\times\cdots\times ar^3\times ar^2\times ar$ (উল্টাইয়া লিখিলে)

$\therefore$ (গুণ করিয়া) $p^2=ab\times ab\times ab\times\cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$$=(ab)^n,\quad\therefore\quad p=(ab)^{\frac{n}{2}}.$$

[দ্রষ্টব্য : এই প্রণালীটি বুঝিয়া লও। এখানে a প্রথম পদ, b শেষ পদ এবং r সাধারণ অনুপাত বলিয়া প্রথম মধ্যক ar, দ্বিতীয় মধ্যক ar^2, তৃতীয় মধ্যক ar^3, ... এইভাবে লেখা যায়। আবার শেষ দিক হইতে ধরিলে শেষ মধ্যক অর্থাৎ bর পূর্বপদ$=\frac{b}{r}$, তার আগের মধ্যক $\frac{b}{r^2}$, ...এইভাবে লেখা হইল। উপরের গুণটি লক্ষ্য কর—প্রথম পংক্তির arএর সহিত দ্বিতীয় পংক্তির $\frac{b}{r}$ গুণ করিয়া হয় ab, এইরূপে $ar^2\times\frac{b}{r^2}=ab$ ইত্যাদি ক্রমে হইল।]

উদা. ৪. A is the arithmetic mean and G the geometric mean of two unequal positive real numbers p and q. Prove that $A>G>\frac{G^2}{A}$. [G. U. '50]

[দুইটি অসমান ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা p ও qএর সমান্তরীয় মধ্যক A এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক G ; প্রমাণ কর যে, $A>G>\frac{G^2}{A}$.]

এখানে $A=p$ ও q-এর সমান্তরীয় মধ্যক$=\frac{p+q}{2}$

এবং $G=p$ ও qএর গুণোত্তরীয় মধ্যক$=\sqrt{pq}$

$\therefore\quad \frac{G^2}{A}=\frac{pq}{\frac{p+q}{2}}=\frac{2pq}{p+q}=k$ (মনে কর)।

একণে, $\frac{p+q}{2}-\sqrt{pq}=\frac{p+q-2\sqrt{pq}}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2$, ইহা ধনাত্মক বলিয়া $\frac{p+q}{2}>\sqrt{pq}$ অর্থাৎ $A>G$ (প্রমাণিত হইল।)

আবার, $A.k=\frac{p+q}{2}\times\frac{2pq}{p+q}=pq=G^2=G.G$, কিন্তু $A>G$ প্রমাণিত হইয়াছে. $\therefore$ $k<G$ অর্থাৎ $G>\frac{G^2}{A}$, $\therefore$ $A>G>\frac{G^2}{A}$.

উদা. 9. The A.M. of a and b is to their G. M. as m is to n. Show that $a:b=m+\sqrt{m^2-n^2}:m-\sqrt{m^2-n^2}$.

[A. U. 1889]

[যদি a ও bএর সমান্তরীয় ও গুণোত্তরীয় মধ্যকদ্বয়ের অনুপাত $m:n$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a:b=m+\sqrt{m^2-n^2}:m-\sqrt{m^2-n^2}$.]

a ও b-র মধ্যে A. M.$=\frac{a+b}{2}$ এবং G. M.$=\sqrt{ab}$

$\therefore$ $\frac{a+b}{2}:\sqrt{ab}=m:n$ (স্বীকার),

বা, $\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}=\frac{m}{n}$, বা, $\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}}=\frac{m+n}{m-n}$ (comp. & div. দ্বারা)

বা, $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\frac{m+n}{m-n}$, বা, $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{m+n}}{\sqrt{m-n}}$ (বর্গমূল লইয়া)

বা, $\frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}}$ (comp. & div. দ্বারা),

বা, $\frac{a}{b}=\frac{m+n+m-n+2\sqrt{m^2-n^2}}{m+n+m-n-2\sqrt{m^2-n^2}}$ (বর্গ করিয়া পাই)

বা, $\frac{a}{b}=\frac{2(m+\sqrt{m^2-n^2})}{2(m-\sqrt{m^2-n^2})}$

$\therefore$ $a:b=m+\sqrt{m^2-n^2}:m-\sqrt{m^2-n^2}$.

উদা. 10. Show that if p and q are two unequal positive numbers, then $A>G>H$, where A is the Arithmetic mean and G is the Geometric mean and $H=\frac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$. [E. B. S. B. '48]

[যদি p ও q দুইটি অসমান ধনাত্মক সংখ্যার সমান্তরীয় মধ্যক A, গুণোত্তরীয় মধ্যক G এবং $H=\frac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ হয়, তবে দেখাও যে $A>G>H$.]

এস্থলে $A=\frac{p+q}{2}$, $G=\sqrt{pq}$, এবং $H=\frac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}=\frac{2}{\frac{p+q}{pq}}=\frac{2pq}{p+q}$

[অবশিষ্ট অংশ উদা. 8-এর ন্যায় কর ।]

Exercise 6

Find the geometric mean between :—

1. 5 and 125 2. $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{8}$. 3. -3 and -27.

4. -6 and $-2\frac{2}{3}$. 5. x^3y and xy^3 ; $3\sqrt{3}$ and $9\sqrt{3}$.

6. Insert 3 geometric means between 4 and 324. [C. U. 1890]

7. Insert 2 geometric means between 5 and 135. [C. U. '16]

8. Insert 3 geometric means between 25 and 164025. [Pat. U. '19]

9. Insert 3 geometric means between $\frac{1}{9}$ and 9. [C. U. '14]

10. Insert 9 geometric means between $\frac{81}{16}$ and $\frac{64}{729}$. [D. B. '30]

11. Show that the 2*n*th term of any G. P. is the mean proportional between the *n*th and 3*n*th terms. [C. U. 1877]

[প্রমাণ কর যে, যে-কোন গুণোত্তরীয় শ্রেণীর $2n$-তম পদ উহার n-তম এবং $3n$-তম পদের মধ্যসমানুপাতী ।]

12. In a G. P., show that the product of any two terms equidistant from a given term is equal to the square of the given term. [C. U. '15]

[প্রমাণ কর যে, গুণোত্তর শ্রেণীর যে কোন একটি পদ হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের গুণফল ঐ পদটির বর্গের সমান ।]

[**Hints :** মনে কর, প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অনুপাত $=r$ এবং m-তম পদটি প্রদত্ত । এখানে m-তম পদ $=ar^{m-1}$, $\therefore$ উহার বর্গ $=(ar^{m-1})^2$. এক্ষণে m-তম পদের পূর্বের p-তম ও পরের p-তম পদের গুণফল $=(ar^{m-1})^2$ দেখাইতে হইবে । m-তম পদের পূর্বের p-তম পদ $=\frac{ar^{m-1}}{r^p}=ar^{m-1-p}$ এবং m-তম পদের পরবর্তী p-তম পদ $=ar^{m-1}\times r^p=ar^{m-1+p}$.

$\therefore$ উহাদের গুণফল $=ar^{m-1-p}\times ar^{m-1+p}=a^2r^{2m-2}=(ar^{m-1})^2$.]

13. If the A. M. and G. M. of two quantities be respectively A and G, show that the quantities are $A\pm\sqrt{A^2-G^2}$.

[যদি দুইটি রাশির সমান্তরীয় ও গুণোত্তরীয় মধ্যক যথাক্রমে A ও G হয়, তবে দেখাও যে রাশি দুইটি $A \pm \sqrt{A^2 - G^2}$.]

14. If there be an odd number of terms in a G. P., show that the product of the first and the last terms is equal to the square of the middle term.

[যদি কোন গুণোত্তর শ্রেণীর পদসংখ্যা অযুগ্ম হয়, তবে প্রমাণ কর যে, উহার প্রথম ও শেষ পদের গুণফল উহার মধ্যপদের বর্গের সমান।]

15. If the number of terms in a G. P. be even, prove that the product of its two middle terms is equal to the product of its first and last terms.

[একটি গুণোত্তর শ্রেণীতে যুগ্ম সংখ্যক পদ আছে। প্রমাণ কর যে, উহার মধ্যপদ দুইটির গুণফল উহার প্রথম ও শেষ পদের গুণফলের সমান।]

[Hints : মনে কর, পদ-সংখ্যা $=2n$. $\therefore$ n-তম এবং $(n+1)$-তম পদদ্বয় শ্রেণীটির দুইটি মধ্যপদ (middle terms) হইবে।]

16. Find two numbers such that their A. M. is 25 and G. M. 24.

[এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের সমান্তরীয় মধ্যক 25 এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক 24 হইবে।]

17. If one arithmetic mean A and two [illegible]netric means p, q be inserted between two given nur[illegible]s, prove that $\frac{p^2}{q}+\frac{q^2}{p}=2A$.

[যদি দুইটি প্রদত্ত সংখ্যার সমান্তরীয় মধ্যকটি A এবং দুইটি গুণোত্তরীয় মধ্যক p ও q হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\frac{p^2}{q}+\frac{q^2}{p}=2A$.]

18. The A. M. between two numbers is thrice the G.M. between them. Show that the ratio of the two numbers is $3+2\sqrt{2} : 3-2\sqrt{2}$.

[দুইটি সংখ্যার সমান্তরীয় মধ্যকটি গুণোত্তরীয় মধ্যকটির 3 গুণ। প্রমাণ কর যে ঐ সংখ্যাদ্বয়ের অনুপাত $3+2\sqrt{2} : 3-2\sqrt{2}$.]

17. গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয়

উদাহরণমালা 9

উদা. 1. Find the sum of the first n terms of a G. P.
[C. U. '19, '29, '39, '40, '42 ; D. B. '32]

Or, Find the sum of n terms of a G. P., being given the first term and the common ratio. [C. U. '17]

Or, Find the sum of the first n terms of a G. P., the first term being a and the common ratio r.
[C. U. '16, '32, '35, '37 ; D. B. '39, '42]

Or, Find the sum of $a+ar+ar^2+ar^3+......$to n terms.
[C. U. '31 ; D. B. '36]

[উপরের প্রশ্নগুলি একই প্রশ্ন।]

মনে কর, শ্রেণীটির প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অনুপাত $=r$ এবং সমষ্টি $=s$.

এখানে পদসংখ্যা $=n$, সুতরাং n-তম পদ $=ar^{n-1}$.

অতএব $s=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$ ......(1)

এবং (1)×r করিয়া $sr= \quad ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n$...(2)

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই $s-sr=a-ar^n$,

বা, $s(1-r)=a(1-r^n)$, $\therefore \quad s=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}\cdots(3)$

আবার, (2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া পাই $sr-s=ar^n-a$

$$\therefore \quad s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\cdots(4)$$

[দ্রষ্টব্য : (1) উপরে যোগফলের দুইটি সূত্র পাওয়া গেল। r-এর মান এক অপেক্ষা বেশী ও ধনরাশি হইলে দ্বিতীয় সূত্র, অন্যথা প্রথম সূত্র প্রয়োগ করিবে। (2) শেষ পদ যদি l হয়, তবে $l=ar^{n-1}$; এখন সূত্র (4) হইতে পাই $s=\dfrac{ar^n-a}{r-1}=\dfrac{ar^{n-1}.r-a}{r-1}=\dfrac{lr-a}{r-1}$, শেষ পদ জানা থাকিলে এই সূত্র প্রয়োগ করিবে। (3) প্রতি অঙ্কে প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r, পদসংখ্যা n কত তাহা উদা. 2-এর মত আগে লিখিবে।]

উদা. 2. Find the sum of $1+2+4+\cdots$to 20 terms.
[C. U. '22]

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অনুপাত $r=\frac{2}{1}=2$ এবং পদসংখ্যা $n=20$.

মনে কর, যোগফল $=s$.

$$\therefore \quad s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{1(2^{20}-1)}{2-1}=2^{20}-1.$$

উদা. 3. Sum the series $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots$ to n terms.

[C. U. '12 ; '39 Sup.]

এস্থলে $a=1$, $r=\frac{1}{3}\div 1=\frac{1}{3}$, পদসংখ্যা $=n$; মনে কর সমষ্টি $=s$.

$$\therefore \quad s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{1\{1-(\frac{1}{3})^n\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1-\frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right).$$

উদা. 4. Find the sum of $1-3+9-27+\cdots$ to 13 terms.

এখানে $a=1$, $r=-3\div 1=-3$, $n=13$. মনে কর, সমষ্টি $=s$.

$$\therefore \quad s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{1\{1-(-3)^{13}\}}{1-(-3)}=\frac{1+3^{13}}{4}=\frac{1}{4}(1+3^{13}).$$

উদা. 5. Find the sum of $1-2+4-8+\cdots\cdots$ to n terms.

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অনুপাত $r=-2$. মনে কর, সমষ্টি $=s$.

$$\therefore \quad s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{1\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\frac{\{1-(-2)^n\}}{3}=\frac{1}{3}\{1-(-2)^n\}.$$

[দ্রষ্টব্য : উদা. 4-এ $(-3)^{13}$-এর ঘাত অযুগ্ম বলিয়া উহা ঋণরাশি, সুতরাং $-(-3)^{13}=$ ধনরাশি হইয়াছে। আর উদা. 5-এ $(-2)^n$ ধনরাশি কি ঋণরাশি তাহা নির্ণয় করা যায় না, কারণ, n যুগ্ম হইলে উহা ধনরাশি এবং n অযুগ্ম হইলে $(-2)^n$ ঋণরাশি হইবে।]

উদা. 6. Find the sum of $3+6+12+\cdots+384$.

এখানে $a=3$, $r=6\div 3=2$ এবং শেষ পদ $l=384$.

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় সমষ্টি}=\frac{lr-a}{r-1}=\frac{2\times 384-3}{2-1}=765.$$

উদা. 7. Find, without assuming any formula, the sum of $1+4+16+\ldots\ldots$ to 10 terms.

[কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া $1+4+16+\cdots\cdots$-এর 10টি পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর।]

এস্থলে $a=1$, $r=4\div1=4$.

এক্ষণে $t_1=1$, $t_2=4=1.4^1$, $t_3=16=1.4^2$.

অতএব স্পষ্টতঃ $t_{10}=1.4^9=4^9$. মনে কর, সমষ্টি $=s$.

$$\therefore\quad s=1+4+4^2+\cdots\cdots+4^9\quad\cdots\cdots(1)$$

$$\therefore\quad 4s=\quad 4+4^2+\cdots\cdots+4^9+4^{10}\quad\cdots(2)$$

এখন (2)—(1) করিয়া পাই $3s=4^{10}-1$. $\therefore\quad s=\frac{1}{3}(4^{10}-1)$.

উদা. 8. Find, without assuming any formula, the sum of n terms of $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots$

[C. U. '10, '18, '23, '33 ; D. B. '34, '40]

এখানে $t_1=1$, $t_2=\frac{1}{2^1}$, $t_3=\frac{1}{2^2}$, $\therefore$ স্পষ্টতঃ $t_n=\frac{1}{2^{n-1}}$.

মনে কর, সমষ্টি $=s$.

$$\therefore\quad s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cdots(1)$$

এবং $$\frac{1}{2}s=\quad\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\cdots(2)$$

[(1)কে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করিয়া]

এক্ষণে, (1)—(2) করিয়া পাই $\frac{1}{2}s=1-\frac{1}{2^n}$, $\therefore\ s=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

উদা. 9. Find the sum of n terms of a G. P. of which the 4*th* term is $\frac{1}{27}$ and the 7*th* term is $\frac{1}{729}$.

[কোন গুণোত্তর শ্রেণীর চতুর্থ পদ $\frac{1}{27}$ ও সপ্তম পদ $\frac{1}{729}$; উহার n পদের সমষ্টি কত ?]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অনুপাত $=r$.

$\therefore$ সর্তদ্বয় হইতে পাই $ar^3=\frac{1}{27}\cdots\cdots(1)$ এবং $ar^6=\frac{1}{729}\cdots(2)$

(2)÷(1) করিয়া পাই $ar^6\div ar^3=\frac{1}{729}\div\frac{1}{27}$, বা $r^3=\frac{1}{27}=(\frac{1}{3})^3$,

$\therefore\quad r=\frac{1}{3}$. $\therefore$ (1) হইতে $a.(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27}$, $\therefore\quad a=1$.

$$\text{এক্ষণে}\quad s_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{1\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{3}{2}\times\frac{(3^n-1)}{3^n}$$

$$=\frac{3^n-1}{2.3^{n-1}}.$$

উদা. 10. Find the sum of 10 terms of the series whose pth term is 3^p+3p.

এখানে $t_p=3^p+3p$, $\therefore$ $p=1, 2, 3, \cdots, 10$ পর্যন্ত বসাইয়া পাই

$$t_1=3^1+3.1$$
$$t_2=3^2+3.2$$
$$t_3=3^3+3.3$$
$$t_{10}=3^{10}+3.10$$

$\therefore$ সমষ্টি $s=(3+3^2+3^3+\cdots+3^{10})+3(1+2+3+\cdots+10)$

$$=\frac{3(3^{10}-1)}{3-1}+3\times\tfrac{10}{2}(10+1)=\tfrac{3}{2}(3^{10}-1)+165=\frac{3^{11}+327}{2}.$$

উদা. 11. Find the sum of $(a-x)+(a^2-x^2)+(a^3-x^3)+\cdots+(a^n-x^n)$. [C. U. '30]

প্রদত্ত শ্রেণী হইতে দুইটি গুণোত্তর শ্রেণী পাওয়া যায়।

মনে কর, সমষ্টি $=s$.

$\therefore$ $s=(a+a^2+a^3+\cdots+a^n)-(x+x^2+x^3+\cdots+x^n)$

$=(a+a^2+a^3+\cdots n$ পদ পর্যন্ত$)-(x+x^2+x^3+\cdots n$-পদ পর্যন্ত$)$

$$=\frac{a(a^n-1)}{a-1}-\frac{x(x^n-1)}{x-1}.$$

উদা. 12. Find the sum of the terms in the 12*th* group of the series $(1)+(3+3^2)+(3^3+3^4+3^5)+(3^6+3^7+3^8+3^9)+\cdots$

[$(1)+(3+3^2)+(3^3+3^4+3^5)+(3^6+3^7+3^8+3^9)+\cdots$ রাশির 12-তম বন্ধনীর অন্তর্গত পদগুলির সমষ্টি কত ?]

এখানে প্রথম বন্ধনীর মধ্যে 1টি, দ্বিতীয় বন্ধনীর মধ্যে 2টি, তৃতীয় বন্ধনীর মধ্যে 3টি এইভাবে পদ আছে। অতএব, 12-তম বন্ধনীতে পদসংখ্যা $=12$.

আবার দ্বিতীয় বন্ধনীতে প্রথম পদ 3^1, তৃতীয় বন্ধনীতে প্রথম পদ $=3^{1+2}$, চতুর্থ বন্ধনীতে প্রথম পদ $=3^{1+2+3}$; সুতরাং 12-তম বন্ধনীতে প্রথম পদ $=3^{1+2+3+\cdots+11}=3^{66}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $=3^{66}+3^{67}+3^{68}+\cdots\cdots 12$ পদ পর্যন্ত $=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$$=\frac{3^{66}(3^{12}-1)}{3-1}=\frac{3^{66}(3^{12}-1)}{2}.$$

উদা. 13. How many terms of the series 1, 2, 4,...must be taken so that the sum may be 255 ?

[1, 2, 4,···শ্রেণীর কয়টি পদের সমষ্টি 255 হয় ?]

মনে কর, শ্রেণীটির n-সংখ্যক পদের সমষ্টি 255. এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অনুপাত $r=2\div1=2$, এবং সমষ্টি $s=255$.

$\because \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}=s$, $\therefore \dfrac{1(2^n-1)}{2-1}=255$, বা $2^n-1=255$,

বা, $2^n=256=2^8$, $\therefore n=8$, $\therefore$ নির্ণেয় পদসংখ্যা $=8$.

উদা. 14. A certain sum of money produces every year twice as much interest as it did the previous year ; if it produces Rs. 50 in the first year, how much will it produce in 10 years ?

[কোন মূলধন হইতে প্রতিবৎসর পূর্ব-বৎসরের দ্বিগুণ সুদ হয়। প্রথম বৎসরের সুদ 50 টাকা হইলে 10 বৎসরে উহার মোট কত সুদ হইবে ?]

এখানে 10 বৎসরের মোট সুদ

$=(50+100+200+\cdots 10$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত) টাকা

$=\dfrac{50(2^{10}-1)}{2-1}$ টা. $=50(2^{10}-1)$ টা. $=51150$ টাকা।

Exercise 7

যোগফল নির্ণয় কর :—

1. $1+2+4+8+\cdots\cdots$ 8 পদের [C. U. '21]
2. $128+64+32+\cdots\cdots 9$ পদের
3. $1+3+9+27+\cdots\cdots n$ পদের [C. U. '24, '47]
4. $1-3+9-27+\cdots\cdots 2n$ পদের
5. $2+1+\frac{1}{2}+\cdots 8$ পদের
6. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots n$ পদের
7. $\frac{1}{\sqrt{3}}+1+\sqrt{3}+3+\cdots\cdots 18$ পদের
8. $1+2^{-1}+4^{-1}+8^{-1}+\cdots\cdots 10$ পদের
9. $\cdot5+\cdot05+\cdot005+\cdots$, $(n-1)$ সংখ্যক পদের
10. $\frac{1}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}+\frac{6}{10000}+\cdots\cdots n$ পদ পর্যন্ত [C. U. 11]
11. $3-6+12-\cdots\cdots-384$.
12. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{256}$.
13. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\cdots\cdots n$ পদের

14. $\frac{a+b}{a-b}, 1, \frac{a-b}{a+b}, \ldots r$ পদের 15. $\frac{1}{\sqrt{2}}+1+\sqrt{2}+\cdots 12$ পদের

16. $1-2+4-8+\cdots 2p$ পদের 17. $12+24+48+\cdots+768$

18. $\sqrt{2}+1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots 10$ পদ পর্যন্ত

কোন সূত্র-সাহায্য না লইয়া সমষ্টি নির্ণয় কর :—

19. $4+2+1+\cdots 10$ পদের 20. $2+4+8+\cdots n$ সংখ্যক পদের

21. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots n$ পদ পর্যন্ত [C. U. '12]

22. $6+12+24+\cdots\cdots+768.$

23. যে শ্রেণীর n-তম পদ 2^n+2n, তাহার 8টি পদের সমষ্টি কত ?

24. $128+64+32+\cdots\cdots$এই শ্রেণীর কয়টি পদের সমষ্টি $255\frac{3}{4}$?

25. $1-2+4-8+\cdots\cdots$শ্রেণীটির কয়টি পদের সমষ্টি -85 হইবে ?

26. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots$, এই শ্রেণীর কয়টি পদ যোগ করিলে $1\frac{121}{243}$ হয় ?

27. একটি শ্রেণীর r-তম পদ $r+(\frac{1}{2})^r$ হইলে উহার প্রথম 6টি পদের সমষ্টি কত ?

28. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর দ্বিতীয় পদ -3 এবং পঞ্চম পদ 81 ; উহার 9টি পদের সমষ্টি কত ?

29. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম ও তৃতীয় পদ যথাক্রমে 2 ও $\frac{1}{2}$; উহার 8টি পদের সমষ্টি কত ?

30. The sum of the first and second terms of a G. P. is 12, and that of its fourth and fifth terms is 324. Find the sum of the first six terms of the series. [E. B. S. B. '49]

[কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম ও দ্বিতীয় পদের সমষ্টি 12, এবং উহার চতুর্থ ও পঞ্চম পদের সমষ্টি 324 ; উহার প্রথম ছয়টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।]

31. Find the sum of 25 terms of a G. P. whose 4th term is 20 and 7th term 160. [D. B. '45]

[যে গুণোত্তর শ্রেণীর চতুর্থ ও সপ্তম পদ যথাক্রমে 20 ও 160 তাহার প্রথম 25টি পদের সমষ্টি কত ?]

32. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম 6টি পদের সমষ্টি প্রথম 3টি পদের সমষ্টির 9 গুণ। যদি উহার সপ্তম পদটি $38\frac{1}{4}$ হয়, তবে প্রথম 10টি পদের সমষ্টি কত ?

33. A mango tree yields every year twice as many mangoes as it did the previous year. If it yields 100 mangoes in the first year, how many mangoes will it yield in 8 years ?

[একটি আম গাছে প্রত্যেক বৎসর পূর্ব বৎসরের দ্বিগুণ আম হয়। প্রথম বৎসরে উহাতে 100টি আম হইলে 8 বৎসরে কয়টি আম হইবে ?]

34. Divide 21 into three parts such that they are in G.P. and their product is 64. [G. U. '53]

[21কে এরূপ তিন অংশে বিভক্ত কর যেন অংশগুলি গুণোত্তরীয় শ্রেণীতে থাকে ও তাহাদের গুণফল 64 হয়।]

18. প্রগতি সম্বন্ধীয় বিবিধ প্রশ্নের সমাধান

উদাহরণমালা 10

উদা. 1. If a, b, c, d are in G. P., show that a^2+b^2, b^2+c^2 and c^2+d^2 are also in G. P. [C. U. '19]

[যদি a, b, c ও d গুণোত্তর শ্রেণী হয়, তবে দেখাও যে a^2+b^2, b^2+c^2 এবং c^2+d^2 একটি গুণোত্তর শ্রেণী।]

এস্থলে a, b, c, d একটি গুণোত্তর শ্রেণী। মনে কর, সাধারণ অনুপাত $=r$.

$$\therefore \quad b=ar,\ c=ar^2,\ d=ar^3.$$

$$\therefore \quad a^2+b^2=a^2+a^2r^2=a^2(1+r^2),$$

$$b^2+c^2=a^2r^2+a^2r^4=a^2r^2(1+r^2),$$

$$c^2+d^2=a^2r^4+a^2r^6=a^2r^4(1+r^2).$$

একণে, $a^2(1+r^2)$, $a^2r^2(1+r^2)$, $a^2r^4(1+r^2)$ এই পদ তিনটি গুণোত্তর শ্রেণী, কারণ, ইহাদের সাধারণ অনুপাত $=r^2$.

$\therefore \quad a^2+b^2,\ b^2+c^2,\ c^2+d^2$ একটি গুণোত্তর শ্রেণী।

উদা. 2. If a, b, c are in G. P., prove that $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ are in A.P. [D. B. '46 ; G. U. '48]

মনে কর, a, b, c এই প্রদত্ত গুণোত্তর শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত r,

$$\therefore \quad b=ar,\ c=ar^2.$$

$\frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ সমান্তর শ্রেণী হইবে যদি প্রমাণ করা যায় যে

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{1}{2b}\times 2=\frac{1}{b}.$$

একণে, $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+ar}+\frac{1}{ar+ar^2}=\frac{1}{a(1+r)}+\frac{1}{ar(1+r)}$

$$=\frac{r+1}{ar(1+r)}=\frac{1}{ar}=\frac{1}{b}.$$

অতএব, $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

উদা. 3. If a, b, c be in A. P. and a, b, d in G. P., show that $a, a-b, d-c$ are in G. P. [C. U. '10]

[a, b, c সমান্তর শ্রেণী এবং a, b, d গুণোত্তর শ্রেণী হইলে প্রমাণ কর যে $a, a-b, d-c$ একটি গুণোত্তর শ্রেণী।]

$\because$ a, b, c সমান্তর শ্রেণী, $\therefore$ $a+c=2b$, বা $a-2b=-c \cdots(1)$

আবার, $\because$ a, b, d গুণোত্তর শ্রেণী, $\therefore$ $b^2=ad \cdots(2)$.

$a, a-b, d-c$ গুণোত্তর শ্রেণী বলা যাইবে, যদি প্রমাণ করা যায় যে $(a-b)^2=a(d-c)=ad-ac$.

একণে, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=b^2+a(a-2b)$

$=ad+a\times -c=ad-ac$ [(1) ও (2) হইতে]

$\therefore$ $a, a-b, d-c$ গুণোত্তর শ্রেণী হইল।

[দ্রষ্টব্য : উদা. 1 ও উদা. 2-এ প্রদর্শিত প্রণালীতেও এই অঙ্ক করা যায়।]

উদা. 4. Insert between 6 and 16 two numbers such that the first three may be in A. P. and the last three in G. P.

[6 ও 16-এর মধ্যে এরূপ দুইটি সংখ্যা বসাও যেন প্রথম তিনটি সংখ্যা সমান্তর শ্রেণীতে এবং শেষ তিনটি সংখ্যা গুণোত্তর শ্রেণীতে থাকে।]

মনে কর, সংখ্যাদ্বয় b ও c.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত অনুসারে $6, b, c$ সমান্তর শ্রেণী$\cdots(1)$

এবং $b, c, 16$ গুণোত্তর শ্রেণী$\cdots(2)$.

(1) হইতে পাই $2b=6+c \cdots(3)$, এবং (2) হইতে পাই $c^2=16b \cdots(4)$.

এখন (3) ও (4) হইতে পাই $c^2=8.2b=8(6+c)=48+8c$,

বা, $c^2-8c-48=0$, বা, $(c-12)(c+4)=0$, $\therefore$ $c=12$ বা -4

যদি $c=12$ হয়, তবে (3) হইতে পাই $b=9$.

যদি $c=-4$ হয়, " " " " $b=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় $=9$ ও 11, অথবা 1 ও -4.

উদা. 5. Insert 2 numbers between 5 and 135 so that the four may form a G. P. [C. U. '16]

[5 ও 135-এর মধ্যে এরূপ দুইটি সংখ্যা বসাও যেন সংখ্যা চারিটি গুণোত্তর শ্রেণীতে থাকে।]

মনে কর, উৎপন্ন গুণোত্তর শ্রেণীটির সাধারণ অনুপাত r, প্রথম পদ$=5$.

$\therefore\quad 135=t_4=5r^3$, বা, $r^3=27=(3)^3$, $\therefore\quad r=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয়$=5\times 3$ ও $5\times 3^2=15$ ও 45.

উদা. 6. The sum of three quantities in G. P. is $24\frac{4}{5}$ and their product is 64 ; find them. [A. U. ; E. B. S. B. '50]

[তিনটি গুণোত্তরীয় রাশির সমষ্টি $24\frac{4}{5}$ এবং তাহাদের গুণফল 64, সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।]

মনে কর, সংখ্যাত্রয়$=\frac{a}{r}, a, ar$;

$\therefore$ সর্তানুসারে $\frac{a}{r}\times a\times ar=64\cdots(1)$ এবং $\frac{a}{r}+a+ar=24\frac{4}{5}\cdots(2)$.

এখন, (1) হইতে $a^3=64$, $\therefore\quad a=4$.

(2) হইতে $\frac{4}{r}+4+4r=\frac{124}{5}$ [$\because\quad a=4$],

বা, $\frac{4}{r}+4r=\frac{124}{5}-4=\frac{104}{5}$, বা, $\frac{1}{r}+r=\frac{26}{5}$,

বা, $5r^2-26r+5=0$, বা, $(r-5)(5r-1)=0$, $\therefore\ r=5$ বা $\frac{1}{5}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাত্রয়$=\frac{4}{5}, 4, 20$; অথবা $20, 4, \frac{4}{5}$.

উদা. 7. If a, b, c be respectively the pth, qth and rth terms of a G. P., prove that $a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=1$.

[C. U. '51 ; G. U. '50 ; S F. '53 ; H.S. '68 ; C. Pre-U. '63]

[a, b, c কোন গুণোত্তর শ্রেণীর p-তম, q-তম ও r-তম পদ হইলে, প্রমাণ কর যে $a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=1$.]

মনে কর, প্রথম পদ$=f$ এবং সাধারণ অনুপাত$=d$.

$\therefore\quad a=fd^{p-1}$, $b=fd^{q-1}$ এবং $c=fd^{r-1}$.

$\therefore\quad a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=(fd^{p-1})^{q-r}.(fd^{q-1})^{r-p}.(fd^{r-1})^{p-q}$

$=f^{q-r}.d^{pq-q-pr+r}\times f^{r-p}.d^{qr-r-pq+p}\times f^{p-q}.d^{rp-p-qr+q}$

$=f^{q-r+r-p+p-q}\times d^{pq-q-pr+r+qr-r-pq+p+rp-p-qr+q}$

$=f^0\times d^0=1\times 1=1$.

উদা. 8. If a, b, c be in A. P., and x, y, z in G. P., prove that $x^{b-c}.y^{c-a}.z^{a-b}=1$. [C. U. '44, '50 ; G. U. '49]

$\because$ a, b, c সমান্তর শ্রেণী, $\therefore$ $2b=a+c$, বা $a-b=b-c$;

$\because$ x, y, z গুণোত্তর শ্রেণী, $y^2=xz$.

এক্ষণে, $x^{b-c}.y^{c-a}.z^{a-b}=x^{a-b}.y^{c-a}.z^{a-b}$ [$\because$ $b-c=a-b$]

$=(xz)^{a-b}.y^{c-a}=(y^2)^{a-b}.y^{c-a}=y^{2a-2b+c-a}$

$=y^{a+c-2b}=y^{2b-2b}=y^0=1$.

উদা. 9. Sum to n terms the series $4+44+444+\cdots\cdots$ [Pat. U. '18]

মনে কর, যোগফল$=s$.

$s=4+44+444+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=4(1+11+111+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$=\frac{4}{9}(9+99+999+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$=\frac{4}{9}\{(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots n$ সংখক পদ পর্যন্ত$\}$

$=\frac{4}{9}\{(10+10^2+10^3+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত$)-(n$ সংখ্যক $1)\}$

$$=\frac{4}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}=\frac{40}{81}(10^n-1)-\frac{4n}{9}.$$

উদা. 10. Sum to n terms $\cdot9+\cdot99+\cdot999+\cdots\cdots$ [C. U.]

মনে কর, সমষ্টি$=s$.

$s=\cdot9+\cdot99+\cdot999+\cdots\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=(1-\cdot1)+(1-\cdot01)+(1-\cdot001)+\cdots\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=(n$ সংখ্যক $1)-(\cdot1+\cdot01+\cdot001+\cdots\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$$=n-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots n \text{ সংখক পদ পর্যন্ত}\right)$$

$$=n-\frac{\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)}{1-\frac{1}{10}}=n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right).$$

উদা. 11. Sum $1+4+10+22+46+\cdots$to n terms.

মনে কর, সমষ্টি$=s$ এবং n-তম পদ$=t_n$.

$s=1+4+10+22+46+\cdots+t_n$

আবার $s=1+4+10+22+\cdots+t_{n-1}+t_n$ [এক পদ সরাইয়া লেখা হইল]

(বিয়োগ) $0=(1+3+6+12+24+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত$)-t_n$

$\therefore\ t_n = 1+3+6+12+24+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$= 1+\{3+6+12+24+\cdots(n-1)$* সংখ্যক পদ পর্যন্ত$\}$

$= 1+\dfrac{3(2^{n-1}-1)}{(2-1)} = 1+3(2^{n-1}-1) = 3.2^{n-1}-2.$

এখন $n=1, 2, 3, \cdots, n$ পর্যন্ত বসাইয়া পাই

$t_1 = 3.1\ -2$

$t_2 = 3.2\ -2$

$t_3 = 3.2^2-2$

$= 3.2^{n-1}-2$

$\therefore\ s = 3(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})-2n$

$= 3(1+2+2^2+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত$)-2n = 3\times\dfrac{1(2^n-1)}{2-1}-2n$

$= 3.2^n-3-2n.$

উদা. 12. Sum to n terms $1+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{15}{8}+\cdots$ [C. U.]

$s = 1+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{15}{8}+\cdots+t_n$

আবার, $s = \quad 1+\frac{3}{2}+\ \frac{7}{4}+\cdots+t_{n-1}+t_n$

(বিয়োগ) $0 = (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত$)-t_n$

$\therefore\ t_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত $= \dfrac{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right);$

এখন $n=1, 2, 3, \cdots, n$ লিখিয়া পাই

$t_1 = 2(1-\frac{1}{2})$

$t_2 = 2\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)$

$t_3 = 2\left(1-\dfrac{1}{2^3}\right)$

....

$t_n = 2\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$

$\therefore\ s = 2\left\{n-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)\right\}$

$= 2\left\{n-\dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}\right\} = 2\left\{n-1+\dfrac{1}{2^n}\right\} = 2n-2+\dfrac{1}{2^{n-1}}.$

*এখানে 1 ব্যতীত অন্য পদগুলি গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত বলিয়া শ্রেণীর পদসংখ্যা $n-1$ ধরা হইল।

উদা. 13. Sum $1+2a+3a^2+4a^3+\cdots$ to n terms.

এখানে স্পষ্টত: $t_n=n.a^{n-1}$.

$\therefore \quad s=1+2a+3a^2+4a^3+\cdots n.a^{n-1}$

এবং $sa= \quad a+2a^2+3a^3+\cdots+(n-1)a^{n-1}+n.a^n$

[a দ্বারা গুণ করিয়া]

$\therefore$ (বিয়োগ) $s(1-a)=(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1})-na^n$

$$=\frac{1(1-a^n)}{1-a}-na^n, \qquad s=\frac{1-a^n}{(1-a)^2}-\frac{na^n}{1-a}.$$

উদা. 14. Sum to n terms $(1)+(1+3)+(1+3+3^2)+(1+3+3^2+3^3)+\cdots\cdots$ [C. U. '31]

এখানে n-তম পদ অর্থাৎ $t_n=(1+3+3^2+3^3+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$$=\frac{1(3^n-1)}{3-1}=\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)=\frac{1}{2}.3^n-\frac{1}{2}.$$

এখন, $n=1, 2, 3, \cdots, n$ পর্যন্ত বসাইয়া পাই

$$t_1=\tfrac{1}{2}.3^1-\tfrac{1}{2}$$
$$t_2=\tfrac{1}{2}.3^2-\tfrac{1}{2}$$
$$t_3=\tfrac{1}{2}.3^3-\tfrac{1}{2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=\tfrac{1}{2}.3^n-\tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \quad s=\frac{1}{2}\left(3+3^2+3^3+\cdots+3^n\right)-\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}\times\frac{3(3^n-1)}{3-1}-\frac{n}{2}$$

$$=\frac{3}{4}\left(3^n-1\right)-\frac{n}{2}=\frac{3^{n+1}}{4}-\frac{3}{4}-\frac{n}{2}=\frac{1}{4}\left(3^{n+1}-3-2n\right).$$

উদা. 15. If a, b, c be in G. P., and x, y be the arithmetic means between a, b and b, c respectively, prove that $\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2$ and $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{b}$. [P. U. 1892]

[a, b, c একটি গুণোত্তর শ্রেণী ; x ও y যথাক্রমে a ও b-এর এবং b ও c-এর সমান্তরীয় মধ্যক। প্রমাণ কর যে

$$\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2 \text{ এবং } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{b}.$$]

$\because$ a, b, c গুণোত্তর শ্রেণী, $\therefore b=ar, c=ar^2$ [r=সাধারণ অনুপাত]

আবার, $\because$ x ও y যথাক্রমে a ও bএর এবং b ও cএর সমান্তরীয় মধ্যক,

$$\therefore \quad x=\frac{a+b}{2} \text{ এবং } y=\frac{b+c}{2}.$$

এক্ষণে, $\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=\frac{a}{\frac{a+b}{2}}+\frac{c}{\frac{b+c}{2}}=2\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)=2\left(\frac{a}{a+ar}+\frac{ar^2}{ar+ar^2}\right)$

$$=2\left(\frac{ar+ar^2}{ar+ar^2}\right)=2.$$

আবার, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\frac{a+b}{2}}+\frac{1}{\frac{b+c}{2}}=2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)$

$$=2\left(\frac{1}{a+ar}+\frac{1}{ar+ar^2}\right)=2\left(\frac{r+1}{ar+ar^2}\right)$$

$$=2\times\frac{r+1}{ar(r+1)}=\frac{2}{ar}=\frac{2}{b}.$$

উদা. 16. If S be the sum, P the product, and R the sum of the reciprocals of n terms in G.P., prove that $\left(\frac{S}{R}\right)^n=P^2$.

[C. U. 1883 ; C. Pre-U., B. U. E. '64]

[যদি কোন গুণোত্তর শ্রেণীর n-পদের সমষ্টি S, গুণফল P এবং পদগুলির অন্যোন্যকগুলির সমষ্টি R হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\left(\frac{S}{R}\right)^n=P^2$.]

মনে কর, গুণোত্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ$=a$, সাধারণ অনুপাত$=r$,

পদসংখ্যা$=n$ এবং শেষ পদ$=l$; সুতরাং $S=a+ar+\cdots+l=\frac{rl-a}{r-1}$.

$\because$ অন্যোন্যক পদগুলি $\frac{1}{a}, \frac{1}{ar}, \frac{1}{ar^2}, \ldots\ldots, \frac{1}{l}$

$$\therefore \quad R=\frac{\frac{1}{r}\times\frac{1}{l}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{r}-1}=\frac{\frac{a-rl}{arl}}{\frac{1-r}{r}}=\frac{(a-rl)r}{(1-r)arl}=\frac{(rl-a)}{(r-1)al}.$$

$$\therefore \quad \left(\frac{S}{R}\right)^n=\left\{\frac{rl-a}{r-1}\times\frac{(r-1)al}{(rl-a)}\right\}^n=(al)^n.$$

একণে, $P = a \times ar \times ar^2 \times \cdots \times \frac{l}{r^2} \times \frac{l}{r} \times l \quad \cdots(1)$

আবার, $P = l \times \frac{l}{r} \times \frac{l}{r^2} \times \cdots \times ar^2 \times ar \times a$ [উল্টাইয়া লিখিয়া]$\cdots(2)$

$\therefore (1) \times (2)$ করিয়া $P^2 = al \times al \times al \times \cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত $= (al)^n$

$\therefore \quad \left(\frac{S}{R}\right)^n = P^2.$

উদা. 17. Show that the pth, qth, rth terms of a geometrical progression are in geometrical progression if p, q, r be in arithmetical progression. [W. B. S. F. 1952]

[প্রমাণ কর যে, কোন গুণোত্তর শ্রেণীর p-তম, q-তম ও r-তম পদগুলিও গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করিবে যদি p, q, r সমান্তর শ্রেণী হয়।]

মনে কর, শ্রেণীটির প্রথম পদ $= f$ এবং সাধারণ অনুপাত $= d$.

$\therefore$ উহার p-তম পদ $= fd^{p-1}$, q-তম পদ $= fd^{q-1}$,

এবং r-তম পদ $= fd^{r-1}$.

একণে, fd^{p-1}, fd^{q-1}, এবং fd^{r-1} গুণোত্তর শ্রেণী হইবে,

যদি $(fd^{q-1})^2 = fd^{p-1} \times fd^{r-1}$ হয়, অর্থাৎ যদি $f^2d^{2q-2} = f^2d^{p+r-2}$ হয়,

অর্থাৎ যদি $d^{2q-2} = d^{p+r-2}$ হয়, অর্থাৎ যদি $2q-2 = p+r-2$ হয়,

অর্থাৎ যদি $2q = p+r$ হয়, অর্থাৎ যদি p, q, r সমান্তর শ্রেণী হয়।

Exercise 8

1. If x, y, z be in G. P., show that $x^2y^2z^2\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}\right) = x^3 + y^3 + z^3$.

2. If a, b, c, d be in G. P., prove that
   (i) $a^2 - b^2, b^2 - c^2, c^2 - d^2$ are in G. P.
   (ii) $a^2 + b^2 + c^2, ab + bc + cd, b^2 + c^2 + d^2$ are in G. P.
   (iii) $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = (a-d)^2$.
   [C. U. '43 ; D. B. '25, '26]

Find the sum of :—

3. $7 + 77 + 777 + \cdots\cdots$ to n terms.
4. $2 + 22 + 222 + \cdots\cdots$ to n terms.
5. $\cdot2 + \cdot22 + \cdot222 + \cdots\cdots$ to n terms.
6. $1.2 + 2.3 + 4.4 + 8.5 + \cdots\cdots$ to n terms.
7. $1 + 3 + 7 + 15 + \cdots\cdots$ to n terms. [D. B. '25, '26, '38]
8. $1 + 4 + 13 + 40 + 121 + \cdots\cdots$ to n terms.

9. If a be the first term of a G. P., l the nth term and P the product of first n terms, show that $P=(al)^{\frac{n}{2}}$.
[C. U. '18 ; D. B. '30, '33, '43, '47]

[কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a, n-তম পদ l এবং প্রথম n পদের গুণফল P ; প্রমাণ কর যে $P=(al)^{\frac{n}{2}}$.]

10. Sum to n terms the series of which the rth term is 2^r+2r.
[D. B. '41]

11. If of three consecutive terms of a G. P., the middle term is 6 and the first and third terms are together equal to 15 ; find the series.
[C. U. '32]

[কোন গুণোত্তর শ্রেণীর ক্রমিক তিনটি পদের মধ্যপদটি 6 এবং প্রথম ও তৃতীয় পদের সমষ্টি 15 ; ঐ শ্রেণীটি নির্ণয় কর।]

12. Sum to n terms the series $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\cdots$

13. Three numbers whose sum is 15 are in A. P. ; if 1, 4 and 19 be added to them respectively the results are in G. P. Find the numbers.
[C. U. '50]

[সমান্তর শ্রেণীতে আছে এরূপ তিনটি পদের সমষ্টি 15 এবং উহাদের সহিত যথাক্রমে 1, 4 ও 19 যোগ করিলে যোগফলগুলি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে। সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।]

14. From three numbers in G. P. three other numbers in G. P. are subtracted and the remainders are found to be in G. P. ; prove that the three series must have the same common ratio.
[B. U. 1890]

[গুণোত্তর শ্রেণীতে আছে এরূপ তিনটি সংখ্যা হইতে অন্য একটি গুণোত্তর শ্রেণীতে আছে এরূপ তিনটি সংখ্যা যথাক্রমে বিয়োগ করায় অন্তরফলগুলিও একটি গুণোত্তর শ্রেণী হইল। প্রমাণ কর যে ঐ শ্রেণী তিনটির একই সাধারণ অনুপাত।]

15. If s_1, s_2, s_3 be respectively the sums of n, $2n$ and $3n$ terms of a G.P., prove that $s_1(s_3-s_2)=(s_2-s_1)^2$. [B.U. 1882]

[কোন গুণোত্তর শ্রেণীর n, $2n$ ও $3n$ পদের সমষ্টি যথাক্রমে s_1, s_2, s_3 হইলে প্রমাণ কর যে $s_1(s_3-s_2)=(s_2-s_1)^2$.]

16. What must be added to x, y, z to bring them into G. P.?

17. If G be the geometric mean, and M and N be two A. M.'s between two given quantities, show that $G^2=(2M-N)(2N-M)$.

[যদি দুইটি প্রদত্ত রাশির গুণোত্তরীয় মধ্যকটি G হয় এবং উহাদের মধ্যে M ও N দুইটি সমান্তরীয় মধ্যক হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$G^2=(2M-N)(2N-M) \text{]}$$

[Hints : মনে কর, সংখ্যাদ্বয় a, b. $\therefore$ $G^2=ab$.

আবার, $\because$ a, M, N, b সমান্তর শ্রেণী, $\therefore$ a, M, N এবং M, N, b দুইটি সমান্তর শ্রেণী। $\therefore$ $2M=N+a$ এবং $2N=M+b\cdots$]

18. If the A. M. between p and q be twice their G. M., then $\frac{p}{q}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ or $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.

[যদি p ও q-এর মধ্যে সমান্তরীয় মধ্যকটি গুণোত্তরীয় মধ্যকের দ্বিগুণ হয়, তবে দেখাও যে $\frac{p}{q}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ অথবা $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$].

[Hints : $\frac{p+q}{2}=\pm 2\sqrt{pq}$, বা $\frac{(p+q)^2}{4}=4pq$, বা $\frac{(p+q)^2}{4pq}=\frac{4}{1}\cdots(1)$

$\therefore$ $\frac{(p+q)^2-4pq}{4pq}=\frac{3}{1}$ (by dividendo), বা $\frac{(p-q)^2}{4pq}=\frac{3}{1}\cdots(2)$

(1)$\div$(2) করিয়া $\frac{(p+q)^2}{(p-q)^2}=\frac{4}{3}$, বা $\frac{p+q}{p-q}=\frac{2}{\sqrt{3}}$,

$\therefore$ $\frac{2p}{2q}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ (by comp. and div.)$\cdots$

(2)-কে $\frac{(q-p)^2}{4pq}=3$ এইরূপ লিখিলে অনুরূপে পাই $\frac{p}{q}=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$].

19. Three numbers whose product is 512 are in G. P.; if 8 be added to the first and 6 to the second, the resulting numbers and the third are in A. P. Find the numbers.
[C. U. (High) '50]

[গুণোত্তর শ্রেণীতে আছে এরূপ তিনটি সংখ্যার গুণফল 512 এবং প্রথমটির সহিত 8 ও দ্বিতীয়টির সহিত 6 যোগ করিলে যোগফল দুইটি ও তৃতীয় সংখ্যাটি একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে। সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।]

20. If m, n, p be in A. P., then the mth, nth and pth terms of a G. P., are in G. P.

[প্রমাণ কর যে কোন গুণোত্তর শ্রেণীর m-তম, n-তম ও p-তম পদগুলিও একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করিবে যদি m, n, p একটি সমান্তর শ্রেণী হয়।]

21. If a, b, c are in G. P., show that $a+c>2b$, where a, b, c are positive. [C. U. '47 (Addl.)]

[যদি a, b, c গুণোত্তর শ্রেণীতে থাকে ও ধনাত্মক হয়, তবে প্রমাণ কর যে $a+c>2b$.]

22. The sum of three numbers in G. P. is 7 and the sum of their squares is 21 ; find the sum of their cubes. [S. F. '59]

[কোন গুণোত্তর শ্রেণীর ক্রমিক 3টি পদের সমষ্টি 7 এবং তাহাদের বর্গের সমষ্টি 21, তাহাদের ত্রিঘাতের সমষ্টি নির্ণয় কর।]

23. In a G. P. if a, b, c be the nth, $2n$th, and $3n$th terms respectively, show that $b^2=ac$.

[যদি কোন গুণোত্তর শ্রেণীতে a, b, c যথাক্রমে n-তম, $2n$-তম ও $3n$-তম পদ হয়, তবে দেখাও যে $b^2=ac$.]

24. The sum of three numbers in G. P. is 13 and the sum of their squares is 91, find the sum of their cubes.

[কোন গুণোত্তর শ্রেণীর পর পর 3টি সংখ্যার সমষ্টি 13 এবং উহাদের বর্গের সমষ্টি 91 ; উহাদের ত্রিঘাতের সমষ্টি কত ?]

25. If the pth, qth and rth terms of both an A. P. and a G. P. be respectively a, b and c, then prove that $a^{b-c}.\ b^{c-a}.\ c^{a-b}=1$.

[কোন সমান্তর শ্রেণীর ও গুণোত্তর শ্রেণীর উভয়েরই p-তম, q-তম ও r-তম পদ যথাক্রমে a, b ও c হইলে প্রমাণ কর যে $a^{b-c}.\ b^{c-a}.\ c^{a-b}=1$.]

Harmonic Progression (বিপরীত প্রগতি)

19. সংজ্ঞা : যদি কোন শ্রেণীর (series) অন্তর্গত রাশিগুলির অন্যোন্যক-গুলি (reciprocals) সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, তবে ঐ শ্রেণীটি (রাশিগুলি) বিপরীত প্রগতিতে (in Harmonic progression) আছে বলা হয়।

যথা, a, b, c, d,......শ্রেণীটি বিপরীত প্রগতিতে থাকিবে, যদি $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ .....একটি সমান্তর শ্রেণী হয়।

Harmonic (বা Harmonical) Progression-কে সংক্ষেপে H. P. লেখা হয়, সুতরাং বিপরীত প্রগতিকে সংক্ষেপে বিঃ প্রঃ লেখা যাইতে পারে।

অনুসিদ্ধান্ত। মনে কর, a, b, c পদ তিনটি বিপরীত প্রগতির তিনটি ক্রমিক পদ।

অতএব, এখানে $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ সমান্তর শ্রেণীর তিনটি ক্রমিক পদ,

$\therefore \quad \frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b} \cdots$(A), বা, $\frac{a-b}{ab}=\frac{b-c}{bc}$, বা, $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c} \cdots(1)$

আবার, (A) হইতে পাই $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \cdots\cdots(2)$.

এবং $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{a+c}{ac}$, $\quad \therefore \quad b=\frac{2ac}{a+c} \cdots\cdots(3)$

এক্ষণে, (1) হইতে এই সংজ্ঞা করা যায় যে, তিনটি রাশি বিপরীত প্রগতিতে থাকে, যদি প্রথম রাশি ও তৃতীয় রাশির অনুপাত প্রথম ও দ্বিতীয়ের অন্তরের সহিত দ্বিতীয় ও তৃতীয়টির অন্তরের অনুপাতের সমান হয়।

[**দ্রষ্টব্য :** a, $a+b$, $a+2b$,......ইত্যাদি যদি একটি সমান্তর শ্রেণী হয়, তবে $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+2b}$......ইত্যাদি বিঃ প্রঃ হইবে।

আবার, $a, a+b, a+2b$,......শ্রেণীর n-তম পদ $a+(n-1)b$.

অতএব, ঐ বিঃ প্রঃ-এর n-তম পদ $=\frac{1}{a+(n-1)b}$.]

বিপরীত প্রগতির মধ্যক

20. তিনটি রাশি বিপরীত প্রগতিতে থাকিলে মধ্যের রাশিটিকে অন্য দুইটির বিপরীত মধ্যক (Harmonic mean) বলে। যথা a, b ও c বিঃ প্রগতির তিনটি ক্রমিক পদ হইলে a ও c-র বিপরীত মধ্যক b হইবে।

অনুরূপে দেখ, আমরা দেখিয়াছি যে a, b, c বিঃ প্রগতির তিনটি ক্রমিক পদ হইলে $b=\frac{2ac}{a+c}$ হয়।

অতএব, এখানে দুইটি পদের সহিত তাহাদের মধ্যকটির সম্বন্ধ পাওয়া গেল।

[**দ্রষ্টব্য :** (1) বিপরীত প্রগতির কোন শ্রেণীর (series) অন্তর্গত পদগুলির অন্যোন্যকগুলি সমান্তর শ্রেণী হইয়া থাকে। অতএব, কোন বিঃ প্রগতির কোন একটি পদ (যথা, n-তম) নির্ণয়ের জন্য প্রথমে বিঃ প্রঃ শ্রেণীর পদগুলির অন্যোন্যকের n-তম পদ নির্ণয় করিয়া সেই পদটির অন্যোন্যকই হইবে বিঃ প্রগতির n-তম পদ।

(2) দুই পদের মধ্যে n-সংখ্যক বিপরীত মধ্যক নির্ণয়েরও এই প্রণালী। সংজ্ঞা ভিন্ন অন্য কিছু পাঠ্য নহে বলিয়া বিপরীত প্রগতি বিষয়ে আর কিছু আলোচনা করা হইল না।]

Variation (ভেদ)

তোমরা জান যে, যদি কোন রাশিমালার অন্তর্গত কোন একটি রাশির মান সর্বদা একই থাকে, অর্থাৎ অন্য রাশিগুলির মান পরিবর্তিত হইলেও ঐ রাশিটির মানের কোন পরিবর্তন না হয়, তবে সেই রাশিটিকে **ধ্রুবক** (constant) বলা হয়।

অতএব, বুঝা গেল যে ধ্রুবক রাশির মান অন্য কোন রাশির মানের উপর নির্ভর করে না।

কোন রাশিমালার যে রাশিটির মান পরিবর্তনশীল তাহাকে **চল** (variable) **রাশি** বা চল বলে।

21. ভেদ। দুইটি চল রাশির মধ্যে যদি এরূপ সম্বন্ধ থাকে যে একটির মান পরিবর্তিত হইলে তৎসঙ্গে অন্যটির মানও একই অনুপাতে পরিবর্তিত হয়, তবে একটি চল রাশি অন্যটির সহিত **সরল ভেদে** আছে (one quantity varies directly as the other) বলা হয়।

কার্যতঃ "সরল ভেদে" না বলিয়া সংক্ষেপে "ভেদে" আছে বলা হয়।

দৃষ্টান্ত : (i) মনে কর, একটি ট্রেন সমবেগে (uniformly) ঘণ্টায় 20 মাইল করিয়া যাইতেছে। যদি সময়টি দ্বিগুণ করিয়া 2 ঘণ্টা ধরা হয়, তবে দূরত্বও যাওয়া যাইবে 20 মাইলের দ্বিগুণ অর্থাৎ 40 মাইল। যদি সময় অর্ধেক ধরা হয়, তবে দূরত্বও অর্ধেক যাওয়া যাইবে। অতএব, দেখা গেল যে এখানে সময়ের সহিত দূরত্ব সরল ভেদে আছে (Distance covered is directly বিপরী. portional to বা varies directly as the time)।

(ii) বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হইলে, উহার পরিধি $2\pi r$-এর সমান হয় (π এখানে ধ্রুবক)। অতএব, ব্যাসার্ধটিকে দ্বিগুণ, তিনগুণ করিলে, সঙ্গে সঙ্গে বৃত্তের পরিধিটিও মাপে দ্বিগুণ, তিনগুণ হইয়া যাইবে। এখানে বলা যাইবে যে, বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসার্ধ সরল ভেদে আছে।

22. **'ভেদ'-সূচক চিহ্ন।** ভেদ বুঝাইবার জন্য $\propto$ প্রতীক চিহ্ন ব্যবহৃত হয়। 'x varies as y' বুঝাইবার জন্য সংক্ষেপে $x \propto y$ লেখা হয় (ইহার অর্থ x ও y সরল ভেদে অবস্থিত)।

উপরের প্রথম দৃষ্টান্তে মনে কর ট্রেনটি সমবেগে x মাইল (দূরত্ব) y ঘণ্টায় (সময়) যায়।

ট্রেনটি সমবেগে যাওয়ায় $\frac{x}{y}$ এই অনুপাতটি সর্বদা একই থাকিবে অর্থাৎ যদি x ও y সরল ভেদে থাকে, তবে $\frac{x\text{-এর যে কোন মান}}{y\text{-এর অনুরূপ মান}}$ সর্বদা একই থাকিবে।

অতএব, $\frac{x}{y}=$ ধ্রুবক। মনে কর, $\frac{x}{y}=k$ (ধ্রুবক), সুতরাং $x=ky$, এই স্থলের ধ্রুবক kকে **ভেদ ধ্রুবক** (variation constant) বলে।

দ্রষ্টব্য : যদি k ধ্রুবক এবং $x=ky$ হয়, তবে বুঝিতে হইবে যে, x-এর সহিত y-এর অথবা y-এর সহিত x-এর সরল ভেদ আছে।

আবার দেখ, $x=ky$ হইলে $y=\frac{1}{k}\times x$ হয়। এখানে $\frac{1}{k}$ একটি ধ্রুবক রাশি; সুতরাং বুঝা গেল যে x ও y-এর মধ্যে সরল ভেদ আছে। এখানে $\frac{1}{k}$ হইল ভেদ-ধ্রুবক। এই ধ্রুবক বিভিন্ন ভেদের পক্ষে বিভিন্ন ধরিতে হয়।

[**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** দুইটি চলের মধ্যে একটির হ্রাস বা বৃদ্ধি হইলে যদি অন্যটির হ্রাস বা বৃদ্ধি হয় তাহা হইলেই তাহারা সরল ভেদে আছে বলা যাইবে না। ঐ হ্রাস বা বৃদ্ধি সর্বদা **একই অনুপাতে** হওয়া চাই, নতুবা উভয় চলের মধ্যে সরল ভেদ আছে এরূপ ধরা যাইবে না।

দৃষ্টান্ত : বর্গক্ষেত্রের বাহুর মাপ বাড়িলে উহার ক্ষেত্রফল বাড়িয়া থাকে, কিন্তু ঐ বাহু ও ক্ষেত্রফল সমানুপাতী নহে। কারণ, বর্গক্ষেত্রের বাহু দ্বিগুণ করিলে উহার ক্ষেত্রফল 4 গুণ হয়, বাহুটি তিনগুণ হইলে ক্ষেত্রফল 9 গুণ হইবে।]

তোমরা জান যে $x=ky$ (k ধ্রুবক) এই সমীকরণটির লেখ মূলবিন্দুগামী একটি সরল রেখা। অতএব, এই লেখস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর কোটি (ordinate) উহার ভুজের (abscissa) সহিত সমানুপাতী। অতএব, বিপরীতক্রমে আমরা বলিতে পারি যে, দুইটি চলরাশির অনুরূপ মানগুলিকে যথাক্রমে ভুজ ও কোটি ধরিয়া লেখ অঙ্কিত করিলে, লেখটি যদি মূলবিন্দুগামী সরলরেখা হয়, তবে ঐ চল দুইটি সরল-ভেদে আছে বুঝিতে হইবে।

23. **ভেদ-ধ্রুবকের মান নির্ণয়।** সরল ভেদে অবস্থিত দুইটি চলরাশির দুইটি অনুরূপ মান জানা থাকিলে উহাদের ভেদ-ধ্রুবকের (variation constant-এর) মান নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 1. If x varies directly as y, and $x=7$ when $y=13$, find (i) the value of the variation constant, (ii) the relation between x and y and (iii) the value of x when $y=\frac{26}{35}$.

[যদি y-এর সহিত x সরলভেদে থাকে এবং $y=13$ হইলে $x=7$ হয়, তবে (i) ভেদ ধ্রুবকের মান, (ii) x ও y-এর মধ্যে সম্বন্ধ এবং (iii) $y=\frac{26}{35}$ হইলে x-এর মান নির্ণয় কর।]

(i) $\because \quad x \propto y, \quad \therefore \quad x=ky$ (k একটি ভেদ ধ্রুবক)

$\because \quad y=13$ হইলে $x=7$ হইবে (স্বীকার),

$\therefore \quad 7=k\times 13, \quad \therefore \quad k=\frac{7}{13}$. অতএব নির্ণেয় ভেদ ধ্রুবক $=\frac{7}{13}$.

(ii) x ও y-এর মধ্যে $x=\frac{7}{13}y$ এই সম্বন্ধ বিদ্যমান।

(iii) এক্ষণে, $x=\frac{7}{13}y$ এই সমীকরণে y-এর মান $\frac{26}{35}$ বসাইয়া পাই $x=\frac{7}{13}\times y=\frac{7}{13}\times\frac{26}{35}=\frac{2}{5}$.

অতএব x-এর নির্ণেয় মান $=\frac{2}{5}$.

উদাহরণ 2. The time of oscillation of a pendulum varies as the square root of its length. If a pendulum of length 40 inches oscillates once in a second, what is the length of the pendulum oscillating once in 2·5 seconds ? [C. U. '13]

[দোলকের (pendulum-এর) দোলনের সময়টি উহার দৈর্ঘ্যের সহিত সরল ভেদে থাকে। যদি 40 ইঞ্চ দৈর্ঘ্যের কোন দোলক সেকেণ্ডে একবার দোলে, তবে যে দোলক 2·5 সেকেণ্ডে একবার দোলে তাহার দৈর্ঘ্য কত ?]

মনে কর $t=$একবার দোলনের সময় এবং $l=$দোলনের দৈর্ঘ্য। অতএব প্রদত্ত সর্ত অনুসারে $t\propto\sqrt{l}$.

মনে কর $t=k\sqrt{l}$ (k ভেদ ধ্রুবক)।

$\because$ $t=1$ হইলে $l=40$ হয়, $\therefore$ $1=k\sqrt{40}$, বা, $k=\frac{1}{\sqrt{40}}$.

অতএব, $t=\frac{1}{\sqrt{40}}\times\sqrt{l}$, এই সমীকরণে $t=2{\cdot}5$ বসাইয়া পাই

$2{\cdot}5=\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{40}}$, বা, $\frac{l}{40}=\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}$,

$\therefore$ নির্ণেয় $l=\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}\times 40$ ই.$=250$ ইঞ্চি।

অন্যোন্যক (Reciprocal) তোমরা জান কোন সংখ্যার অন্যোন্যক বলিলে ($1\div$সেই সংখ্যা) বুঝায়। অতএব, $\frac{2}{3}$এর অন্যোন্যক $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{5}$এর অন্যোন্যক 5, 4এর অন্যোন্যক $\frac{1}{4}$, xএর অন্যোন্যক $\frac{1}{x}$ ইত্যাদি।

24. **ব্যস্ত ভেদ** (Inverse Variation)। যদি একটি রাশির মানের পরিবর্তন অন্য একটি রাশির অন্যোন্যকের মানের পরিবর্তনের সমানুপাতী হয়, তবে প্রথম রাশি দ্বিতীয় রাশির সহিত অথবা দ্বিতীয় রাশি প্রথম রাশির সহিত **ব্যস্ত ভেদে** বা **বিপরীত ভেদে** আছে বলা হয়।

যদি a ও b ব্যস্ত ভেদে থাকে (অর্থাৎ a varies inversely as b), তবে লেখা হইবে $a\propto\frac{1}{b}$ (কারণ, b-র অন্যোন্যক $\frac{1}{b}$)।

অতএব, এখানে $a=k.\frac{1}{b}$ (k একটি ধ্রুবক), $\therefore$ $ab=k$.

আবার, $\because$ $ab=k$, $\therefore$ $b=k.\frac{1}{a}$; অতএব, বিপরীতক্রমে বলা যায় b varies inversely as a (b, a-এর সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে)।

a ও bএর মধ্যে ব্যস্ত ভেদ থাকিলে বুঝিতে হইবে যে, aর মান বাড়িলে bর মান কমিবে এবং bর মান বাড়িলে aর মান কমিবে (একই অনুপাতে)।

দ্রষ্টব্য : (1) কোন নির্দিষ্ট বেগে কোন নির্দিষ্ট দূরত্ব যাইতে যে সময় লাগে, তাহার **দ্বিগুণ** বেগে গেলে **অর্ধেক** সময় লাগিবে, তাহার **এক-তৃতীয়াংশ** বেগে গেলে **তিনগুণ** সময় লাগিবে। অর্থাৎ বেগকে যত দিয়া গুণ করিবে, সময়কে তত দিয়া ভাগ করিতে হইবে। অতএব বেগ ও সময় এখানে ব্যস্ত ভেদে আছে।

(2) একই ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বিভিন্ন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্যগুলি প্রস্থগুলির সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে।

(3). কোন কাজ সম্পন্ন করিবার জন্য কোন নির্দিষ্ট সংখ্যক লোকের যত দিন সময় লাগে, তাহার দ্বিগুণ লোক কাজ করিলে তাহার অর্ধেক দিন সময় লাগিবে। ইত্যাদি।

[দ্রষ্টব্য : (1) যদি a, bএর সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে, তবে a, $\frac{1}{b}$এর সহিত সরল ভেদে আছে বুঝিতে হইবে।

(2) দুইটি রাশি পরস্পর ব্যস্ত ভেদে থাকিলে তাহাদের গুণফল ধ্রুবক হইবে। বিপরীতক্রমে, দুইটি রাশির গুণফল ধ্রুবক হইলে, রাশি দুইটি ব্যস্ত ভেদে আছে বলিতে হইবে।]

উদা. 1. If $x \propto y$ and $a \propto \frac{1}{b}$, show that $xa \propto \frac{y}{b}$.

$\because$ $x \propto y$, $\therefore$ $x = my$ (m একটি ভেদ ধ্রুবক),

আবার, $\because$ $a \propto \frac{1}{b}$, $\therefore$ $a = n.\frac{1}{b} = \frac{n}{b}$ (n একটি ভেদ ধ্রুবক)

এক্ষণে, $xa = my \times \frac{n}{b} = mn\frac{y}{b}$. অতএব $\because$ mn একটি ধ্রুবক, $\therefore xa \propto \frac{y}{b}$.

[বি. দ্রষ্টব্য : এখানে $\left(x \propto y \text{ এবং } a \propto \frac{1}{b}\right)$ এই দুই ক্ষেত্রে দুইটি পৃথক পৃথক্ ধ্রুবক m ও n ব্যবহার করিবে।]

উদা. 2. If A is equal to the sum of two quantities, one of which varies directly as B and the other inversely as B ; and if A$=7$ when B$=1$ and A$=10\frac{1}{3}$ when B$=3$, find the relation between A and B and the value of A when B$=2$.

[A দুইটি রাশির সমষ্টির সমান এবং Bএর সহিত একটি রাশি সরল ভেদে ও অন্যটি ব্যস্ত ভেদে আছে। যদি B$=1$ হইলে A$=7$ এবং B$=3$ হইলে A$=10\frac{1}{3}$ হয়, তবে A ও Bএর মধ্যে সম্বন্ধ এবং B$=2$ হইলে Aএর মান নির্ণয় কর।]

এখানে A যে দুইটি রাশির সমষ্টি তাহাদের একটি B-র সহিত সরল ভেদে এবং অন্যটি ব্যস্ত ভেদে থাকায় প্রথমটি$=m$B এবং দ্বিতীয়টি$=\frac{n}{B}$. হইবে (m ও n দুইটি ধ্রুবক।)

অতএব, $A = mB + \frac{n}{B}$.

$\because$ B$=1$ হইলে A$=7$ হয়, $7 = m.1 + \frac{n}{1} = m + n \cdots (1)$.

আবার, $\because$ B$=3$ হইলে A$=10\frac{1}{3}$ হয়,

$\therefore$ $10\frac{1}{3} = m.3 + \frac{n}{3}$, বা, $31 = 9m + n \cdots (2)$

এক্ষণে (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই, $m=3$ এবং $n=4$.

অতএব, A ও Bর মধ্যে নির্ণেয় সম্বন্ধ হইল $A=3B+\frac{4}{B}$.

এই সমীকরণে Bর মান 2 বসাইয়া পাই $A=6+\frac{4}{2}=8$.

লেখ। x, y-এর সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকিলে, x, $\frac{1}{y}$-এর সহিত সরল ভেদে থাকে। যদি x ও $\frac{1}{y}$এর অনুরূপ মানগুলিকে স্থানাঙ্ক ধরিয়া বিন্দুগুলি স্থাপন করিলে, উহারা মূলবিন্দুগামী সরলরেখায় অবস্থিত হয়, অর্থাৎ যদি কোন চলরাশির মানগুলিকে ভুজ এবং অন্য কোন চলরাশির অন্যোন্যকের অনুরূপ মানগুলিকে কোটি ধরিয়া অঙ্কিত লেখটি মূলবিন্দুগামী সরলরেখা হয়, তবে বলা যাইবে যে ঐ চলরাশিদ্বয় ব্যস্ত ভেদে আছে।

আবার দেখ, $x=\frac{k}{y}$ সমীকরণ হইতে পাই $xy=k$ (ধ্রুবক) এবং ইহার লেখ একটি **সম-পরাবৃত্ত** (rectangular hyperbola)। অতএব, ব্যস্ত ভেদে অবস্থিত রাশিদ্বয়ের অনুরূপ মানগুলিকে ভুজ ও কোটি ধরিয়া লেখ অঙ্কিত করিলে দেখা যাইবে যে বিন্দুগুলি একটি সম-পরাবৃত্তে অবস্থিত।

25. **যৌগিক ভেদ** (Joint variation)। কখন কখন দেখা যায় যে, একটি চলরাশির মান অন্য একাধিক স্বাধীনভাবে পরিবর্তনশীল চলরাশির মানের উপর নির্ভর করে। যদি একটি চলরাশি অন্য একাধিক চলরাশির গুণফলের সহিত সরল ভেদে থাকে, তবে বলা হয় যে প্রথম চলরাশিটি অপর চলরাশিগুলির সহিত **যৌগিক ভেদে** অবস্থিত। যথা, যদি দেওয়া থাকে যে $A\propto BC$, তবে বলা হইবে যে B ও Cএর সহিত Aর যৌগিক ভেদ আছে। এখানে $A=k.BC$ (k একটি ধ্রুবক)।

দৃষ্টান্ত : (1) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল$=\frac{1}{2}b\times h$ (এখানে $\frac{1}{2}$ একটি ধ্রুবক এবং b ত্রিভুজের ভূমি এবং h উচ্চতা।)

অতএব ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল উহার ভূমি ও উচ্চতার সহিত যৌগিক ভেদে অবস্থিত।

(2) কার্যের পরিমাণ ঐ কার্যে নিযুক্ত লোকসংখ্যা এবং তাহারা যতদিন কাজ করে সেই দিনসংখ্যার সহিত যৌগিক ভেদে অবস্থিত।

[**দ্রষ্টব্য :** (1) যদি $a, b, c, d\cdots$প্রভৃতির সহিত x যৌগিক ভেদে থাকে, তবে $x=k\times abcd\cdots$হইবে (এখানে k একটি ধ্রুবক)। বিপরীতক্রমে

যদি $x=k\times abcd\cdots$ হয় (k ধ্রুবক হইলে), তবে a, b, c, $d\cdots$এর সহিত x-এর যৌগিক ভেদ আছে বলা হইবে।

(3) যদি একটি রাশি একটি দ্বিতীয় রাশির সহিত ও একটি তৃতীয় রাশির অন্যোন্যকের সহিত যৌগিক ভেদে থাকে, তবে বুঝিতে হইবে যে, প্রথম রাশিটি দ্বিতীয় রাশির সহিত সরল ভেদে ও তৃতীয়টির সহিত ব্যস্ত ভেদে অবস্থিত। যথা, x রাশিটি y-এর সহিত সরল ভেদে ও z-এর সহিত ব্যস্ত ভেদে অবস্থিত হইবে যদি $x\propto\frac{y}{z}$ অর্থাৎ যদি $x=m\frac{y}{z}$ (m একটি ধ্রুবক) হয়।]

দৃষ্টান্ত : ত্রিভুজের উচ্চতা উহার ক্ষেত্রফলের সহিত সরল ভেদে এবং ভূমির সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে।

উদাহরণ। If A varies as B and C jointly, and if A=2 when B=$\frac{3}{5}$, C=$\frac{10}{27}$, find C, when A=54 and B=3. [C. U. '20]

[যদি B ও C-এর সহিত A-এর যৌগিক ভেদ থাকে এবং B=$\frac{3}{5}$ ও C=$\frac{10}{27}$ হইলে A=2 হয়, তবে A=54 ও B=3 হইলে C-এর মান কত হইবে ?]

এখানে $\because$ $A\propto BC$, $\therefore$ $A=kBC$ (k ভেদ ধ্রুবক)$\cdots(1)$

সমীকরণ (1)-এ A=2, B=$\frac{3}{5}$ ও C=$\frac{10}{27}$ বসাইয়া পাই

$2=k\times\frac{3}{5}\times\frac{10}{27}=\frac{2}{9}k$, $\therefore$ $k=9$. অতএব $A=9BC\cdots(2)$

এক্ষণে, (2)-এ A=54 ও B=3 বসাইয়া পাই

$54=9\times3\times C$, $\therefore$ $C=\frac{54}{27}=2$.

26. যৌগিক ভেদের উপপাদ্য—If x varies as y when z is constant, and x varies as z when y is constant, then will x vary as the product yz when both y and z vary.

[যখন z ধ্রুবক তখন যদি yএর সহিত x সরলভেদে থাকে, এবং y ধ্রুবক হইলে যদি zএর সহিত x সরলভেদে থাকে, তবে প্রমাণ কর যে, y ও z দুইটিই চল হইলে yzএর সহিত x সরলভেদে থাকিবে।]

প্রমাণ : এখানে দেখা যাইতেছে যে, x-এর ভেদ আংশিকভাবে y-এর উপর এবং আংশিকভাবে zএর উপর নির্ভরশীল। এক্ষণে মনে কর, প্রত্যেকটি ভেদ পৃথক্‌ভাবে হইয়া x-এর উপর নিজ নিজ ফল উৎপন্ন করিতেছে। মনে কর, x, y, zএর যথাক্রমে তিনটি অনুরূপ মান a, b, c অর্থাৎ প্রথমে যে মান ছিল সম্পূর্ণ পরিবর্তনের পর x-এর মান a, y-এর মান b এবং z-এর মান যেন c হইল।

প্রথমে ধর, z ধ্রুবক আছে এবং y-এর মান পরিবর্তিত হইয়া b হইল। ইহার ফলে x-এর মান কেবল আংশিকভাবে বদলাইবে, কিন্তু একেবারে a হইবে না। মনে কর, এই আংশিক মান a' হইল ; সুতরাং $\frac{x}{a'}=\frac{y}{b}$ হইল $\cdots$ (1).

আবার ধর, y-এর মান b ধ্রুবক আছে এবং z-এর মান পরিবর্তিত হইয়া c হইল। ইহার ফলে x-এর মান সম্পূর্ণ পরিবর্তিত হইয়া a' হইতে a হইবে। অতএব $\frac{a'}{a}=\frac{z}{c}$ হইল$\cdots$(2).

এক্ষণে (1) ও (2) হইতে পাই

$$\frac{x}{a'}\times\frac{a'}{a}=\frac{y}{b}\times\frac{z}{c}, \quad \text{বা,} \quad \frac{x}{a}=\frac{yz}{bc}, \quad \text{বা,} \quad x=\frac{a}{bc}\times yz.$$

অতএব, $x\propto yz$ (প্রমাণিত হইল)।

দ্রষ্টব্য : চলের সংখ্যা আরও বেশী হইলেও এই উপপাদ্য সিদ্ধ হইবে। যদি A, B, C, D,······প্রভৃতি কতিপয় রাশি এরূপ হয় যে অপর একটি রাশি x ইহাদের প্রত্যেকটির সহিত সরলভেদে থাকিবে যখন অন্যগুলি ধ্রুবক থাকে, তবে যখন উহাদের সবগুলিরই মান পরিবর্তিত হইবে তখন উহাদের সবগুলির গুণফলের সহিত x সরলভেদে থাকিবে।

দৃষ্টান্ত : ত্রিভুজের উচ্চতা ধ্রুবক থাকিলে উহার ক্ষেত্রফল উহার ভূমির সহিত সরল ভেদে থাকে এবং ভূমি ধ্রুবক থাকিলে ক্ষেত্রফল উচ্চতার সহিত সরল ভেদে থাকে। অতএব, উচ্চতা ও ভূমি উভয়ই পরিবর্তিত হইলে ক্ষেত্রফল উচ্চতা ও ভূমির সহিত যৌগিক ভেদে থাকে।

অনুসিদ্ধান্ত : যদি $A\propto B$ যখন C ধ্রুবক এবং $A\propto\frac{1}{C}$ যখন B ধ্রুবক, তবে $A\propto\frac{B}{C}$ যখন B ও C উভয়ই চল হয়।

উদাহরণ। Apply the principle of variation to find how long 15 men will take to plough 25 acres, if 6 men take 10 days to plough 20 acres.

[যদি 20 একর জমি চষিতে 6 জন লোকের 10 দিন লাগে, তবে 25 একর চষিতে 15 জন লোকের কতদিন লাগিবে ভেদ প্রণালীতে নির্ণয় কর।]

মনে কর, লোকসংখ্যা$=n$, দিনসংখ্যা$=d$ এবং একর সংখ্যা$=A$. এখানে দেখা যাইতেছে যে, দিনসংখ্যা ধ্রুবক থাকিলে লোকসংখ্যা একর সংখ্যার

সহিত সরল ভেদে থাকিবে এবং একর সংখ্যা ধ্রুবক থাকিলে দিনসংখ্যার সহিত n ব্যস্ত ভেদে থাকিবে।

অতএব, $n \propto A$ যখন d ধ্রুবক, এবং $n \propto \frac{1}{d}$ যখন A ধ্রুবক।

$\therefore \quad n \propto \frac{A}{d}$ যখন A ও d উভয়ই চল।

$\therefore \quad n = k.\frac{A}{d}$ (k ভেদ ধ্রুবক)$\cdots(1)$

প্রদত্ত সর্ত হইতে $\because$ $d=10$ এবং $A=20$ হইলে $n=6$ হয়,

$\therefore \quad 6 = k.\frac{20}{10} = 2k, \quad \therefore \quad k = 3.$

এক্ষণে, (1)-এ $A=25$ এবং $n=15$ বসাইয়া পাই

$15 = k.\frac{A}{d} = 3 \times \frac{25}{d}$, বা, $15d = 75$, $\quad d = 5.$

অতএব, নির্ণেয় সময় = 5 দিন।

27. ভেদ সম্বন্ধে কতিপয় বিশেষ সিদ্ধান্ত

1. যদি $A \propto B$, তাহা হইলে $B \propto A$.

প্রমাণ : $\because \quad A \propto B, \quad \therefore \quad A = k.B$ (k ভেদ ধ্রুবক)

$\therefore \quad B = \frac{1}{k}.A, \quad \therefore \quad B \propto A$ (কারণ, $\frac{1}{k}$ একটি ধ্রুবক)।

2. যদি $A \propto B$, তাহা হইলে $A^m \propto B^m$.

প্রমাণ : $\because \quad A \propto B, \quad \therefore \quad A = k.B$ (k ভেদ ধ্রুবক)

$\therefore \quad (A)^m = (kB)^m$, বা, $A^m = k^m B^m$,

$\therefore \quad A^m \propto B^m$ (কারণ, k^m ধ্রুবক)।

3. যদি $A \propto B$ এবং $B \propto C$, তাহা হইলে $A \propto C$. [C. U. '22]

প্রমাণ : $\because \quad A \propto B, \quad \therefore \quad A = k.B$ (k ভেদ ধ্রুবক),

এবং $\because \quad B \propto C, \quad \therefore \quad B = m.C$ (m ভেদ ধ্রুবক),

$\therefore \quad A = kB = k.mC = kmC$

$\therefore \quad A \propto C$ (কারণ, km এখানে ধ্রুবক)।

4. যদি $A \propto BC$, তাহা হইলে $B \propto \frac{A}{C}$ এবং $C \propto \frac{A}{B}$.

প্রমাণ : $\because \quad A \propto BC, \quad \therefore \quad A = kBC$ (k একটি ধ্রুবক)

অতএব, $B = \frac{1}{k} \cdot \frac{A}{C}$, $\therefore$ $B \propto \frac{A}{C}$ (কারণ, এখানে $\frac{1}{k}$ ধ্রুবক)

অনুরূপে $C = \frac{1}{k} \cdot \frac{A}{B}$, $\therefore$ $C \propto \frac{A}{B}$ (কারণ, $\frac{1}{k}$ ধ্রুবক)।

5. যদি $A \propto B$, তাহা হইলে $AC \propto BC$ (C যে-কোন ধ্রুবক বা চল রাশি হউক না কেন)।

প্রমাণ : $\because$ $A \propto B$, $\therefore$ $A \propto kB$ (k ভেদ ধ্রুবক)।

$\therefore$ $AC = k.BC$, $\therefore$ $AC \propto BC$ (কারণ, k ধ্রুবক)।

6. যদি $A \propto C$ এবং $B \propto C$, তাহা হইলে $(A \pm B) \propto C$ এবং $AB \propto C^2$.

প্রমাণ : $\because$ $A \propto C$, $\therefore$ $A = m.C$ (m ভেদ ধ্রুবক)...(1)

এবং $\because$ $B \propto C$, $\therefore$ $B = n.C$ (n ভেদ ধ্রুবক) ...(2)

এক্ষণে, (1) ও (2) হইতে একবার যোগ ও একবার বিয়োগ করিয়া পাই

$$A \pm B = (m \pm n)C,$$

$\therefore$ $(A \pm B) \propto C$ (কারণ, m ও n ধ্রুবক বলিয়া $m+n$ ও $m-n$ ধ্রুবক)।

আবার, $AB = mC \times nC = mn.C^2$

$\therefore$ $AB \propto C^2$ (কারণ, mn একটি ধ্রুবক)।

7. যদি $A \propto B$ এবং $C \propto D$ তাহা হইলে $AC \propto BD$, এবং $\frac{A}{C} \propto \frac{B}{D}$.

[C. U. '23]

প্রমাণ : $\because$ $A \propto B$, $\therefore$ $A = mB$ (m ভেদ ধ্রুবক)...(1)

এবং $\because$ $C \propto D$, $\therefore$ $C = nD$ (n ভেদ ধ্রুবক)...(2)

$\therefore$ $(1) \times (2)$ করিয়া পাই $AC = mnBD$,

$\therefore$ $AC \propto BD$ (কারণ, এখানে mn একটি ধ্রুবক)।

আবার $(1) \div (2)$ করিয়া পাই $\frac{A}{C} = \frac{m}{n} \cdot \frac{B}{D}$,

$\therefore$ $\frac{A}{C} \propto \frac{B}{D}$ (কারণ, $\frac{m}{n}$ একটি ধ্রুবক)।

উদাহরণমালা 11

উদা. 1. If A varies as B and also as C, show that A varies as B−C. [C. U. '25]

[যদি B ও C উভয়ের সহিত A সরলভেদে থাকে, তবে দেখাও যে B−Cএর সহিত A সরলভেদে আছে।]

$\because$ $A \propto B$, $\therefore$ $A = kB$ (k ভেদ ধ্রুবক), $\therefore$ $B = \frac{A}{k}$ ......(1)

আবার, $\because$ $A \propto C$, $\therefore$ $A = mC$ (m ভেদ ধ্রুবক), $\therefore$ $C = \frac{A}{m}$ ...(2)

এক্ষণে, (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই

$$B - C = \frac{A}{k} - \frac{A}{m} = A\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{m}\right) = A\left(\frac{m-k}{km}\right),$$

$$\therefore \quad A = \frac{km}{m-k}(B - C).$$

অতএব, $A \propto B - C$ (কারণ, এখানে $\frac{km}{m-k}$ একটি ধ্রুবক)।

উদা. 2. If $\frac{a}{b} \propto a+b$ and $\frac{b}{a} \propto a-b$, show that $a^2 - b^2$ is invariable.

[যদি $\frac{a}{b} \propto a+b$ এবং $\frac{b}{a} \propto a-b$, তবে দেখাও যে $a^2 - b^2$ ধ্রুবক।]

$\because$ $\frac{a}{b} \propto a+b$, $\therefore$ $\frac{a}{b} = k(a+b)$, এখানে k ভেদ ধ্রুবক ;

আবার, $\because$ $\frac{b}{a} \propto a-b$, $\therefore$ $\frac{b}{a} = m(a-b)$, এখানে m একটি ধ্রুবক ;

অতএব, $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = km(a+b)(a-b)$,

বা, $1 = km(a^2 - b^2)$, $\therefore$ $a^2 - b^2 = \frac{1}{km} =$ ধ্রুবক।

উদা. 3. Complete the following :—

(i) If $x \propto a^2$, then $a \propto \cdots$

(ii) If $x \propto \frac{1}{\sqrt{a}}$, then $a \propto \cdots\cdots$

[নিম্নের উক্তিগুলি পূরণ কর :—

(i) যদি $x \propto a^2$, তবে $a \propto \cdots$

(ii) যদি $x \propto \frac{1}{\sqrt{a}}$, তবে $a \propto \cdots$]

(i) $\because$ $x \propto a^2$, $\therefore$ $x = ka^2$ (এখানে k ভেদ ধ্রুবক)

$$\therefore \quad a^2 = \frac{x}{k}, \quad \therefore \quad a = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{k}}$$

$\because$ $\sqrt{k}$ একটি ধ্রুবক, $\therefore$ $a \propto \sqrt{x}$.

$\therefore$ If $x \propto a^2$, then $a \propto \sqrt{x}$.

(ii) $\because$ $x \propto \frac{1}{\sqrt{a}}$, $\therefore$ $x = k.\frac{1}{\sqrt{a}}$ (এখানে k ভেদ ধ্রুবক),

বা, $x^2 = \frac{k^2}{a}$, $\therefore$ $a = \frac{k^2}{x^2} = k^2.\frac{1}{x^2}$.

$\because$ k^2 একটি ধ্রুবক, $\therefore$ $a \propto \frac{1}{x^2}$.

$\therefore$ If $x \propto \frac{1}{\sqrt{a}}$, then $a \propto \frac{1}{x^2}$.

উদা. 4. If $A \propto B^2$ and if $B=4$ when $A=4$, find B when $A=3$ and also find A when $B=9$. Find also B in terms of A.

[যদি $A \propto B^2$ এবং $A=4$ হইলে $B=4$ হয়, তবে $A=3$ হইলে Bএর এবং $B=9$ হইলে Aএর মান কত হইবে ? Aএর দ্বারা Bএর মান নির্ণয় কর।]

$\because$ $A \propto B^2$, $\therefore$ $A = kB^2$ (এখানে k ভেদ ধ্রুবক)।

প্রদত্ত সর্ত হইতে A ও Bএর মান বসাইয়া পাই $4 = k.(4)^2$,

$\therefore$ $k = \frac{1}{4}$, $\therefore$ $A = \frac{1}{4}B^2$.

এক্ষণে, $A=3$ হইলে, $3 = \frac{1}{4}B^2$, বা, $B^2 = 12$. $\therefore$ $B = \pm 2\sqrt{3}$.

আবার, $B=9$ বসাইয়া পাই $A = \frac{1}{4} \times 9^2 = \frac{81}{4} = 20\frac{1}{4}$.

আবার, $\because$ $kB^2 = A$, $\therefore$ $\frac{1}{4}B^2 = A$ বা, $B^2 = 4A$,

$\therefore$ $B = \pm\sqrt{4A} = \pm 2\sqrt{A}$.

উদা. 5. If A^2+B^2 varies as A^2-B^2, show that A varies as B. [C. U. '23]

$\because$ $A^2+B^2 \propto A^2-B^2$,

$\therefore$ $A^2+B^2 = k(A^2-B^2)$ [এখানে k ভেদ ধ্রুবক],

$\therefore$ $\frac{A^2+B^2}{A^2-B^2} = \frac{k}{1}$. এক্ষণে যোগ-বিভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা পাই

$\frac{A^2+B^2+A^2-B^2}{A^2+B^2-A^2+B^2} = \frac{k+1}{k-1}$, বা, $\frac{2A^2}{2B^2} = \frac{k+1}{k-1}$,

বা, $\frac{A^2}{B^2} = \frac{k+1}{k-1}$, বা, $A^2 = \frac{k+1}{k-1}.B^2$,

বা, $A = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}.B$, $\therefore$ $A \propto B$ $\left(\because \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\text{ ধ্রুবক}\right)$.

উদা. 6. Given that $x+y$ varies as $z+\frac{1}{z}$ and that $x-y$ varies as $z-\frac{1}{z}$; find the relation between x and z provided that $z=2$ when $x=3$ and $y=1$. [P. U. '48]

[প্রদত্ত আছে যে $z+\frac{1}{z}$এর সহিত $x+y$এর এবং $z-\frac{1}{z}$এর সহিত $x-y$এর সরলভেদ আছে। যদি $x=3$ ও $y=1$ হইলে $z=2$ হয়, তবে x ও z-এর সম্পর্ক নির্ণয় কর।]

$\because \quad x+y \propto z+\frac{1}{z},$

$\therefore \quad x+y=k\left(z+\frac{1}{z}\right)$, এখানে k ভেদ ধ্রুবক$\cdots$(1)

আবার, $\because \quad (x-y) \propto \left(z-\frac{1}{z}\right),$

$\therefore \quad x-y=m\left(z-\frac{1}{z}\right)$, এখানে m ভেদ ধ্রুবক...(2)

(1) ও (2) যোগ করিয়া পাই $2x=k\left(z+\frac{1}{z}\right)+m\left(z-\frac{1}{z}\right)\cdots$(3)

এক্ষণে, $\because \quad x=3$ এবং $y=1$ হইলে $z=2$ হয়,

$\therefore$ (1) হইতে পাই $3+1=k(2+\frac{1}{2})$, বা, $\frac{5}{2}k=4$, $\therefore \quad k=\frac{8}{5}$.

আবার (2) হইতে পাই $3-1=m(2-\frac{1}{2})$, বা, $\frac{3}{2}m=2$, $\therefore \quad m=\frac{4}{3}$.

অতএব, (3) হইতে পাই $2x=\frac{8}{5}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\frac{4}{3}\left(z-\frac{1}{z}\right)$,

বা, $2x=(\frac{8}{5}+\frac{4}{3})z+(\frac{8}{5}-\frac{4}{3})\frac{1}{z}=\frac{44}{15}z+\frac{4}{15z}$, বা, $x=\frac{22}{15}z+\frac{2}{15z}$,

বা, $15x=22z+\frac{2}{z}$, ইহাই নির্ণেয় x ও z-এর সম্পর্ক।

উদা. 7. If $a \propto b^2$ and $1+b \propto \sqrt{c}$, find a in terms of c if $c=9$ and $b=5$ when $a=1$.

[যদি $a \propto b^2$ ও $1+b \propto \sqrt{c}$ এবং যদি $a=1$ হইলে $c=9$ ও $b=5$ হয়, তবে cএর দ্বারা a-এর মান নির্ণয় কর।]

$\because\ a \propto b^2,\ \therefore\ a = mb^2$ (এখানে m ভেদ ধ্রুবক) ...(1)

আবার, $\because\ 1+b \propto \sqrt{c},\ \therefore\ 1+b = n\sqrt{c}$ (এখানে n ভেদ ধ্রুবক)...(2)

(1)-এ a ও bএর মান বসাইয়া পাই $1 = m(5)^2,\ \therefore\ m = \frac{1}{25}$.

(2)-এ b ও cএর মান বসাইয়া পাই $1+5 = n\sqrt{9} = 3n,\ \therefore\ n = 2.$

এক্ষণে (2) হইতে পাই $1+b = 2\sqrt{c}$ ($\because\ n = 2$),

বা, $b = 2\sqrt{c}-1,\ \therefore\ b^2 = 4c - 4\sqrt{c}+1,$

অতএব, (1) হইতে $a = mb^2$, বা, $a = \frac{b^2}{25}$ ($\because\ m = \frac{1}{25}$)

$$\therefore\ a = \frac{4c - 4\sqrt{c}+1}{25}.$$

উদা. 8. If x varies directly as the square of y and inversely as the cube root of z, and if $x=2$, when $y=4$, $z=8$, find the value of y, when $x=3$ and $z=27$. [C. U. '17]

[xএর যদি y-এর বর্গের সহিত সরলভেদ ও z-এর ঘনমূলের সহিত ব্যস্ত ভেদ থাকে এবং যদি $y=4$ ও $z=8$ হইলে $x=2$ হয়, তবে $x=3$ ও $z=27$ হইলে y কত হইবে ?] [C. U. '17]

$$\because\ x \propto y^2 \text{ এবং } x \propto \frac{1}{\sqrt[3]{z}},$$

$$\therefore\ x \propto y^2 . \frac{1}{\sqrt[3]{z}},\ \therefore\ x = k\frac{y^2}{\sqrt[3]{z}} \text{ (এখানে } k \text{ ভেদ ধ্রুবক ।)}$$

এক্ষণে, $x=2$, $y=4$, ও $z=8$ বসাইয়া পাই

$$2 = k.\frac{4^2}{\sqrt[3]{8}} = k.\frac{16}{2} = 8k,\ \therefore\ k = \frac{1}{4}.$$

$\therefore\ x = \frac{1}{4}.\frac{y^2}{\sqrt[3]{z}}$, ইহাতে $x=3$ ও $z=27$ বসাইয়া পাই

$$3 = \frac{1}{4}\times\frac{y^2}{\sqrt[3]{27}} = \frac{y^2}{4.3},\ \text{বা},\ y^2 = 36,\ \therefore\ y = \pm 6.$$

উদা. 9. If $b \propto a^3$, find the ratio in which b is increased if a is increased in the ratio 3 : 2.

[যদি $b \propto a^3$, তবে aএর মান 3 : 2 অনুপাতে বাড়িলে bএর মান কি অনুপাতে বাড়িবে ?]

a-এর মান 3 : 2 অনুপাতে বাড়িলে a^3-এর মান $(\frac{3}{2})^3$ বা $\frac{27}{8}$ বা 27 : 8 অনুপাতে বাড়ে।

এক্ষণে $\because$ $b \propto a^3$, $\therefore$ a-এর মান 3 : 2 অনুপাতে বাড়িলে b-এর মান 27 : 8 অনুপাতে বাড়িবে।

উদা. 10. If x varies inversely as y, show that $x+y$ is least when $x=y$.

[x যদি y-এর সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে, তবে প্রমাণ কর যে $x+y$ এর মান লঘিষ্ঠ হইবে যখন $x=y$.]

$\because$ $x \propto \frac{1}{y}$, $\therefore$ $x=k.\frac{1}{y}$, বা $xy=k$ (এখানে k একটি ধ্রুবক)।

এক্ষণে, $x+y=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+2\sqrt{xy}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+2\sqrt{k}$.

এখানে $2\sqrt{k}$ ধ্রুবক বলিয়া ইহার মান অপরিবর্তিত থাকিবে, এবং $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ ধনাত্মক বলিয়া ইহার মান শূন্য হইলে $(x+y)$এর মান লঘিষ্ঠ হইবে।

অতএব, যদি $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=0$ হয়, অর্থাৎ যদি $\sqrt{x}=\sqrt{y}$ হয়, অর্থাৎ যদি $x=y$ হয়, তবে $x+y$এর মান লঘিষ্ঠ হইবে।

উদা. 11. If $x+y \propto x-y$, show that (i) $x^2+y^2 \propto xy$, (ii) $ax+by \propto px+qy$; a, b, p, q being all constants.

[C. U. '36 ; P. U. '47]

[যদি $x+y \propto x-y$, তবে প্রমাণ কর যে (i) $x^2+y^2 \propto xy$ এবং (ii) $ax+by \propto px+qy$, যেখানে a, b, p, q ধ্রুবক।]

(i) $\because$ $x+y \propto x-y$, $\therefore$ $x+y=k(x-y)$, এখানে k ভেদ ধ্রুবক,

$\therefore$ $(x+y)^2=k^2(x-y)^2$ [বর্গ করিয়া],

বা, $x^2+y^2+2xy=k^2(x^2+y^2)-2k^2xy$,

বা, $2xy+2k^2xy=k^2(x^2+y^2)-(x^2+y^2)$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $2(k^2+1)xy=(k^2-1)(x^2+y^2)$

$$\therefore \quad x^2+y^2=\frac{2(k^2+1)}{k^2-1}xy.$$

অতএব, $x^2+y^2 \propto xy$ (কারণ, এখানে k ধ্রুবক)।

(ii) $\because$ $x+y \propto x-y$, $\therefore$ $x+y=k(x-y)$, এখানে k ভেদ ধ্রুবক,

$\therefore$ $\frac{x+y}{x-y}=k$, সংযোগ-বিভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা পাই

$\frac{x}{y}=\frac{k+1}{k-1}=m$ (মনে কর), $=my$.

একণে, $\dfrac{ax+by}{px+qy}=\dfrac{amy+bv}{pmy+qy}=\dfrac{y(am+b)}{y(pm+q)}=\dfrac{am+b}{pm+q}$;

$\because$ a, b, p, q ধ্রুবক এবং k ধ্রুবক হওয়ায় m ধ্রুবক, $\dfrac{am+b}{pm+q}$ ধ্রুবক।

$\therefore$ প্রমাণিত হইল যে, $ax+by \propto px+qy$.

উদা. 12. If $x+y \propto z$ when y is constant and if $z+x \propto y$ when z is constant, show that when both y and z vary, then $x+y+z \propto yz$. [G. U. '49]

[যদি $x+y \propto z$ যখন y ধ্রুবক এবং $z+x \propto y$ যখন z ধ্রুবক, তবে প্রমাণ কর যে $x+y+z \propto yz$ যখন y ও z উভয়ই চল।]

$\because$ $x+y \propto z$ (y অপরিবর্তিত থাকিলে),

$\therefore$ $x+y=kz$ (k ভেদ ধ্রুবক)

$\therefore$ $x+y+z=kz+z=(k+1)z$;

অতএব y অপরিবর্তিত থাকিলে $x+y+z \propto z$ (কারণ, $k+1$ ধ্রুবক)।

আবার, $\because$ $x+z \propto y$ (যখন z অপরিবর্তিত থাকে),

$\therefore$ $x+z=my$ (এখানে m ভেদ ধ্রুবক)

$\therefore$ $x+z+y=my+y=(m+1)y$.

অতএব, z অপরিবর্তিত থাকিলে $x+y+z \propto y$ (কারণ, $m+1$ ধ্রুবক)।

$\therefore$ যৌগিক ভেদ উপপাদ্য হইতে প্রমাণিত হইল যে y ও z উভয়ই চল হইলে $x+y+z \propto yz$.

উদা. 13. If x, y, z be variable quantities such that $y+z-x$ is constant and $(x+y-z)(x+z-y) \propto yz$, prove that $x+y+z \propto yz$. [P. U. '40]

[যদি x, y, z চলরাশি হয়, কিন্তু $y+z-x$ ধ্রুবক হয়, এবং যদি $(x+y-z)(x+z-y) \propto yz$, তবে প্রমাণ কর যে $x+y+z \propto yz$.]

মনে কর, $y+z-x=k$ (ধ্রুবক)।

$\because$ $(x+y-z)(x+z-y) \propto yz$,

$\therefore$ $(x+y-z)(x+z-y)=myz$ (এখানে m ভেদ ধ্রুবক),

বা, $x^2-(y-z)^2=myz$,

বা, $x^2-(y-z)^2-4yz=myz-4yz$,

বা, $x^2-(y+z)^2=(m-4)yz$,

বা, $(x+y+z)(x-y-z)=(m-4)yz$,

বা $(x+y+z)\times(-k)=(m-4)yz$ [$\because \quad y+z-x=k$],

$\therefore \quad x+y+z=\dfrac{m-4}{-k}.\, yz=\dfrac{4-m}{k}.\, yz$;

অতএব, $x+y+z \propto yz$ (কারণ, $\dfrac{4-m}{k}$ ধ্রুবক) ।

উদা. 14. Two globes of gold that have their radii equal to r and r' are melted and formed into a single globe ; find its radius (the volume of a globe varies as the cube of the radius). [C. U. '31]

[যথাক্রমে r ও r' ব্যাসার্ধের দুইটি স্বর্ণ-গোলককে গলাইয়া একটি গোলকে পরিণত করা হইল। উহার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। গোলকের ঘনফল $\propto$ (ব্যাসার্ধ)^3]

মনে কর, গোলক দুইটির আয়তন (volume) যথাক্রমে V ও v এবং উহাদের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r ও r'.

$\because \quad V \propto r^3, \quad \therefore \quad V=mr^3$ (এখানে m ভেদ ধ্রুবক).

আবার, $\because \quad v \propto r'^3, \quad \therefore \quad v=mr'^3$ (m ভেদ ধ্রুবক).

$\therefore \quad V+v=m(r^3+r'^3)$.

এখানে, তৃতীয় গোলকটির আয়তন $V+v$ এবং মনে কর উহার ব্যাসার্ধ R.

$\therefore \quad V+v=mR^3$ (m ভেদ ধ্রুবক)

অতএব, $mR^3=m(r^3+r'^3), \quad \therefore \quad R^3=r^3+r'^3$,

$\therefore \quad$ R (নির্ণেয় ব্যাসার্ধ) $=\sqrt[3]{r^3+r'^3}$.

উদা. 15. The time of oscillation of a pendulum varies as the square root of its length. If a pendulum of length 8 feet oscillates once in 3·1 seconds, find the time for a pendulum 10 ft. long.

[দোলকের দোলনের সময় উহার দৈর্ঘ্যের বর্গমূলের সহিত সরলভেদে থাকে। যদি 8 ফুট দৈর্ঘ্যের একটি দোলক 3·1 সেকেণ্ডে একবার দোলে, তবে 10 ফুট দৈর্ঘ্যের দোলকের ঐ সময় কত হইবে ?]

মনে কর, t সেকেণ্ড একবার দোলনের সময় এবং l ফুট দোলকের দৈর্ঘ্য। অতএব, প্রদত্ত সর্ত অনুসারে $t \propto \sqrt{l}$.

$\therefore \quad t=k\sqrt{l}$ (এখানে k ভেদ ধ্রুবক)

$\because \quad l=8$ ফুট হইলে $t=3{\cdot}1$ সেকেণ্ড হয়,

$\therefore \quad 3{\cdot}1=k\sqrt{8}=k.2\sqrt{2}, \qquad \therefore \quad k=\frac{3{\cdot}1}{2\sqrt{2}}.$

অতএব, $t=\frac{3{\cdot}1}{2\sqrt{2}}\sqrt{l}$ হইল, এই সমীকরণে $l=10$ বসাইলে পাই

$$t=\frac{3{\cdot}1}{2\sqrt{2}}\times\sqrt{10}=\frac{3{\cdot}1\times\sqrt{20}}{4}=\frac{3{\cdot}1\times2\sqrt{5}}{4}=3{\cdot}5 \text{ (প্রায়)।}$$

অতএব, নির্ণেয় সময় $=3{\cdot}5$ সেকেণ্ড (প্রায়)।

উদা. 16. The mass m of a body varies as density d when the volume v is constant and varies as the volume v when density d is constant. If unit mass be defined as mass of a body of unit volume and unit density, show that $m=vd$.

[C. U. '29]

[কোন বস্তুর পিণ্ড (mass) m উহার ঘনতা (density) d-এর সহিত সরলভেদে থাকে যখন উহার ঘনফল v ধ্রুবক হয় এবং উহা v-এর সহিত সরলভেদে থাকে যখন d ধ্রুবক হয়। যদি এক একক ঘনফল ও এক একক ঘনতা বিশিষ্ট বস্তুপিণ্ডকে জড়পিণ্ডের একক ধরা হয়, তবে দেখাও যে $m=vd.$]

$\because \quad v$ ধ্রুবক থাকিলে $m\propto d$, এবং d ধ্রুবক থাকিলে $m\propto v$,

$\therefore \quad m\propto vd, \quad \therefore \quad m=kvd$ (এখানে k ভেদ ধ্রুবক)$\cdots$ (1)

প্রদত্ত সর্ত অনুসারে $v=1$ ও $d=1$ হইলে $m=1$ হয়,

$\therefore \quad$ (1) হইতে $1=k\times1\times1=k.$

অতএব, (1) হইতে পাই $m=kvd=vd$ [$\because \quad k=1$].

উদা. 17. A playground, whose length and width are in the ratio 8 : 7, has two-thirds of it reserved for accommodation. If the width is to be diminished by one-ninth, in what ratio should the length be increased in order that the accommodation may be trebled?

[C. U. '32]

[একটি খেলার মাঠের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 8 : 7 এবং উহার $\frac{2}{3}$ অংশ বসিবার স্থান। যদি উহার প্রস্থ $\frac{1}{9}$ অংশ কম করা হয়, তবে উহার দৈর্ঘ্য কি অনুপাতে বাড়াইলে বসিবার স্থান পূর্বের তিনগুণ হইতে পারে ?]

মনে কর, মাঠের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে x ও y, সুতরাং মাঠের ক্ষেত্রফল xy. অতএব, $\frac{2}{3}xy$ অংশ বসিবার স্থান এবং $\frac{1}{3}xy$ অংশ খেলিবার স্থান.

প্রশ্নানুসারে খেলিবার অংশ অপরিবর্তিত থাকিবে এবং বসিবার স্থান 3 গুণ করিতে হইবে। $\therefore$ নূতন মাঠের মোট ক্ষেত্রফল $=3\times\frac{2}{3}xy+\frac{1}{3}xy=\frac{7}{3}xy$.

এক্ষণে নূতন মাঠের প্রস্থ পূর্ব প্রস্থের $\frac{1}{9}$ কমিয়া যাওয়ায় নূতন প্রস্থ হইল $\frac{8}{9}y$.

$\therefore$ নূতন মাঠের দৈর্ঘ্য $=\frac{7}{3}xy\div\frac{8}{9}y=\frac{21}{8}x$.

অতএব, দৈর্ঘ্যটি 8 : 21 অনুপাতে বর্ধিত করিতে হইবে।

উদা. 18. Given that the illumination from a source of light varies inversely as the square of the distance, how much further from the candle must a book, which is now 8 inches off, be removed so as to receive just half as much light? [H. S. '64]

[আলোক প্রভার পরিমাণ আলোকের উৎস হইতে দূরত্বের বর্গের সহিত ব্যস্তভেদে থাকে। একখানি পুস্তক একটি বাতি হইতে 8 ইঞ্চি দূরে আছে, উহাকে আর কতটা সরাইলে আলোক-পরিমাণ অর্ধেক হইবে?]

মনে কর, আলোক-প্রভা $=l$ এবং আলোক উৎস হইতে দূরত্ব $=d$ ইঞ্চি।

প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই $l \propto \frac{1}{d^2}$, $\therefore$ $l=\frac{k}{d^2}$ (এখানে k ভেদ ধ্রুবক)

$\therefore$ যখন দূরত্ব 8 ইঞ্চি, তখন $l=\frac{k}{8^2}\cdots\cdots(1)$.

মনে কর, বাতিটি হইতে মোট D ইঞ্চি দূরে থাকিলে আলোক-প্রভা $=\frac{1}{2}l$ হয়।

$\therefore$ $\frac{1}{2}l=\frac{k}{D^2}\cdots(2)$. এখন (1) হইতে l-এর মান (2)-এ বসাইয়া

পাই $\frac{k}{2.8^2}=\frac{k}{D^2}$, বা $D^2=2.8^2$, $\therefore$ $D=8\sqrt{2}$ ইঞ্চি।

$\therefore$ বইখানি আর $(8\sqrt{2}-8)$ ইঞ্চি বা $8(\sqrt{2}-1)$ ইঞ্চি সরাইলে আলোক পরিমাণ অর্ধেক হইবে।

19. An engine without a waggon can go 24 miles an hour and its speed is diminished by a quantity which varies as the square root of the number of waggons attached. With four waggons its speed is 20 miles an hour. Find

the greatest number of waggons with which it can move ? [H. S. '69]

[কোন মাল গাড়ী (waggon) সংযুক্ত না থাকিলে একটি এঞ্জিন ঘণ্টায় 24 মাইল বেগে যাইতে পারে। উহার সহিত গাড়ী যুক্ত থাকিলে উহার গতিবেগের হ্রাসের পরিমাণ গাড়ী-সংখ্যার বর্গমূলের সহিত সরলভেদে থাকে। 4 খানা গাড়ী যুক্ত হইলে উহার গতি ঘণ্টায় 20 মাইল হয়। এঞ্জিনটি কত সর্বাধিক সংখ্যক গাড়ী লইয়া যাইতে পারে ?]

মনে কর, ঘণ্টা প্রতি গতি-হ্রাসের পরিমাণকে m মাইল দ্বারা এবং গাড়ীর সংখ্যাকে n দ্বারা সূচিত করা হইল।

$\therefore$ সর্তানুসারে $m \propto n^{\frac{1}{2}}$, $\therefore$ $m = kn^{\frac{1}{2}} \cdots (1)$, এখানে k ভেদ ধ্রুবক।

এখানে 4 খানি গাড়ী থাকিলে এঞ্জিনের গতি ঘণ্টায় (24−20) বা 4 মাইল হ্রাস পায়।

$\therefore$ (1) হইতে পাই $4 = k.4^{\frac{1}{2}}$, বা, $2k = 4$, $\therefore$ $k = 2$.

এক্ষণে, (1)-এ $m = 24$ এবং $k = 2$ বসাইয়া পাই

$24 = 2.n^{\frac{1}{2}}$, বা, $n^{\frac{1}{2}} = 12$, $\therefore$ $n = 144$.

অতএব, গাড়ীর সংখ্যা 144 হইলে এঞ্জিনটি গতিহীন হইবে।

$\therefore$ গাড়ীর নির্ণেয় সর্বাধিক সংখ্যা $= 143$.

উদা. 20. If the volume of a certain mass of gas be V c. ft. and the pressure per sq. ft. be P lbs., the following table shows their values :

Do P and V vary ? If so, how ? [T. P. 1969-70]

[যদি কোন বাষ্পপুঞ্জের ঘনফল V ঘনফুট ও প্রতি বর্গফুটে চাপ P পাউণ্ড হয়, তবে নিম্ন তালিকায় উহাদের মান দেওয়া হইল। P ও V কি ভেদে আছে ? যদি থাকে তবে কিরূপ ভেদে আছে ?]

P	400	600	800	1000	1500
V	15	10	$7\frac{1}{2}$	6	4

তালিকা হইতে দেখা যায় যে P বৃদ্ধি পাইতেছে এবং V হ্রাস পাইতেছে

Pএর বৃদ্ধির অনুপাত $\frac{600}{400}, \frac{800}{600}, \frac{1000}{800}, \frac{1500}{1000}$; অর্থাৎ, $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$.

আবার, Vএর হ্রাসের অনুপাত $\frac{10}{15}, \frac{7\frac{1}{2}}{10}, \frac{6}{7\frac{1}{2}}, \frac{4}{6}$,, $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$.

অতএব, দেখা যাইতেছে যে বৃদ্ধির অনুপাতের ব্যস্ত অনুপাতে হ্রাস হইতেছে।

$\therefore$ P ও V ভেদে আছে এবং ব্যস্তভেদে আছে অর্থাৎ $P \propto \frac{1}{V}$.

Exercise 9

1. If $b \propto a^3$ and if $b=50$ when $a=5$, find b when $a=1$ and find a when $b=6\frac{1}{4}$. Find also b in terms of a.

[যদি $b \propto a^3$ এবং $a=5$ হইলে $b=50$ হয়, তবে $a=1$ হইলে b কত হইবে এবং $b=6\frac{1}{4}$ হইলে a কত হইবে ? a দ্বারা bএর মান প্রকাশ কর।]

2. If $y \propto \frac{1}{x^2}$ and if $y=9$ when $x=10$, find y if $x=6$ and find x if $y=4$. Find also y in terms of x.

[যদি $y \propto \frac{1}{x^2}$ এবং $x=10$ হইলে $y=9$ হয়, তবে $x=6$ হইলে yএর এবং $y=4$ হইলে xএর মান কত হইবে ? x দ্বারা yএর মান নির্ণয় কর।]

3. If A varies as B and C jointly and if A$=2$ when B$=\frac{3}{5}$ and C$=\frac{10}{27}$, find C when A$=54$ and B$=3$. [C. U. '20]

[যদি B ও Cএর সহিত Aএর যৌগিক ভেদ থাকে এবং যদি B$=\frac{3}{5}$ ও C$=\frac{10}{27}$ হইলে A$=2$ হয়, তবে A$=54$ ও B$=3$ হইলে C কত হইবে ?]

4 If $a^2+b^2 \propto ab$, show that $a+b \propto a-b$.

[যদি $a^2+b^2 \propto ab$, তবে দেখাও যে $a+b \propto a-b$.]

5. The resistance (R) to the motion of a train of given weight is partly constant and partly varies as the square of the velocity (v). Express the statement by symbols.

[একটি নির্দিষ্ট ভারযুক্ত গাড়ীর গতির প্রতি বাধার (R) কতকটা ধ্রুবক এবং কতকটা গতিবেগের (v) বর্গের সহিত সরল ভেদে আছে। এই উক্তিকে প্রতীক চিহ্নদ্বারা প্রকাশ কর।]

6. Complete the following :—
(i) if $a \propto b^3$, $b \propto \cdots$
(ii) If $t \propto \sqrt{l}$, $l \propto \cdots$

[নিম্নের উক্তি দুইটি পূরণ কর :—
(i) যদি $a \propto b^3$, তবে $b \propto \cdots\cdots$, (ii) যদি $t \propto \sqrt{l}$, তবে $l \propto \cdots\cdots$]

7. If $a \propto b$ and $b \propto c$, show that $a^3+b^3+c^3 \propto 3abc$.

[যদি $a \propto b$ এবং $b \propto c$, তবে দেখাও যে $a^3+b^3+c^3 \propto 3abc$.]

8. If x varies directly as y and inversely as z, and $x=\frac{1}{6}$ when $y=5$ and $z=9$, find the relation between x, y and z. Hence find the value of x when $y=6$ and $z=\frac{1}{5}$.

[xএর yএর সহিত সরল ভেদ এবং zএর সহিত ব্যস্ত ভেদ আছে। যদি $y=5$ ও $z=9$ হইলে $x=\frac{1}{6}$ হয়, তবে x, y ও zএর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর এবং তাহা হইতে $y=6$ ও $z=\frac{1}{5}$ হইলে xএর মান নির্ণয় কর।]

9. If $x-y \propto z$ when y is constant and $x-z \propto y$ when z is constant, show that $x-y-z \propto yz$ when y and z both vary.

[যদি $x-y \propto z$ যখন y ধ্রুবক এবং $x-z \propto y$ যখন z ধ্রুবক, তবে দেখাও যে y ও z উভয়ই চল হইলে $x-y-z \propto yz$.]

10. If b is equal to the sum of two quantities one of which varies directly as a, and the other inversely as a, and if $b=5$ when $a=1$, and $b=12{\cdot}5$ when $a=6$, find the relation between a and b. Find the value of b when $a=3$.

[b দুইটি রাশির সমষ্টির সমান এবং aএর সহিত একটি রাশির সরলভেদ ও অন্যটির ব্যস্তভেদ আছে। যদি $a=1$ হইলে $b=5$ এবং $a=6$ হইলে $b=12{\cdot}5$ হয়, তবে a ও bএর মধ্যে সম্পর্ক এবং $a=3$ হইলে bএর মান নির্ণয় কর।]

11. A varies as the sum of two other quantities, one of which varies directly as B^2 and the other inversely as C. If $A=16$ when $B=2$ and $C=1$, and if $A=5$ when $B=1$ and $C=2$, find the value of A when $B^2=3$ and $C^2=16$.

[দুইটি রাশির সমষ্টির সহিত Aএর সরলভেদ আছে এবং একটি রাশির B^2এর সহিত সরলভেদ এবং Cএর সহিত অন্যটির ব্যস্তভেদ আছে। যদি $B=2$ ও $C=1$ হইলে $A=16$ হয় এবং $B=1$ ও $C=2$ হইলে $A=5$ হয়, তবে $B^2=3$ ও $C^2=16$ হইলে A-র মান কত হয় ?]

12. If $x \propto \frac{1}{y^2}$, find the ratio in which x is increased if y is increased in the ratio 7 : 4.

[যদি $x \propto \frac{1}{y^2}$, তবে y 7 : 4 অনুপাতে বৃদ্ধি পাইলে x কি অনুপাতে বৃদ্ধি পাইবে ?]

13. The area of a circle varies as the square of its radius ; if the area is $17\frac{1}{9}$ sq. ft. when the radius is 2 ft. 4 in., find the area when the radius is 3 ft. 6 in.

[বৃত্তের ক্ষেত্রফল উহার ব্যাসার্ধের বর্গের সহিত সরল ভেদে থাকে। ব্যাসার্ধ 2 ফুট 4 ইঞ্চি হইলে যদি বৃত্তের ক্ষেত্রফল $17\frac{1}{9}$ বর্গফুট হয়, তবে ব্যাসার্ধ 3 ফুট 6 ইঞ্চি হইলে বৃত্তের ক্ষেত্রফল কত হইবে ?]

14. If x varies directly as y and inversely as z and if $x=a$ when $y=b$ and $z=c$, find the value of x when $y=b^2$ and $z=c^2$. [C. U. 1877]

[xএর যদি yএর সহিত সরলভেদ ও zএর সহিত ব্যস্ত ভেদ থাকে এবং যদি $y=b$ ও $z=c$ হইলে $x=a$ হয়, তবে $y=b^2$ ও $z=c^2$ হইলে xএর মান কি হইবে ?]

15. Apply the principle of variation to find how long 25 men will take to plough 30 acres, if 5 men take 9 days to plough 10 acres of land. [C. U. '34]

[যদি 5 জন লোক 9 দিনে 10 একর জমি চষিতে পারে, তবে 30 একর জমি চষিতে 25 জন লোকের কত দিন লাগিবে ভেদ প্রণালীতে নির্ণয় কর।]

16. The length of a pendulum varies inversely as the square of the number of beats it makes per minute. If a pendulum 16 ft. long makes 27 beats per minute, find the length of the pendulum that makes 24 beats per minute.

[ঘড়ির দোলকের দৈর্ঘ্য উহা প্রতি মিনিটে যতবার শব্দ (টিক্ টিক্) করে তাহার বর্গের সহিত ব্যস্তভেদে থাকে। একটি 16 ফুট দীর্ঘ দোলক যদি প্রতি মিনিটে 27টি শব্দ করে, তবে যে দোলক প্রতি মিনিটে 24টি শব্দ করে তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।]

17. If $x \propto yz^2$, $y \propto ab^2$ and $z \propto \frac{a}{a}$, find how x varies with a, b.

18. If in the variation $x=ky$ and $y=k'z$, a, b, c and a', b', c' be two sets of values of x, y, z,
show that $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{aa'+bb'+cc'}=\dfrac{aa'+bb'+cc'}{a'^2+b'^2+c'^2}$. [C. U. '22]

[যদি $x=ky$ ও $y=k'z$ ভেদে x, y, z-এর যথাক্রমে a, b, c ও a', b', c' দুই দফা মান হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{aa'+bb'+cc'}=\frac{aa'+bb'+cc'}{a'^2+b'^2+c'^2}.$$]

19. If a stone falls s ft. in t seconds from rest, $s \propto t^2$. If it is observed to fall 64 ft. in 2 secs., find how far it falls in 4 seconds.

[যদি স্থির অবস্থা হইতে কোন বস্তু t সেকেণ্ডে s ফুট পড়ে তবে $s \propto t^2$. যদি উহাকে 2 সেকেণ্ডে 64 ফুট পড়িতে দেখা যায়, তবে উহা 4 সেকেণ্ডে কতটা পড়িবে ?]

20. The pressure of wind on a plane surface varies jointly as the area of the surface and the square of the wind's velocity. If the pressure on a square foot is 1 lb. when the wind's velocity is 16 miles per hour, find the velocity of the wind when the pressure on the square yard is $14\frac{1}{16}$ lb.

[কোন সমতলের উপর বায়ুর চাপ ঐ তলের ক্ষেত্রফল ও বায়ুর গতিবেগের বর্গের সহিত যৌগিক ভেদে থাকে। যদি বায়ুবেগ ঘণ্টায় 16 মাইল হইলে এক বর্গফুটের উপর বায়ুচাপ এক পাউণ্ড হয়, তবে এক বর্গগজের উপর বায়ুচাপ $14\frac{1}{16}$ পাউণ্ড হইলে বায়ুর গতিবেগ নির্ণয় কর।]

21. Pressure ($=p$) in a liquid varies as depth ($=d$) when the density ($=$D) is constant and it varies as density when depth is constant. The pressure is 1 when the depth is 32 and the density 1. Find the depth at which the pressure is 2 when the density is 16. [C. U. '21]

[কোন তরল পদার্থে চাপ (p) উহার গভীরতার (d) সহিত সরলভেদে থাকে যখন উহার ঘনতা (D) ধ্রুবক থাকে এবং ঘনতার সহিত সরলভেদে থাকে যখন গভীরতা ধ্রুবক থাকে। যদি গভীরতা 32 ও ঘনতা 1 হইলে চাপ 1 হয়, তবে ঘনতা 16 হইলে কত গভীরতায় চাপ 2 হইবে ?]

22. The electrical resistance of a wire is proportional directly to its length and inversely to the square of its diameter. Compare the resistance of two wires of the same material, one of which has a diameter of 1·5 *mm.* and is 4*m.* long, while the other has a diameter of 2 *mm.* and is 5*m.* long.

[কোন তারের বৈদ্যুতিক প্রতিরোধশক্তি উহার দৈর্ঘ্যের সহিত সরলভেদে ও ব্যাসের বর্গের সহিত ব্যস্তভেদে থাকে। একই ধাতুনির্মিত দুইটি তারের মধ্যে একটির ব্যাস 1·5 মিলি মি. ও দৈর্ঘ্য 4 মিটার এবং অন্যটির ব্যাস 2 মিলি মি. ও দৈর্ঘ্য 5 মিটার। উহাদের প্রতিরোধশক্তির তুলনা কর।]

23. The volume of a sphere varies as the cube of the radius and the surface of a sphere varies as the square of the radius. Show that the square of the volume varies as the cube of the surface. [C. U. 1924]

[গোলকের ঘনফল $\propto$ (ব্যাসার্ধ)^3 এবং উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল $\propto$ (ব্যাসার্ধ)^2 ; প্রমাণ কর যে ঘনফলের বর্গ বক্রতলের ক্ষেত্রফলের ত্রিঘাতের সহিত সরলভেদে থাকে।]

24. The cost of a dinner is partly constant and partly varies as the number of guests. If the cost is Rs. 275 for 150 guests and Rs. 320 for 240 guests ; find the cost for 250 guests.

[কোন ভোজের খরচ আংশিক ধ্রুবক ও আংশিক নিমন্ত্রিতদের সংখ্যার সহিত সরলভেদে আছে। যদি 150 জন নিমন্ত্রিতের জন্য 275 টাকা এবং 240 জনের জন্য 320 টাকা খরচ হয়, তবে 250 জনের জন্য কত খরচ হইবে ?]

25. The cost of boring a well, f feet deep, partly varies as f and partly as f^2. Such a well costs Rs. 130 if the depth is 40 ft. and costs Rs. 255 if the depth is 60 ft. How deep is the well if the cost is Rs. 420 ?

[f ফুট গভীর একটি কূপ খননের ব্যয় আংশিকভাবে f-এর সহিত ও আংশিকভাবে f^2-এর সহিত সরলভেদে আছে। এরূপ একটি 40 ফুট গভীর কূপের জন্য 130 টাকা ও 60 ফুট গভীর কূপের জন্য 255 টাকা ব্যয় হইলে, কত গভীর কূপের জন্য 420 টাকা ব্যয় হইবে ?]

26. In a certain machine a force of P pounds will support a load of W pounds and it is known that P is partly

constant and partly proportional to W. If P=14 when W=44 and P=26 when W=92, draw a graph to show the value of P for any load between 40 lbs. and 100 lbs. Find the value (*i*) of P when W=76, and (*ii*) of W when P=20.

[কোন একটি যন্ত্রে P পাউণ্ড শক্তি (force) W পাউণ্ড ভার ধারণ করিতে পারে এবং P আংশিক ধ্রুবক ও আংশিক W-র সমানুপাতী। যদি W=44 হইলে P=14 এবং W=92 হইলে P=26 হয়, তবে 40 পাউণ্ড ও 100 পাউণ্ডের মধ্যে যে কোন ভার ধারণক্ষম Pএর মান জ্ঞাপক একটি লেখ অঙ্কন কর। উহা হইতে (i) W=76 হইলে Pএর মান এবং (ii) P=20 হইলে W-র মান নির্ণয় কর।]

27. The expenses of a hostel are partly constant and partly vary as the number of inmates. The expenses were Rs. 2000 when the inmates were 120, and Rs. 1700 when the inmates were 100. Find the number of inmates when the expenses were Rs. 1880. [B. U. '27]

[একটি হোস্টেলের ব্যয় আংশিক ধ্রুবক ও আংশিক ঐ হোস্টেলবাসী লোক সংখ্যার সহিত সরলভেদে আছে। যদি লোকসংখ্যা 120 হইলে ব্যয় 2000 টাকা এবং লোকসংখ্যা 100 হইলে ব্যয় 1700 টাকা হয়, তবে 1880 টাকা ব্যয় হইলে লোকসংখ্যা কত ?]

28. The time of going from one place to another varies directly as the distance and inversely as the speed. Two trains describe distances which are in the ratio of 5 to 8 and times are in the ratio of 4 to 7. Find the ratio of the speeds.

[এক স্থান হইতে অপর একস্থানে যাইবার জন্য যে সময় লাগে দূরত্বের সহিত তাহার সরলভেদ ও গতিবেগের সহিত ব্যস্তভেদ। দুইটি ট্রেন যে দুই দূরত্ব গেল তাহাদের অনুপাত 5 : 8 এবং সময়ের অনুপাত 4 : 7 হইলে ট্রেন দুইটির গতিবেগের অনুপাত নির্ণয় কর।]

29. The volume of a pyramid varies jointly as the height and the area of its base ; and when the area of the base is 60 square feet and the height 14 ft., the volume is ·280 cubic feet. What is the area of the base of a pyramid whose volume is 390 cubic feet and whose height is 26 feet ?

[H. S. '63]

[পিরামিডের ঘনফল উহার উচ্চতা ও ভূমির ক্ষেত্রফলের সহিত যৌগিক-ভেদে আছে এবং যখন ভূমির ক্ষেত্রফল 60 বর্গফুট ও উচ্চতা 14 ফুট, তখন ঘনফল হয় 280 ঘনফুট। যাহার ঘনফল 390 ঘনফুট ও উচ্চতা 26 ফুট, সেই পিরামিডের ভূমির ক্ষেত্রফল কত ?]

30. The volume of a cone varies jointly as the height and the area of the circular base The volume of the cone is 50 c. ft. when its height is 15 ft. and the area of its base is 10 sq. ft. Find the radius of its circular base when the volume of the cone is 770 c. ft. and its height is 15 ft. [$\pi = \frac{22}{7}$]
[H. S. '68]

[শঙ্কুর ঘনফল উহার উচ্চতা ও বৃত্তাকার ভূমির ক্ষেত্রফলের সহিত যৌগিকভেদে থাকে। যদি উচ্চতা 15 ফুট ও ভূমির ক্ষেত্রফল 10 বর্গফুট হইলে ঘনফল হয় 50 ঘনফুট, তবে ঘনফল 770 ঘনফুট ও উচ্চতা 15 ফুট হইলে ভূমির ব্যাসার্ধ কত হইবে ?]

31. The illumination from a source of light varies inversely as the square of the distance. A book is at a distance of 9 dm. from a lamp. Find how much farther the book is to be removed so that it receives one-third as much light.

[কোন আলোক-উৎস হইতে আলোক পরিমাণ মধ্যস্থ দূরত্বের বর্গের সহিত ব্যস্তভেদে আছে। কোন ল্যাম্প হইতে একটি পুস্তক 9 ডেসিমিটার দূরে আছে। উহাকে আর কতটা সরাইলে পূর্ব পরিমাণের $\frac{1}{3}$ অংশ আলো পাইবে ?]

32. A locomotive engine without wagons can go 35 km. an hour, and its speed is diminished by a quantity which varies as the square root of the number of wagons attached ; with 9 wagons its speed is 20 km. an hour. Find the least number of wagons which the engine fails to move.

[কোন মালগাড়ীর এঞ্জিনে গাড়ী যুক্ত না থাকিলে উহা ঘণ্টায় 35 কিলোমিটার বেগে যাইতে পারে এবং গাড়ী সংযুক্ত হইলে গাড়ীর সংখ্যার বর্গমূলের সহিত সরলভেদে উহার গতি হ্রাস পায়। যদি 9 খানি গাড়ী যুক্ত হইলে উহার গতি ঘণ্টায় 20 কিলোমিটার হয়, তবে এঞ্জিনটি কত লঘিষ্ঠ সংখ্যক গাড়ী লইয়া চলিতে অক্ষম হইবে ?]

33. Consumption of coal by an engine varies as the square of its speed. When the speed is 50 km. an hour, the consumption of coal is 100 kg. per hour. If the cost of 1 kg. of coal be 25 paise and other expenses per hour be Rs. 4, find the minimum expenses when the engine runs 300 km.

[এঞ্জিনের কয়লা খরচ $\propto$ (গতিবেগ)^2 ; যখন এঞ্জিনের গতিবেগ ঘণ্টায় 50 কি. মি., তখন ঘণ্টায় কয়লা খরচ 100 কি. গ্রাম। প্রতি কি. গ্রা. কয়লার মূল্য 25 পয়সা হইলে এবং প্রতি ঘণ্টায় এঞ্জিন চালাইবার অন্যান্য খরচ 4 টাকা হইলে, ঐ এঞ্জিনের 300 কি. মি. যাইতে ন্যূনপক্ষে কত ব্যয় হইবে ?]

Logarithm (লগারিদম্)

28. আমরা জানি, $2^3=8$, এখানে 2-কে বলা হয় নিধান (base) এবং 3-কে বলা হয় 2-এর ঘাতের (powerএর) সূচক (index)। তাহা হইলে 3-এর সহিত 8-এর কি সম্পর্ক ? আমরা বলিব 3, 8-এর লগারিদম্ যখন নিধান 2 ; ইহা ইংরাজীতে বলা হয় 3 is the logarithm of 8 to the base 2. ইহা সংক্ষেপে লেখা হয় এইভাবে $3=\log_2 8$. সেইরূপে যেহেতু $3^2=9$, $\therefore\ 2=\log_3 9$. সাধারণতঃ, যদি $a^x=\mathrm{M}$ হয়, তবে $x=\log_a \mathrm{M}$ হয়।

বিপরীতক্রমে যদি $x=\log_a \mathrm{M}$ হয়, তবে $a^x=\mathrm{M}$ হয়।

সংজ্ঞা : কোন নিধানকে কোন ঘাতে উন্নীত করিলে যে রাশির সহিত সমান হয়, ঐ ঘাতের সূচককে ঐ রাশির প্রদত্ত নিধানের জন্য লগারিদম্ বলে।

সূচক-সম্বলিত যে-কোন ফলাফল লগারিদম্-এর সাহায্যে এবং বিপরীতক্রমে লগারিদম্-সম্বলিত যে-কোন ফলাফল সূচকের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। যেমন :—

সূচক-সম্বলিত ফল	$3^4=81$	$5^{-2}=\frac{1}{25}$	$8^{\frac{2}{3}}=4$	$9^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{27}$
লগারিদম্-সম্বলিত ফল	$4=\log_3 81$	$-2=\log_5\left(\frac{1}{25}\right)$	$\frac{2}{3}=\log_8 4$	$-\frac{3}{2}=\log_9\left(\frac{1}{27}\right)$

সুতরাং, যদি a, x ও N এমন তিনটি সংখ্যা হয় যে,

$a^x = N$ এখানে $a > 0$, এবং $a \neq 1$,

তখন আমরা লিখিব

$x = \log_a N$.

[দ্রষ্টব্য : a ও N বাস্তব ধনরাশি হইলে $a^x = -N$ সমীকরণটি x-এর কোন বাস্তব মানের সাহায্যে সমাধান করা যায় না ; সুতরাং, একটি ঋণরাশির লগারিদম্ (নিধান যখন বাস্তব ধনরাশি) অবশ্যই অস্তিত্বহীন বা অবাস্তব হইবে।]

আবার দেখা যায় যে, $2^6 = 64$, $4^3 = 64$ ও $8^2 = 64$

অর্থাৎ $\log_2 64 = 6$, $\log_4 64 = 4$ ও $\log_8 64 = 2$.

সুতরাং একই সংখ্যার নিধান ভিন্ন ভিন্ন হইলে উহাদের লগের মানও বিভিন্ন হইবে।

অতএব, নিধানের সঠিক উল্লেখ না থাকিলে কোন সংখ্যার লগারিদম্ সম্পূর্ণ অর্থহীন।

29. কতিপয় সূত্র :

(a) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

(b) $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

(c) $\log_a M^n = n \log_a M$

(d) $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$.

সূত্রগুলির প্রমাণ :

(a) মনে করা যাক, $x = \log_a M$ এবং $y = \log_a N$

$\therefore \quad a^x = M \ldots\ldots(1)$
এবং $a^y = N \ldots\ldots(2)$

(1) ও (2) গুণ করিয়া পাই $a^x . a^y = MN$, বা, $a^{x+y} = MN$.

$\therefore \quad \log_a(MN) = x + y = \log_a M + \log_a N$.

অনুসিদ্ধান্ত : $\log_a(xyz\ldots) = \log_a x + \log_a y + \log_a z + \cdots$

(b) মনে করা যাক, $x = \log_a M$ এবং $y = \log_a N$.

অতএব, $a^x = M$ এবং $a^y = N$.

এখন ভাগ করিয়া $\frac{a^x}{a^y} = \frac{M}{N}$, বা, $a^{x-y} = \frac{M}{N}$

$\therefore \quad \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = x - y = \log_a M - \log_a N$.

অনুসিদ্ধান্ত : $\log_a \frac{xyz\cdots}{mnp\cdots} = \log_a x + \log_a y + \log_a z + \cdots\cdots$
$- \log_a m - \log_a n - \log_a p - \cdots$

(c) মনে করা যাক,

$x = \log_a M^n$ এবং $y = \log_a M$, $\therefore$ $a^x = M^n$ এবং $a^y = M$.

$\therefore$ $a^x = M^n = (a^y)^n = a^{ny}$, সুতরাং $x = ny$.

অতএব, $\log_a M^n = n \log_a M$.

দ্রষ্টব্য : এই সূত্রটি nএর মান যে কোন সংখ্যা হইলেও সত্য হইবে।

(d) মনে কর যে, $x = \log_a M$ এবং $y = \log_b M$.

$\therefore$ $a^x = M$ এবং $b^y = M$, $\therefore$ $a^x = b^y$ বা $a^{\frac{x}{y}} = b$.

$\therefore$ $\frac{x}{y} = \log_a b$, $\therefore$ $x = y \log_a b$,

$\therefore$ $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$.

[**দ্রষ্টব্য :** এই সূত্র দ্বারা নিধান পরিবর্তন করা হইয়াছে।]

অনুসিদ্ধান্ত : এই সূত্রে $M = a$ ধরিলে $\log_b a \times \log_a b = 1$,

অর্থাৎ $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ $\cdot$(1)

অতএব, নিধান পরিবর্তনের সূত্রটি অনুসিদ্ধান্তের সাহায্যে নিম্নলিখিত রূপে লিখা যায়—

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a} \cdots (2)$$

সুতরাং M ও a উভয়ের b-নিধানযুক্ত লগারিদম্ জানা থাকিলে M-এর a-নিধানযুক্ত লগারিদম্ নির্ণয় করা যায়।

30. লগারিদম্-এর তত্ত্বাবলী :—

(i) আমরা জানি, $a^0 = 1$.

শূন্য ব্যতীত a যে-কোন সসীম বাস্তব রাশি হইলেই ইহা সত্য হইবে।

$$\therefore \quad \log_a 1 = 0.$$

অতএব, শূন্য ব্যতীত যে কোন সসীম বাস্তব রাশি নিধান হইলে এককের (1এর) লগারিদম্ শূন্য হইবে।

(ii) $a^1 = a$, $\therefore$ $\log_a a = 1$.

$\therefore$ যাহা নিধান তাহারই লগারিদম্ সর্বদা 1 হইবে।

(iii) $a^{-1}=\frac{1}{a}$, $\therefore$ $\log_a\left(\frac{1}{a}\right)=-1$.

$\therefore$ 1 ভিন্ন নিধানের অন্যোন্যকের লগ $=-1$.

(iv) নিধান যদি 1 অপেক্ষা কম হয়, তবে 0-এর লগারিদম্ হইবে ∞ এবং যদি নিধান 1 অপেক্ষা বেশী হয় তবে 0-এর লগারিদম্ হইবে $-\infty$.

$a<1$ ধরিয়া যদি $a^x=0$ হয়, তবে $x=+\infty$,

$\therefore$ $\log_a 0=+\infty$.

আবার, $a>1$ ধরিয়া যদি $a^x=0$ হয়, তবে $x=-\infty$,

$\therefore$ $\log_a 0=-\infty$.

উদাহরণমালা 12 (a)

উদা. 1. Find the logarithm of 1728 to the base $2\sqrt{3}$.

[নিধান $2\sqrt{3}$ হইলে 1728-এর লগারিদম্ কত হয় ?]

মনে কর, x নির্ণেয় লগারিদম্। সুতরাং সংজ্ঞা অনুসারে পাওয়া যায়,

$$(2\sqrt{3})^x=1728=2^6.3^3=(2\sqrt{3})^6.$$

$$\therefore \quad x=6.$$

অতএব, নির্ণেয় লগারিদম্ $=6$.

উদা. 2. Find the base when the logarithm of 324 is 4

[324-এর লগারিদম্ 4 হইলে উহার নিধান কত ?]

মনে কর, নির্ণেয় নিধান $=x$. সুতরাং সংজ্ঞা অনুসারে পাওয়া যায়,

$$(x)^4=324=3^4.2^2=3^4\times(\sqrt{2})^4=(3\sqrt{2})^4$$

$$\therefore \quad x=3\sqrt{2}.$$

অতএব, নির্ণেয় নিধান $=3\sqrt{2}$.

উদা. 3. Prove that $\log\frac{75}{16}-2\log\frac{5}{9}+\log\frac{32}{243}=\log 2$.

[C. U. '51]

প্রদত্ত বাম পক্ষ $=\log 75-\log 16-2(\log 5-\log 9)+\log 32-\log 243$

$=\log(3\times 5^2)-\log 2^4-2(\log 5-\log 3^2)+\log 2^5-\log 3^5$

$=\log 3+2\log 5-4\log 2-2\log 5+4\log 3+5\log 2-5\log 3$

$=5\log 3-5\log 3+2\log 5-2\log 5+5\log 2-4\log 2$

$=\log 2$.

বিকল্প প্রমাণ :

বাম পক্ষ $=\log\left(\frac{75}{16}\right)-\log\left(\frac{5}{9}\right)^2+\log\left(\frac{32}{243}\right)$

$$=\log\left[\frac{\left(\frac{75}{16}\right)\times\left(\frac{32}{243}\right)}{\left(\frac{5}{9}\right)^2}\right]=\log\left[\frac{\frac{3\times5^2}{2^4}\times\frac{2^5}{3^5}}{\frac{5^2}{3^4}}\right]$$

$$=\log\left[\frac{3\times5^2\times2^5\times3^4}{2^4\times3^5\times5^2}\right]=\log 2.$$

উদা. 3. (a) Show that $\log_7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\cdots\text{to }\infty}}}=1$.

মনে কর, $x=\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\cdots\text{to }\infty}}}$, $\therefore\ x^2=7\sqrt{7\sqrt{7\cdots\text{to }\infty}}=7x$,

$\therefore\ x^2-7x=0$, বা, $x(x-7)=0$, $\therefore\ x=7\ \ (\because x\neq0)$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\log_7 x=\log_7 7=1$.

উদা. 4. Prove that

$x^{\log y-\log z}\times y^{\log z-\log x}\times z^{\log x-\log y}=1.$

[C. U. '39]

মনে কর, বাম পক্ষ $=u$. এখন উভয় পক্ষের লগ লইয়া পাই,

$\log u=\log[x^{\log y-\log z}\times y^{\log z-\log x}\times z^{\log x-\log y}]$

$=\log x^{\log y-\log z}+\log y^{\log z-\log x}+\log z^{\log x-\log y}$

$=(\log y-\log z)\log x+(\log z-\log x)\log y+(\log x-\log y)\log z$

$=0=\log 1.$

$\therefore\ u=1$, অর্থাৎ প্রদত্ত বামপক্ষ $=1$.

উদা. 5. If $\frac{\log x}{y-z}=\frac{\log y}{z-x}=\frac{\log z}{x-y}$, prove that $x^xy^yz^z=1$.

মনে কর, $\frac{\log x}{y-z}=\frac{\log y}{z-x}=\frac{\log z}{x-y}=k.$

$\therefore\ \log x=k(y-z)$, $\log y=k(z-x)$ এবং $\log z=k(x-y)$,

বা, $x\log x=kx(y-z)$, $y\log y=ky(z-x)$ এবং $z\log z=kz(x-y)$.

$\therefore\ x\log x+y\log y+z\log z=kx(y-z)+ky(z-x)+kz(x-y)$,

বা, $\log x^xy^yz^z=k\{x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)\}$

$=k\times0=0=\log 1.$

$\therefore\ x^xy^yz^z=1.$

উদা. 6. If x, y, z are in G. P., show that $\log_a x$, $\log_a y$, $\log_a z$ are in A. P.

[যদি x, y, z গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে, তবে দেখাও যে $\log_a x$, $\log_a y$, $\log_a z$ একটি সমান্তর শ্রেণী ।]

যেহেতু x, y, z গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত, সুতরাং $y^2 = zx$. ইহার উভয় পক্ষের লগ্ লইয়া পাওয়া যায়,

$$\log_a y^2 = \log_a zx, \quad \text{বা,} \quad 2\log_a y = \log_a z + \log_a x.$$

অতএব, $\log_a x$, $\log_a y$, $\log_a z$ একটি সমান্তর শ্রেণী ।

উদা. 7. If $\log(x^3y^2) = 3a+2b$ and $\log(x^2y^3) = 2a+3b$, find $\log x$ and $\log y$ in terms of a and b. [C. U. '48]

[যদি $\log(x^3y^2) = 3a+2b$ এবং $\log(x^2y^3) = 2a+3b$ হয়, তবে a ও b দ্বারা $\log x$ ও $\log y$ নির্ণয় কর ।]

$\because \ \log(x^3y^2) = 3a+2b, \ \therefore \ 3\log x + 2\log y = 3a+2b \cdots$(i)

আবার, $\because \ \log(x^2y^3) = 2a+3b, \ \therefore \ 2\log x + 3\log y = 2a+3b \cdots$(ii)

এক্ষণে, সমীকরণ (i) ও (ii) সমাধান করিয়া পাওয়া যায়,

$$\log x = a \ \text{এবং} \ \log y = b.$$

উদা. 8. If $a^2+b^2 = 7ab$, show that $\log\{\frac{1}{3}(a+b)\}$
$= \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

$\because \ a^2+b^2 = 7ab, \ \therefore \ (a+b)^2 = 9ab$ [উভয় পক্ষে $2ab$ যোগ করিয়া]

বা, $\{\frac{1}{3}(a+b)\}^2 = ab$, বা, $\{\frac{1}{3}(a+b)\} = (ab)^{\frac{1}{2}}$. এখন উভয় পক্ষের লগ্ লইয়া পাওয়া যায়, $\log\{\frac{1}{3}(a+b)\} = \log(ab)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

উদা. 9. If $y = a^{\frac{1}{1-\log x}}$, $z = a^{\frac{1}{1-\log y}}$, then prove that $x = a^{\frac{1}{1-\log z}}$, all the logarithms being calculated to the base a.

যেহেতু $y = a^{\frac{1}{1-\log x}}$, $\quad \therefore \quad \log_a y = \dfrac{1}{1-\log_a x} \cdots$(i)

আবার, যেহেতু $z = a^{\frac{1}{1-\log y}}$, $\quad \therefore \quad \log_a z = \dfrac{1}{1-\log_a y} \cdots$(ii)

এখন (ii) হইতে পাওয়া যায়,

$$1-\log_a y=\frac{1}{\log_a z}, \quad \text{বা,} \quad \log_a y=1-\frac{1}{\log_a z}=\frac{\log_a z-1}{\log_a z}.$$

∴ (i) হইতে পাওয়া যায়,

$$1-\log_a x=\frac{1}{\log_a y}=\frac{\log_a z}{\log_a z-1},$$

বা, $\log_a x=1-\dfrac{\log_a z}{\log_a z-1}=\dfrac{-1}{\log_a z-1}=\dfrac{1}{1-\log_a z}$

অতএব, $x=a^{\frac{1}{1-\log z}}$

উদা. 10. Prove that $\log_b a\times\log_c b\times\log_a c=1$; [C. U. '34] and hence find the value of $\log_{\sqrt{a}} b\times\log_{\sqrt{b}} c\times\log_{\sqrt{c}} a$.

$\log_b a\times\log_c b\times\log_a c$

$=\log_c a\times\log_b c\times\log_c b\times\log_a c$ [অনুচ্ছেদ 29(d)]

$=(\log_c a\times\log_a c)\times(\log_b c\times\log_c b)$

$=1\times1$ [অনুচ্ছেদ 29(d) অনুসিদ্ধান্ত হইতে।]

$=1.$

$\log_{\sqrt{a}} b\times\log_{\sqrt{b}} c\times\log_{\sqrt{c}} a$

$=\dfrac{1}{\log_b\sqrt{a}}\times\dfrac{1}{\log_c\sqrt{b}}\times\dfrac{1}{\log_a\sqrt{c}}$ [29(d)-এর (i)]

$=\dfrac{1}{\frac{1}{2}\log_b a}\times\dfrac{1}{\frac{1}{2}\log_c b}\times\dfrac{1}{\frac{1}{2}\log_a c}$

$=\dfrac{8}{\log_b a\times\log_c b\times\log_a c}=\dfrac{8}{1}$

$=8.$

উদা. 11. If $\log_a b=10$ and $\log_{6a}(32b)=5$, find a. [C.U. '49]

যেহেতু $\log_a b=10$, ∴ $a^{10}=b$, ... (i)

আবার, যেহেতু $\log_{6a}(32b)=5$, ∴ $(6a)^5=32b$, ... (ii)

(i)-কে (ii) দ্বারা ভাগ করিয়া পাওয়া যায়,

$\dfrac{a^{10}}{(6a)^5}=\dfrac{b}{32b}$, বা, $\dfrac{a^{10}}{6^5a^5}=\dfrac{1}{32}$, বা, $a^5=\dfrac{6^5}{32}=\dfrac{6^5}{2^5}=3^5$.

অতএব, $a=3$.

উদা. 12. Prove that $\frac{1}{\log_a(abc)}+\frac{1}{\log_b(abc)}+\frac{1}{\log_c(abc)}=1.$

মনে কর, $\log_a(abc)=x$, $\log_b(abc)=y$, $\log_c(abc)=z$;

অতএব, $a^x=abc$, $b^y=abc$, $c^z=abc$.

$\therefore \quad a=(abc)^{\frac{1}{x}}\cdots(1),\quad b=(abc)^{\frac{1}{y}}\cdots(2),\quad c=(abc)^{\frac{1}{z}}\cdots(3)$

(1), (2), (3) গুণ করিয়া পাই $abc=(abc)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

$\therefore \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.$

$\therefore \quad \frac{1}{\log_a(abc)}+\frac{1}{\log_b(abc)}+\frac{1}{\log_c(abc)}=1.$

Exercise (10)A

1. Find the logarithm of :—

(i) 324 to the base (নিধান) $3\sqrt{2}$ [H.S.Exam.,'60 Compl.

(ii) 144 to the base $2\sqrt{3}$

(iii) $\dot{\cdot 1}$ to the base $9\sqrt{3}$ [H. S. Exam, '60 Compl.

(iv) $\dot{\cdot 3}$ to ths base $3\sqrt{3}$

(v) ·0001 to the base ·1

(vi) $\cos^3\alpha$ to the base $\sec\alpha$.

2. Find the base if the logarithm of

(i) 1728 is 6 (ii) 400 is 4 (iii) $\sqrt{5}$ is $-\frac{1}{6}$

(iv) $\frac{1}{a}$ is -1 (v) $\frac{1}{3}$ is $-\frac{1}{3}$.

3. Prove the following :—

(a) $\log_a a^x=x$, (b) $a^{\log_a x}=x$; (c) $\log_a\left(\frac{1}{a^n}\right)=-n$.

(d) $\log_{b^n}a^n=\log_b a$; (e) $a^{\log b}=b^{\log a}$.

4. Prove the following :—

(a) $\log 2+16\log\frac{16}{15}+12\log\frac{25}{24}+7\log\frac{81}{80}=1$ [C. U. '40]

(b) $7\log\frac{10}{9}-2\log\frac{25}{24}+3\log\frac{81}{80}=\log 2$ [C. U. '29]

(c) $7\log\frac{16}{15}+5\log\frac{25}{24}+3\log\frac{81}{80}=\log 2$ [C. U. '36]

(d) $7\log\frac{15}{16}+6\log\frac{8}{3}+5\log\frac{2}{5}+\log\frac{32}{25}=\log 3.$

(e) $3\log\frac{36}{25}+\log\left(\frac{6}{27}\right)^3-2\log\frac{16}{125}=\log 2.$

5, (i) If $\frac{\log x}{y-z}=\frac{\log y}{z-x}=\frac{\log z}{x-y}$, show that $xyz=1$.

(ii) If $\frac{\log a}{y-z}=\frac{\log b}{z-x}=\frac{\log c}{x-y}$, show that $a^x b^y c^z=1$.

6. If $\frac{\log x}{b-c}=\frac{\log y}{c-a}=\frac{\log z}{a-b}$, then prove the following :—

(i) $x^a y^b z^c=1$; (ii) $x^{b+c}.y^{c+a}.z^{a+b}=1$;

(iii) $x^{b^2+bc+c^2}.y^{c^2+ca+a^2}.z^{a^2+ab+b^2}=1$.

7. If $\log_e m+\log_e n=\log_e(m+n)$, find m as a simple function of n. [C. U. '13]

[যদি $\log_e m+\log_e n=\log_e(m+n)$ হয়, তবে n দিয়া mএর মান নির্ণয় কর।]

8. If a series of numbers be in G. P., show that their corresponding logarithms are in A. P.

[যদি একটি সংখ্যা-শ্রেণী গুণোত্তর শ্রেণীতে থাকে, তবে দেখাও যে যথাক্রমে উহাদের লগারিদম্‌গুলি একটি সমান্তর শ্রেণী হইবে।]

9. Prove that

(i) $\log_2 \log_2 \log_2 16=1$; (ii) $\log_3 \log_2 \log_{\sqrt{3}} 81=1$.

10. Show that $\log_{10} 2$ lies between $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{4}$. [C. U. '26]

11. (i) If $a^2+b^2=14ab$, prove that $\log \{\frac{1}{4}(a+b)\}$ $=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$. [C. U. '59 Compl.]

(ii) If $a^2+b^2=23ab$, prove that $\log \{\frac{1}{5}(a+b)\}=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$.

12. (a) If $a^{3-x}b^{5x}=a^{x+5}b^{3x}$, prove that $x \log \frac{b}{a}=\log a$. [C. U. '37]

(b) If $\log (x^2y^3)=a$ and $\log \frac{x}{y}=b$, find $\log x$ and $\log y$ in terms of a and b. [C. U. '19]

[(b) $\log (x^2y^3)=a$ ও $\log \frac{x}{y}=b$ হইলে, a ও b দ্বারা $\log x$ ও $\log y$ নির্ণয় কর।]

(c) If $\log_a b=6$ and $\log_{14a} (8b)=3$, find a.

(d) If $\log_{10}x-\log_{10} \sqrt{x}=\frac{2}{\log_{10}x}$, find x.

13. (*a*) Show that

$$\log\frac{b^n}{c^n}+\log\frac{c^n}{a^n}+\log\frac{a^n}{b^n}=0.$$ [C. U. '44]

(*b*) Simplify :—

(i) $\log\frac{a^3b^3}{c^3}+\log\frac{b^3c^3}{d^3}+\log\frac{c^3d^3}{a^3}-3\log b^2c.$

(ii) $\log\frac{14}{15}+\log\frac{28}{27}+\log\frac{405}{196}.$

14. Prove the following :—

(*a*) $(yz)^{\log y-\log z}\times(zx)^{\log z-\log x}\times(xy)^{\log x-\log y}=1.$ [G. U. '49]

(*b*) $2\log a+2\log a^2+2\log a^3+\cdots+2\log a^n=n(n+1)\log a.$

15. If $xy^{a-1}=l$, $xy^{b-1}=m$ and $xy^{c-1}=n$, prove that

(i) $(b-c)\log l+(c-a)\log m+(a-b)\log n=0$

(ii) $a\log\frac{m}{n}+b\log\frac{n}{l}+c\log\frac{l}{m}=0.$

16. Prove the following :—

(*a*) $\log_b a\times\log_c b\times\log_d c=\log_d a.$

(*b*) $a^{\log_a b\times\log_b c\times\log_c d}=d.$

(*c*) $\log_a x\times\log_b y=\log_b x\times\log_a y.$

(*d*) $\log_{b^3}a\times\log_{c^3}b\times\log_{a^3}c=\frac{1}{27}.$

17. If x is positive and less than unity (এক), show that $\log(1+x)+\log(1+x^2)+\log(1+x^4)+\log(1+x^8)+\cdots$ to ∞ $=-\log(1-x).$

18. If $a=\log_x(yz)$, $b=\log_y(zx)$ and $c=\log_z(xy)$, show that

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1.$$

19. If $x=\log_{2a}a$, $y=\log_{3a}2a$ and $z=\log_{4a}3a$, prove that $xyz+1=2yz.$ [All. '49]

20. If P, Q, R be the pth, qth and rth terms of a G.P., show that $(q-r)\log P+(r-p)\log Q+(p-q)\log R=0.$ [C. U. '62]

[যদি P, Q, R কোন গুণোত্তর শ্রেণীর যথাক্রমে p-তম, q-তম ও r-তম পদ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$(q-r)\log P+(r-p)\log Q+(p-q)\log R=0.$$]

21. (*a*) If a, b, c are in G. P., show that $\log_a x$, $\log_b x$, $\log_c x$ are in H. P.

[a, b, c গুণোত্তর শ্রেণী হইলে প্রমাণ কর যে $\log_a x$, $\log_b x$, $\log_c x$ বিপরীত প্রগতিতে থাকিবে।]

(*b*) A Geometrical and a Harmonical Progression have the same *pth*, *qth* and *rth* terms a, b, c respectively ; show that

$$a(b-c)\log a+b(c-a)\log b+c(a-b)\log c=0.$$

[যদি একটি গুণোত্তর শ্রেণীর ও একটি বিপরীত প্রগতি শ্রেণীর উভয়েরই একই p-তম, q-তম ও r-তম পদ যথাক্রমে a, b ও c হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$a(b-c)\log a+b(c-a)\log b+c(a-b)\log c=0.$$]

(*c*) If x, y, z are in harmonical progression show that $\log(x+z)+\log(x-2y+z)=2\log(x-z)$.

[x, y, z বিপরীত প্রগতির ক্রমিক তিনটি পদ হইলে প্রমাণ কর যে, $\log(x+z)+\log(x-2y+z)=2\log(x-z)$.]

22. (*a*) If $\log_p x=a$, $\log_q x=b$, then prove that

$$\log_{\frac{p}{q}} x=\frac{ab}{b-a}.$$

(*b*) If $p=\log_a(bc)$, $q=\log_b(ca)$ and $r=\log_c(ab)$, show that $pqr=p+q+r+2$.

(*c*) If $x=\log_c b+\log_b c$, $y=\log_a c+\log_c a$ and $z=\log_b a+\log_a b$, prove that $x^2+y^2+z^2-xyz=4$.

23. If $\dfrac{pq\log(pq)}{p+q}=\dfrac{qr\log(qr)}{q+r}=\dfrac{rp\log(rp)}{r+p}$,

prove that $p^p=q^q=r^r$.

24. If $\dfrac{a(b+c-a)}{\log a}=\dfrac{b(c+a-b)}{\log b}=\dfrac{c(a+b-c)}{\log c}$,

prove that $b^c c^b=c^a a^c=a^b b^a$.

25. If $\log(a+b+c)=\log a+\log b+\log c$, show that

$$\log\left(\frac{2a}{1-a^2}+\frac{2b}{1-b^2}+\frac{2c}{1-c^2}\right)=\log\frac{2a}{1-a^2}+\log\frac{2b}{1-b^2}+\log\frac{2c}{1-c^2}.$$

26. If $\dfrac{\log p}{m}=\dfrac{\log q}{n}=\dfrac{\log r}{l}=\log x$, express $\dfrac{p^2}{qr}$ as a power of x.

31. সাধারণ লগারিদম্ (Common logarithm)

যদি নিধান 10 হয়, তবে লগারিদম্‌কে সাধারণ লগারিদম্ বলে।

কোন লগারিদমে নিধানটি লেখা না থাকিলে বুঝিতে হইবে যে নিধান 10 আছে। অর্থাৎ log 285 বলিলে $\log_{10} 285$ বুঝিতে হইবে।

32. পূর্ণক এবং অংশক (Characteristic and Mantissa)

$10^0=1 \qquad \therefore \log 1=0$

$10^1=10 \qquad \therefore \log 10=1$

$10^2=100 \qquad \therefore \log 100=2$

$10^3=1000 \qquad \therefore \log 1000=3$

$10^4=10{,}000 \qquad \therefore \log 10{,}000=4.$

এখন দেখা যাইতেছে যে 11 হইতে 99 পর্যন্ত যে কোন রাশির লগারিদম্ 1 অপেক্ষা বড় এবং 2 অপেক্ষা ছোট অর্থাৎ 1+দশমিকাংশ।

তদ্রূপ, 101 হইতে 999 পর্যন্ত যে কোন রাশির লগারিদম্ 2 হইতে বড় এবং 3 হইতে ছোট অর্থাৎ 2+দশমিকাংশ।

তাহা হইলে বুঝা যাইতেছে, কোন রাশির লগারিদম্ যে পূর্ণ সংখ্যা হইবেই তাহার কোন স্থিরতা নাই। ইহার কিছু পূর্ণ অংশ ও কিছু দশমিকাংশ থাকিতে পারে। এই পূর্ণ অংশের নাম পূর্ণক (Characteristic) এবং দশমিকাংশের নাম অংশক (Mantissa)।

আরও দেখা যাইতেছে যে, 2 হইতে 9 পর্যন্ত যে কোন রাশির লগারিদমের পূর্ণক 0 ; 11 হইতে 99 পর্যন্ত যে কোন রাশির লগারিদমের পূর্ণক 1, 101 হইতে 999 পর্যন্ত যে কোন রাশির লগারিদমের পূর্ণক 2, 1001 হইতে 9999 পর্যন্ত যে কোন রাশির লগারিদমের পূর্ণক 3, অর্থাৎ কোন রাশির পূর্ণ অংশে অঙ্ক সংখ্যা যত তাহা হইতে 1 কম হইবে উহার লগারিদমের পূর্ণক।

33. আবার $10^{-1}=\frac{1}{10}=\cdot1 \qquad \therefore \log \cdot1=-1$

$10^{-2}=\frac{1}{100}=\cdot01 \qquad \therefore \log \cdot01=-2$

$10^{-3}=\frac{1}{1000}=\cdot001 \qquad \therefore \log \cdot001=-3$

মনে কর যে, log ·03 নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন যেহেতু $\cdot01<\cdot03<\cdot1 \qquad \therefore \log \cdot01<\log \cdot03<\log \cdot1$

অর্থাৎ log ·03, −2 অপেক্ষা বড় এবং −1 অপেক্ষা ছোট হইবে,

$\therefore \log \cdot03=-2+$দশমিকাংশ,

ইহার পূর্ণক ঋণাত্মক অর্থাৎ −2 এবং অংশক ধনাত্মক।

এখানে দেখ, দশমিক বিন্দু এবং প্রথম সার্থক অঙ্কের মধ্যে যতগুলি শূন্য থাকিবে সেই শূন্য সংখ্যা অপেক্ষা 1 বেশী পূর্ণক হইবে এবং তাহা ঋণাত্মক হইবে।

উদা. (i) log ·234 = −1 + একটি দশমিক ভগ্নাংশ, এখানে পূর্ণক −1

(ii) log ·0234 = −2 + " " ", এখানে পূর্ণক −2

(iii) log ·00234 = −3 + " " ", এখানে পূর্ণক −3

[দ্রষ্টব্য : অংশক সর্বক্ষেত্রেই ধনাত্মক হইবে।]

34. পূর্ণক বাহির করিবার নিয়ম

(i) যদি রাশিটি 1 হইতে বড় হয়, তবে

রাশির পূর্ণ অংশে যতগুলি অঙ্ক থাকিবে তাহা অপেক্ষা 1 কম হইবে উহার লগারিদমের পূর্ণক।

(ii) যদি রাশিটি 1 হইতে ছোট হয়, তবে

দশমিক বিন্দু হইতে প্রথম সার্থক অঙ্কের মধ্যে যতগুলি শূন্য থাকিবে, তাহা অপেক্ষা 1 বেশী হইবে লগারিদমের পূর্ণক এবং তাহা ঋণাত্মক হইবে।

35. অংশক (Mantissa) বাহির করিবার নিয়ম

পুস্তকের শেষে লগ তালিকাটি (log table-টি) দেখ। উহাতে দশমিক 4 অঙ্ক পর্যন্ত কতিপয় সংখ্যার লগারিদম্ দেওয়া আছে।

ঐ তালিকায় প্রথম স্তম্ভে নীচে নীচে মোটা অক্ষরে লেখা আছে 10 হইতে 99 পর্যন্ত। তালিকার মাথার উপরে মাঝারি অক্ষরে 0 হইতে 9 পর্যন্ত এবং তারও পরে ছোট অক্ষরে 1 হইতে 9 পর্যন্ত লেখা আছে। এই মাথার সারির নীচে এবং বামের মোটা সংখ্যার ডান দিকের সারিতে প্রতি ঘরে যে সব সংখ্যা আছে তাহা মোটেই পূর্ণ সংখ্যা নহে। প্রতিটি সংখ্যার আগে দশমিক বিন্দু আছে ধরিয়া লইতে হইবে, অর্থাৎ যদি লেখা থাকে 0043, তবে বুঝিবে উহা ·0043, ইত্যাদি।

এখন লগ তালিকা হইতে কি প্রকারে কোন সংখ্যার লগের অংশক বাহির করা যায় তাহা বোঝান যাইতেছে।

(i) মনে করা যাক 37এর লগের অংশক বাহির করিতে হইবে :—

প্রথম স্তম্ভের 37এর পরই মাথার উপরে 0-এর স্তম্ভের নীচে আছে 5682. অতএব, 37এর লগের অংশক হইবে ·5682.

(ii) 374এর লগের অংশক দেখিতে হইলে 37এর পর সোজা ডান দিকের সারিতে আঙ্গুল লইয়া গিয়া থামাইতে হইবে সেই ঘরে যে ঘরের মাথার উপরে

আছে 4. ঐ ঘরে সংখ্যা লেখা আছে 5729 ; সুতরাং 374-এর লগের অংশক হইবে ·5729.

(iii) 3746 অর্থাৎ 4 অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার লগের অংশক।

প্রথম তিনটি অঙ্ক 374এর লগের উপরোক্ত নিয়মে অংশক ·5729 ; সংখ্যাটির চতুর্থ অঙ্ক 6, সেইজন্য 37এর পর সোজা ডান দিকের শেষে যে ছোট হরফে 1 হইতে 9 পর্যন্ত আছে তাহার 6-এর স্তম্ভের নীচে লেখা আছে 7 অর্থাৎ ·0007, এখন ·0007 এবং ·5729 যোগ করিলে পাওয়া যায় ·5736. ইহাই 3746এর লগের অংশক।

দ্রষ্টব্য : 3746এর লগের পূর্ণক 3 এবং অংশক ·5736.

$\therefore \quad \log 3746 = 3{\cdot}5736.$

তদ্রূপ $\log 37 = 1{\cdot}5682$ এবং $\log 374 = 2{\cdot}5729$.

36. যে সব সংখ্যার অঙ্কগুলি সমান এবং একই ভাবে সাজান আছে শুধু দশমিক বিন্দুর স্থান পৃথক্‌, তাহাদের সকলেরই লগের অংশক সমান।

আমরা বাহির করিয়াছি $\log 3746 = 3{\cdot}5736$.

এখন $\log 374{\cdot}6 = \log \frac{3746}{10}$

$$= \log 3746 - \log 10 = 3{\cdot}5736 - 1 = 2{\cdot}5736 ;$$

$\log 37{\cdot}46 = \log \frac{3746}{100}$

$$= \log 3746 - \log 100 = 3{\cdot}5736 - 2 = 1{\cdot}5736 ;$$

$\log 3{\cdot}746 = \log \frac{3746}{1000}$

$$= \log 3746 - \log 1000 = 3{\cdot}5736 - 3 = {\cdot}5736 ,$$

$\log {\cdot}3746 = \frac{3746}{10000}$

$$= \log 3746 - \log 10000 = 3{\cdot}5736 - 4$$

$$= 3 + {\cdot}5736 - 4 = {\cdot}5736 - 1 = \bar{1}{\cdot}5736.$$

দ্রষ্টব্য : $\log {\cdot}3746$এর পূর্ণক -1 এবং অংশক ·5736.

ইহাকে $-1{\cdot}5736$ লিখিলে বোঝা যায় যে $1{\cdot}5736$ সমস্তটাই ঋণাত্মক কিন্তু অংশক ঋণাত্মক নয়, শুধু পূর্ণক ঋণাত্মক। শুধু পূর্ণক ঋণাত্মক ইহা বুঝাইবার জন্য 1এর মাথার উপর একটি রেখা টানিয়া দিয়া পরে দশমিক বিন্দু এবং অংশক লেখা হয়। এই রেখাকে বলা হয় Bar অর্থাৎ $\bar{1}$ হইল bar 1 $\bar{2}$ হইল bar 2 ইত্যাদি এবং ইহাতে ঐ 1 ও 2 ঋণাত্মক বুঝায়।

37. Antilogarithm or Antilog

কোন সংখ্যা m-এর যদি লগারিদম্ n হয়, তবে m-কে n-এর য়্যান্টিলগারিদম্ বা য়্যান্টিলগ বলে। যথা,

log 37·46=1·5736, ∴ 1·5736এর য়্যান্টিলগারিদম্ হইবে 37·46.

38. Antilogarithm বাহির করিবার নিয়ম।

Antilog table-এর প্রথম সারিতে দশমিক বিন্দুর পরে দুইটি অঙ্ক দেওয়া আছে। ইহা লগারিদমের অংশকের প্রথম দুইটি অঙ্ক।

(i) মনে কর, 1·5736-এর Antilogarithm বাহির করিতে হইবে। ইহার অংশক ·5736, কাজেই ·57এর ডান দিকে এবং যে ঘরের মাথার উপরে 3 আছে সেই ঘরে সংখ্যা আছে 3741, এই রেখার আরও ডানদিকে 6-এর নীচে আছে 5 ; এই 5, 3741এর সহিত যোগ করিলে পাওয়া যায় 3746.

∴ ·5736 এই অংশকের জন্য পাওয়া গেল 3746 ; যেহেতু 1·5736এর পূর্ণক 1, ∴ ইহা যে সংখ্যার লগারিদম্ তাহার পূর্ণ সংখ্যায় দুইটি অঙ্ক আছে।

∴ 1·5736-এর Antilogarithm 37·46 হইল।

তদ্রূপ 2·5736-এর Antilogarithm 374·6

এবং $\bar{2}$·5736-এর Antilogarithm ·03746.

(ii) −·5378এর য়্যান্টিলগ কত ?

যেহেতু, $-\cdot5378=-1+1-\cdot5378$

$=-1+\cdot4622=\bar{1}\cdot4622$

∴ −·5378এর য়্যান্টিলগ $=\bar{1}\cdot4622$ এর য়্যান্টিলগ = ·2898.

উদাহরণমালা 12 (*b*)

উদা. 1. Find the logarithm of (*a*) 78, (*b*) 324, (*c*) 1·362 and (*d*) ·035.

(*a*) 78 সংখ্যাটি দুই অঙ্কের বলিয়া উহার লগের পূর্ণক হইবে 1. এক্ষণে লগ তালিকা হইতে লগ 78-এর অংশক নির্ণয়ের জন্য লগ 78=লগ 780 ধরিবে। ঐ তালিকায় 78-এর পর মাথায় 0-র স্তম্ভের নীচে 8921 সংখ্যাটি আছে, সুতরাং অংশকটি হইল ·8921.

∴ log 78=1·8921.

(*b*) 324এর অঙ্ক সংখ্যা তিন, সুতরাং উহার লগের পূর্ণক হইবে 2. এক্ষণে লগ তালিকায় 32এর ডান দিকে মাথায় 4এর স্তম্ভের নীচে সংখ্যা লেখা আছে 5105.

∴ log 324=2·5105.

(*c*) 1·362এর পূর্ণ সংখ্যায় একটি অঙ্ক থাকায় উহার লগের পূর্ণক হইবে 0. লগ তালিকায় 13এর ডানদিকে মাথার প্রথম 6এর স্তম্ভের নীচে 1335 সংখ্যাটি পাইলাম, ঐ লাইনে আরও ডানদিকে 2এর স্তম্ভের নীচে আছে 7 ; 1335+7=1342. ∴ log 1·362=·1342.

(*d*) ·035 সংখ্যাটিতে প্রথমেই দশমিকের পর একটি শূন্য থাকায় উহার লগের পূর্ণকটি ঋণাত্মক 2 অর্থাৎ $\bar{2}$ হইবে। এক্ষণে লগ তালিকা হইতে দেখা যায় log 35এর অংশক=·5441. ∴ log ·035=$\bar{2}$·5441.

উদা. 2. Using table find the antilog of (*a*) $\bar{1}$·2463 and (*b*) −2·8254.

(*a*) $\bar{1}$·2463এর অংশক ·2463 ; য়্যান্টিলগ তালিকায় ·24এর ডানদিকে যে ঘরে স্তম্ভের মাথার উপরে 6 আছে সেই ঘরে সংখ্যা আছে 1762. এই রেখায় আরও ডানদিকে 3এর স্তম্ভের নীচে আছে 1 ; 1762এর সহিত ঐ 1 যোগ করিয়া হইল 1763.

∴ 2463 এই অংশকের জন্য পাওয়া গেল ·1763 ;

∵ $\bar{1}$·2463এর পূর্ণক $\bar{1}$,

∴ ইহা যে সংখ্যার লগ তাহাতে পূর্ণ সংখ্যা নাই এবং তাহার দশমিকের পর প্রথম অঙ্কটি সার্থক অঙ্ক।

∴ $\bar{1}$·2463এর নির্ণেয় য়্যান্টিলগ=·1763.

(*b*) −2·8254=−3+1−·8254=−3+·1746=$\bar{3}$·1746.

য়্যান্টিলগ তালিকা হইতে দেখা যায় ·1746এর য়্যান্টিলগ=·1495 ;

এখানে পূর্ণক 3টি ঋণাত্মক, সুতরাং নির্ণেয় Antilogএ দশমিকের পর দুইটি শূন্য দিয়া সংখ্যাটি আরম্ভ হইবে।

∴ নির্ণেয় Antilog=·001495.

উদা. 3. Using log tables find the value of $\frac{1}{(1{\cdot}045)^{20}}$.
[P. U. '50]

মনে কর, $x=\frac{1}{(1{\cdot}045)^{20}}$,

$$\therefore \quad \log x=\log\frac{1}{(1{\cdot}045)^{20}}=\log 1-\log (1{\cdot}045)^{20}$$

$$=\log 1-20\log 1{\cdot}045=0-20\times {\cdot}0191=-{\cdot}382$$

$$=-1+1-{\cdot}382=-1+{\cdot}618=\log {\cdot}4150$$

(য়্যান্টিলগ তালিকা হইতে)

∴ x=·415. অতএব, নির্ণেয় মান=·415.

উদা. 4. Using log tables find the value of $\frac{\sqrt[5]{2\cdot415}}{(0\cdot824)^4}$.
[P. U. 1948]

মনে কর, $x=\frac{\sqrt[5]{2\cdot415}}{(0\cdot824)^4}$, $\therefore$ $\log x=\log \frac{\sqrt[5]{2\cdot415}}{(0\cdot824)^4}$

$$=\log (2\cdot415)^{\frac{1}{5}}-\log (\cdot824)^4$$
$$=\frac{1}{5}\log 2\cdot415-4\log \cdot824$$
$$=\frac{1}{5}\times 0\cdot3829-4\times \bar{1}\cdot9159$$
$$=\cdot0765+4-3\cdot6636=\cdot4129$$
$=\log 2\cdot587$ (Antilog তালিকা হইতে)

$\therefore$ $x=2\cdot587$, $\therefore$ নির্ণেয় মান $=2\cdot587$.

উদা. 5. If $\log x=2\cdot5785$, find x.

এখানে প্রদত্ত লগের পূর্ণকটি 2, সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যার অখণ্ডাংশ 3 অঙ্কের হইবে।

এক্ষণে, পূর্ণক 2 ছাড়িয়া দিয়া প্রদত্ত অংশক $\cdot5785$ এর Antilog নির্ণয় করিতে হইবে। Antilog তালিকা হইতে পাই যে, যে সংখ্যার লগের অংশক $\cdot5785$ তাহার সার্থক অঙ্কগুলি হইল 3788.

$$\therefore \quad 2\cdot5785=\log 378\cdot8,$$
$$\therefore \quad x=378\cdot8.$$

উদা. 6. Find the value of $(1\cdot035)^{-16}$ from the log table.

মনে কর $x=(1\cdot035)^{-16}$

$\therefore$ $\log x=\log (1\cdot035)^{-16}=-16\log 1\cdot035=-16\times\cdot0149$
$$=-\cdot2384=-1+1-\cdot2384$$
$$=-1+\cdot7616=\bar{1}\cdot7616$$
$=\log \cdot5776$ (Antilog তালিকা হইতে)

$\therefore$ $x=\cdot5776$, $\therefore$ নির্ণেয় মান $=\cdot5776$.

উদা. 7. Find from the log table the value of

$$\frac{3\cdot78\times\cdot032\times109\cdot2\times19\cdot895}{\cdot00078\times981}.$$

লগ তালিকার সাহায্যে লবগুলির লগ		হরগুলির লগ	
লগ	$3{\cdot}78 = {\cdot}5775$	লগ	${\cdot}00078 = \bar{4}{\cdot}8921$
লগ	${\cdot}032 = \bar{2}{\cdot}5051$	লগ	$981 = 2{\cdot}9917$
লগ	$109{\cdot}2 = 2{\cdot}0382$		$\bar{1}{\cdot}8838$
লগ	$19{\cdot}895 = 1{\cdot}2987$		
	$2{\cdot}4195$		

এক্ষণে $2{\cdot}4195-(\bar{1}{\cdot}8838)=2{\cdot}4195+1-{\cdot}8838=2{\cdot}5357.$

$\because$ Antilog $2{\cdot}5357=343{\cdot}4,$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=343{\cdot}4.$

উদা. 8. Find the square root of ·0265.

$\sqrt{{\cdot}0265}=({\cdot}0265)^{\frac{1}{2}}$. এক্ষণে $\log({\cdot}0265)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log{\cdot}0265$

$=\frac{1}{2}\times\bar{2}{\cdot}4232=\bar{1}{\cdot}2116=\log{\cdot}1628.$

$\therefore\ ({\cdot}0265)^{\frac{1}{2}}={\cdot}1628.$ $\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $={\cdot}1628.$

উদা. 9. Find (to the nearest rupee) the amount at compound interest on Rs. 2150 for 3 years at 5%.

[বার্ষিক 5% সুদে 3 বৎসরে 2150 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি আসন্ন টাকায় নির্ণয় কর।]

$$\text{সমূল চক্রবৃদ্ধি}=\text{আসল}\times\left(1+\frac{\text{হার}}{100}\right)^{\text{বৎসর}}$$

$$=2150\times(1+\tfrac{5}{100})^3=2150\times(1{\cdot}05)^3.$$

এক্ষণে, $\log\{2150\times(1{\cdot}05)^3\}=\log 2150+3\log 1{\cdot}05$

$=3{\cdot}3324+3\times{\cdot}0212=3{\cdot}3960=\log 2489.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমূল চক্রবৃদ্ধি $=2489$ টাকা।

উদা. 10. The population of a town is 3000. If it increases annually at the rate of 10%, what will be the population at the end of 3 yrs. ?

[কোন শহরের লোকসংখ্যা 3000 ; উহা যদি প্রতি বৎসর 10% হারে বৃদ্ধি পায়, তবে 3 বৎসর অন্তে উহার লোকসংখ্যা কত হইবে ?]

নির্ণেয় লোকসংখ্যা $=3000\times(1+\frac{10}{100})^3=3000\times(1{\cdot}1)^3.$

এক্ষণে $\log\{3000\times(1{\cdot}1)^3\}=\log 3000+3\log 1{\cdot}1$

$=3{\cdot}4771+3\times{\cdot}0414=3{\cdot}6013=\log 3993.$

$\therefore$ নির্ণেয় লোকসংখ্যা $=3993.$

উদাহরণমালা 12 (C)

উদা. 1. Find the number of digits in $(6)^{25}$, having given $\log 2 = \cdot 3010$ and $\log 3 = \cdot 4771$.

$$\log (6)^{25} = 25 \log 6 = 25 \log (2 \times 3) = 25 (\log 2 + \log 3)$$
$$= 25 (\cdot 3010 + \cdot 4771) = 20 \times \cdot 7781 = 19 \cdot 4525.$$

যেহেতু $\log (6)^{25}$এর পূর্ণক $= 19$, সুতরাং $(6)^{25}$ রাশিটিতে মোট 20টি অঙ্ক আছে।

উদা. 2. Find the position of the first significant figure in the value of 2^{-30}; given $\log 2 = \cdot 3010$.

[2^{-30}এর মানে প্রথম সার্থক অঙ্ক কোনটি ? দেওয়া আছে $\log 2 = \cdot 3010$.]

মনে কর, $x = 2^{-30}$.

$$\therefore \quad \log x = \log 2^{-30} = -30 \times \log 2 = -30 \times \cdot 3010$$
$$= -9 \cdot 03 = -10 + 1 - \cdot 03 = \bar{1}0 \cdot 97.$$

এখানে $\log x$ অর্থাৎ $\log 2^{-30}$এর পূর্ণক $= \bar{1}0$,

সুতরাং প্রথমেই দশমিকের পর শূন্য সংখ্যা $= 10 - 1 = 9$.

অতএব, 2^{-30} রাশিটির প্রথম সার্থক অঙ্ক হইবে দশম অঙ্ক।

উদা. 3. Find the logarithm of $\cdot 00015$, having given $\log 2 = \cdot 30103$ and $\log 3 = \cdot 4771213$. [H. S. '63 Compl.]

$$\log \cdot 00015 = \log \frac{15}{10^5} = \log 15 - \log 10^5 = \log (3 \times 5) - 5 \log 10$$
$$= \log 3 + \log \frac{10}{2} - 5 = \log 3 - \log 2 + \log 10 - 5$$
$$= \cdot 4771213 - \cdot 30103 + 1 - 5 = \bar{4} \cdot 1760913.$$

উদা. 4. Find the value of $\sqrt[5]{35 \cdot 28}$, given $\log 2 = \cdot 3010$, $\log 3 = \cdot 4771$, $\log 7 = \cdot 8451$ and $\log 203 \cdot 9 = 2 \cdot 3095$.

মনে কর, $x = \sqrt[5]{35 \cdot 28}$.

$$\therefore \quad \log x = \log \sqrt[5]{35 \cdot 28} = \log \left(\frac{3528}{10^2}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \log \left(\frac{2^3 \times 3^2 \times 7^2}{10^2}\right)$$
$$= \tfrac{1}{5}[3 \log 2 + 2 \log 3 + 2 \log 7 - 2 \log 10]$$
$$= \tfrac{1}{5}[3 \times \cdot 3010 + 2 \times \cdot 4771 + 2 \times \cdot 8451 - 2 \times 1]$$
$$= \tfrac{1}{5}[\cdot 9030 + \cdot 9542 + 1 \cdot 6902 - 2]$$
$$= \tfrac{1}{5} \times 1 \cdot 5474 = \cdot 3095.$$

এক্ষণে, $\because \log 203 \cdot 9 = 2 \cdot 3095$ (প্রদত্ত), $\therefore \log 2 \cdot 039 = \cdot 3095$;

$$\therefore \quad x = 2 \cdot 039. \quad \therefore \quad \sqrt[5]{35 \cdot 28} = 2 \cdot 039.$$

উদা. 5. Given $\log_{10}2 = \cdot30103$, $\log_{10}3 = \cdot47712$ and $\log_{10}7 = \cdot84510$, find the logarithm of 108 to the base 7 correct to 3 decimal places.

আমরা জানি, $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$. [অনুচ্ছেদ 29($d$)এর অনুসিদ্ধান্ত···(2)]

$$\therefore \quad \log_7 108 = \frac{\log_{10}108}{\log_{10}7} = \frac{\log_{10}(2^2 \times 3^3)}{\log_{10}7} = \frac{2\log_{10}2 + 3\log_{10}3}{\log_{10}7}$$

$$= \frac{2 \times \cdot30103 + 3 \times \cdot47712}{\cdot84510} = \frac{2\cdot03342}{\cdot84510}$$

$= 2\cdot406$ (3 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান)।

উদা. 6. Given $\log 6337\cdot4 = 3\cdot8019111$ and $\log 6337\cdot5 = 3\cdot8019180$, find $\log 63\cdot3743$ and find the number whose logarithm is $\bar{3}\cdot8019136$.

$\log 6337\cdot4 = 3\cdot8019111$

$\therefore \quad \log 63374 = 4\cdot8019180 \quad$ (i)

অনুরূপে, $\log 63375 = 4\cdot8019180 \quad$ ···(ii)

(ii) হইতে (i) বিয়োগ করিয়া

$\log 63375 = 4\cdot8019180$

$\underline{\log 63374 = 4\cdot8019111}$

$\therefore \quad$ 1এর জন্য অন্তর $= \cdot0000069$

সুতরাং, সংখ্যাটি 1 বৃদ্ধি পাইলে লগারিদম্ বৃদ্ধি পায় ·0000069.

[সাধারণতঃ ইহা প্রকাশ করা হয় "1এর জন্য অন্তর 69" এইভাবে।]

$\log 63\cdot3743$এর মান বাহির করিতে হইবে।

প্রথমতঃ $\log 63374\cdot3$ লও। ইহা (i) অপেক্ষা ·3 বেশী।

$\because \quad$ 1এর জন্য অন্তর $= 69$

$\therefore \quad$ ·3 ,, ,, ,, $= \cdot3 \times 69 = 20\cdot7 = 21$.

$\therefore \quad \log 63374\cdot3 = 4\cdot8019111 + \cdot0000021 = 4\cdot8019132$.

অতএব, $\log 63\cdot3743 = 1\cdot8019132$.

আবার, 4·8019136 সংখ্যাটি 4·8019111 এবং 4·8019180এর মধ্যবর্তী এবং (i)এর সহিত অন্তর 25.

69 অন্তর হয় 1এর জন্য

$\therefore \quad$ 25 ,, ,, $\frac{25}{69}$ বা ·36 ···এর জন্য

$\therefore \quad \log 63374\cdot36 = 4\cdot8019136$.

$\bar{3}\cdot8019136$এর পূর্ণক $\bar{3}$, কিন্তু অংশক $= \log 63374\cdot36$এর অংশক।

অতএব, নির্ণেয় সংখ্যা $= \cdot006337436$.

উদা. 7. Find to two places of decimals the value of x from the equation, $6^{3-4x}.4^{x+5}=8$. Given, $\log 2 = \cdot 3010300$, $\log 3 = \cdot 4771213$. [C. U. '38]

[$6^{3-4x}.4^{x+5}=8$ সমীকরণ হইতে x-এর দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত মান নির্ণয় কর, দেওয়া আছে $\log 2 = \cdot 3010300$ ও $\log 3 = \cdot 4771213$.]

প্রদত্ত সমীকরণের উভয় পক্ষের লগ লইয়া পাওয়া যায়,

$$\log (6^{3-4x} \times 4^{x+5}) = \log 8,$$

বা, $\log 6^{3-4x} + \log 4^{x+5} = \log 2^3$,

বা, $(3-4x)\log(2\times 3)+(x+5)\log 2^2 = 3\log 2$,

বা, $(3-4x)(\log 2+\log 3)+2(x+5)\log 2 = 3\log 2$,

বা, $x(-4\log 2-4\log 3+2\log 2)$
$= -3\log 2-3\log 3-10\log 2+3\log 2$,

বা, $x(4\log 3+2\log 2)=10\log 2+3\log 3$,

বা, $x=\dfrac{10\log 2+3\log 3}{4\log 3+2\log 2}=\dfrac{10\times\cdot 3010300+3\times\cdot 4771213}{4\times\cdot 4771213+2\times\cdot 3010300}$

$$=\frac{3\cdot 010300+1\cdot 4313639}{1\cdot 9084852+\cdot 6020600}=\frac{4\cdot 4416639}{2\cdot 5105452}=1\cdot 769\cdots$$

$=1\cdot 77$ (দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান)।

উদা. 8. Solve the equation :
$2^x=3^y$ and $2^{y+1}=3^{x-1}$.
Given $\log 2=\cdot 3010$, $\log 3=\cdot 4771$. [C. U. '42]

প্রদত্ত সমীকরণ দুইটিতে উভয় পক্ষের লগ লইয়া পাওয়া যায়,

$\log 2^x = \log 3^y$, বা, $x\log 2 = y\log 3 \cdots$(i)

এবং $\log 3^{x-1}=\log 2^{y+1}$, বা, $(x-1)\log 3=(y+1)\log 2$,

বা, $x\log 3 - y\log 2 = \log 3+\log 2 \cdots$(ii)

(i) হইতে পাওয়া যায়, $x=\dfrac{y\log 3}{\log 2}$.

x-এর এই মান (ii)তে বসাইয়া পাওয়া যায়,

$$\frac{y\log 3}{\log 2}\times\log 3 - y\log 2=\log 3+\log 2,$$

বা, $y\dfrac{\{(\log 3)^2-(\log 2)^2\}}{\log 2}=\log 3+\log 2$,

বা, $y=\dfrac{\log 2}{\log 3-\log 2}=\dfrac{\cdot 3010}{\cdot 4771-\cdot 3010}=\dfrac{\cdot 3010}{\cdot 1761}=1\cdot 7$ (প্রায়) ।

আবার, $x=\dfrac{y\log 3}{\log 2}=\dfrac{\log 3}{\log 2}\times\dfrac{\log 2}{\log 3-\log 2}$

$=\dfrac{\log 3}{\log 3-\log 2}=\dfrac{\cdot 4771}{1761}=2\cdot 7$ (প্রায়) ।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{array}{l}x=2\cdot 7\\ y=1\cdot 7\end{array}\right\}$.

Exercise 10 (B)

[Wherever required the following values may be used :

log 2 = ·3010300, log 3 = ·4771213,
log 7 = ·8450980, log 11 = 1·0413927.]

1. Find the number of digits in [অঙ্ক সংখ্যা নির্ণয় কর] :

(i) 3^{17} (ii) 2^{25} (iii) 5^{25} [C. U. '47]
(iv) 18^{30} (v) 875^{16} (vi) $2^{200}\times 3^{10}$.

2. Find the number of zeroes between the decimal point and the first significant figure in :

[দশমিক বিন্দু ও প্রথম সার্থক অঙ্কের মধ্যে কতগুলি 0 আছে নির্ণয় কর।]

(i) $(\cdot 0012)^{20}$ (ii) $(\cdot 024)^{15}$ (iii) $\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$ (iv) $\left(\frac{1}{4\cdot 05}\right)^{8}$
(v) $(16\cdot 8)^{-12}$ (vi) $(\cdot 0\dot{2}5\dot{9})^{50}$.

3. Find the logarithm of the following :—

(i) 45 [C. U. '51] (ii) $37\frac{9}{7}$ (iii) ·015 [H. S. '61]
(iv) ·04312 (v) $(\cdot 405)^{\frac{1}{8}}$ [H.S. '64 Compl.] (vi) $\left(\frac{5}{72}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

4. Calculate the numerical value (সাংখ্যমান নির্ণয় কর) of

(a) $\log\left\{\dfrac{(10\cdot 8)^{\frac{1}{2}}\times(\cdot 24)^{\frac{5}{3}}}{(90)^{-2}}\right\}$ [H. S. '65]

(b) $\log\left\{\dfrac{(7\cdot 2)^{3}\times(\cdot 016)^{4}}{\left(\frac{6}{5}\right)^{15}}\right\}$ H. S. '65 Compl.]

given log 2 = ·3010300 and log 3 = ·4771213.

5. Find, correct to 3 decimal places the value of :

(i) logarithm of 40 to the base 12,
(ii) „ „ 77 to „ „ 3,
(iii) „ „ $2\frac{1}{6}$ to „ „ 6,

6. Simplify : $\log \sqrt[4]{729\sqrt[3]{9^{-1}.27^{-\frac{4}{3}}}}$.

7. Find the value of :

(*a*) $\sqrt[5]{\cdot 00000165}$, given $\log_{10} 165 = 2\cdot 2175$ and $\log_{10} 6974 = 3\cdot 8435$. [H. S. '64]

(*b*) $\left\{\dfrac{(\cdot 32)^8 \times (625)^4}{(\cdot 00432)^2 \times (\cdot 3125)^3 \times 25}\right\}^{\frac{1}{3}}$,
given log 2 = ·3010300, log 3 = ·4771213 and log 259569 = 5·4142524, (correct to 7 places of decimals). [H. S. '67]

8. Find the 7th root of 3·528, having given
log 2 = ·3010300
log 3 = ·4771213
log 7 = ·8450980
and log 1197·342 = 3·0782184.

9. (*a*) Find the value of $\log [(2\cdot 7)^3 \times (\cdot 81)^{\frac{4}{5}} \div (\cdot 90)^{\frac{5}{4}}]$, given log 3 = ·4771213. [C. U. '46 ; H. S. '67 Compl.]

(*b*) Simplify :—

$$\log_{10} 2 + 16 \log_{10} \frac{16}{15} + 12 \log_{10} \frac{25}{24} + 7 \log_{10} \frac{81}{80}.$$

[H. S '66]

10. (*a*) Given log 69714 = 4·8433200 and log 69715 = 4·8433262, find $\log (\cdot 000697145)^{\frac{1}{5}}$.

(*b*) Given log 8·6717 = ·9381042 and log 8·6718 = ·9381093, find log 86717·6.

11. (*a*) If log 7·7215 = ·8877017 and log 7·7216 = ·8877073, find the number whose logarithm is 2·8877034.

(*b*) Given log 14673 = 4·1665189 and log 14674 = 4·1665485, find the antilog of $\bar{3}\cdot 1665396$.

12. The logarithm of a certain number to a certain base is 6 and the logarithm of 8 times the number to the base formed by the product of the first base and 25 is 3. Find the first base. [H. S. '63 Compl.]

[কোন একটি নিধানে কোন একটি সংখ্যার লগারিদম্ 6 এবং প্রথম নিধান ও 25এর গুণফল নিধান হইলে ঐ সংখ্যাটির 8 গুণ সংখ্যার লগারিদম্ হয় 3, প্রথম নিধানটি নির্ণয় কর ।]

13. (*a*) If the present population of a town be 6000 and if it increases annually at the rate of 5%, what will be the population in 2 yrs. ?

[Given log 1·05 = ·0212 and log 1103 = 3·0424]

[কোন দেশের বর্তমান লোকসংখ্যা 6000 এবং উহা বৎসরে 5% হারে বৃদ্ধি পায়। দুই বৎসর অন্তে উহার লোকসংখ্যা কত হইবে? দেওয়া আছে, log 1·05 = ·0212 ও log 1103 = 3·0424.]

(*b*) If the number of persons born in any year be $\frac{3}{80}$th. of the whole population at the commencement of the year and the number of those who die be $\frac{1}{40}$th. of it, find in what time the population will be doubled.

[Given log 2 = ·30103 and log 3 = ·47712]

[যদি যে কোন বৎসরের প্রারম্ভে যে লোকসংখ্যা থাকে সেই বৎসরে তাহার $\frac{3}{80}$ ভাগ জন্মায় ও $\frac{1}{40}$ অংশ মারা যায়, তবে কত বৎসরে লোকসংখ্যা দ্বিগুণ হইবে? দেওয়া আছে log 2 = ·30103, log 3 = ·47712.]

14 Solve the equations, [Using the value of log 2, log 3 etc. given above] and give the resuls correct to 2 places of decimals :—

[প্রথমেই প্রদত্ত log 2, log 3 প্রভৃতি মানগুলির সাহায্যে নিম্নের সমীকরণগুলির সমাধান কর (আসন্ন দুই দশমিক অঙ্কে) :]

(*a*) $3^x = 2$ [C. U. '27]

(*b*) $2^x . 3^{2x} = 100.$ [C. U. '25]

(*c*) $6^{3-4x} . 4^{x+5} = 8$ [C. U. '38, '45]

(*d*) $7^{3x+2} + 4^{x+2} = 7^{3x+1} + 2^{2x+6}$ [C. U. '41]

(*e*) $2^x 7^y = 80000,\ 3^y = 500$ correct to 4 decimal places [C. U. '47]

(*f*) $5^{x+1} = 6^y,\ 2^{x+y} = 3^{x-y}.$

15. If $a^{3-x} b^{5x} = a^{x+5} b^{3x}$, show that

$x \log \left(\frac{b}{a}\right) = \log a.$ [C. U. '37]

39. Slide Rule

সিলেবাসে নির্দেশ দেওয়া হইয়াছে যে, 'Use of Slide Rule may be encouraged.' অতএব, শিক্ষক মহাশয়গণ এই Slide Rule-এর প্রয়োগবিধি এবং উহার সাহায্যে কিরূপে বিবিধ অঙ্কের সমাধান করা যায় তাহা ছাত্রগণকে শিক্ষা দিবেন—ইহাই উদ্দেশ্য। এই Ruleটি Engineering ও নানাবিধ বৈজ্ঞানিক গবেষণায় কোন নির্ণেয় রাশি বাহির করিতে ব্যবহার করা হয়। এই Slide Ruleটি কি তাহা বলা হইতেছে, কিন্তু ইহা শিক্ষার্থীদিগকে দেখাইয়া ইহার প্রয়োগবিধি শিখাইতে হইবে।

ছাত্রেরা যে Foot Rule ব্যবহার করিয়া থাকে, Slide Rule তাহা হইতে স্বতন্ত্র এক প্রকার মাপক। ইহার দৈর্ঘ্য সাধারণতঃ Foot Rule-এর মত 1 ফুট হইয়া থাকে। ইহা ফুটরুল অপেক্ষা কিছু বেশী পুরু ও চওড়া।

Slide Rule-এর উপরদিকে একটি এবং উহার দুই পাশে নীচের দিকে দুইটি অংশ আছে। উপরের অংশে দৈর্ঘ্য বরাবর কয়েকটি সারিতে বিভিন্ন সংখ্যা লেখা আছে। ঐ সংখ্যা সারিগুলির সাহায্যে গুণফল, ভাগফল, বর্গমূল, ঘনমূল, বৃত্তের ক্ষেত্রফল, e^x, Antilog এবং বিভিন্ন ঘাতের মান (সাধারণতঃ 3 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ) পাওয়া যায়। আর, দৈর্ঘ্য বরাবর দুই দিকের ধার দুইটিতে সম্মুখ ভাগের সংখ্যাগুলি হইতে যে কোন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (sin, cos, tan প্রভৃতি) নির্ণয় করা যায়। অপর ধারের সংখ্যাগুলি হইতে যে কোন সংখ্যার লগারিদম্ পাওয়া যায়।

এই Slide Ruleএর আবার দুইটি অংশ আছে—একটি অংশ স্থির, অপরটি সচল অর্থাৎ উহাকে ডান দিকে বা বাম দিকে ইচ্ছামত সরাইয়া যে কোন সংখ্যার কাছে আনা যায়, এইজন্য নাম Slide Rule হইয়াছে। এতদ্ভিন্ন ইহার আর একটি স্বচ্ছ অংশ আছে, উহাকে cursar বলে। উহার ডানদিকে বা বামদিকে আবশ্যক মত সরাইয়া নির্ণেয় রাশি বা উত্তর স্থির করা হয়।

অতএব, এই Slide Rule-এর বিশেষত্ব বা গণিত বিদ্যায় ইহার প্রয়োজনীয়তা সহজেই বুঝা যায়।

Irrational Quantities (অমূলদ রাশি)

40. পূর্বে করণী (surd) বা অমূলদ রাশি সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে।

তোমরা জান, যে-সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাতে প্রকাশ করা যায় না, তাহাকে করণী বা অমূলদ সংখ্যা বলে।

যে-রাশিতে এক বা একাধিক করণী থাকে তাহাকে অমূলদ রাশি বলে।

এইসব বিষয় পূর্ব-শ্রেণীতে তোমরা শিখিয়াছ। এখানে দ্বিঘাত করণীর কতিপয় উপপাদ্য সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

41. দ্বিঘাত করণী সম্বন্ধে কতিপয় উপপাদ্য

I. (*a*) দুইটি এক জাতীয় দ্বিঘাত করণীর গুণফল ও ভাগফল মূলদ হইবে।

প্রমাণ : মনে কর, $a\sqrt{x}$ ও $b\sqrt{a}$ দুইটি একজাতীয় করণী। উহাদের গুণফল হইল $(a\sqrt{x}\times b\sqrt{x})$ বা abx এবং ইহা মূলদ।

উহাদের ভাগফল হইল $\dfrac{a\sqrt{x}}{b\sqrt{x}}$ বা $\dfrac{a}{b}$, ইহাও মূলদ।

(*b*) বিপরীতক্রমে, যদি দুইটি করণীর গুণফল ও ভাগফল মূলদ হয়, তবে করণী দুইটি এক জাতীয় হইবে।

প্রমাণ : মনে কর, দুইটি করণী $\sqrt{x}$ ও $\sqrt{y}$এর গুণফল একটি মূলদ রাশি p.

অতএব, $\quad \sqrt{x}\times\sqrt{y}=p, \quad \therefore \quad \sqrt{x}=\dfrac{p}{\sqrt{y}}=\dfrac{p}{y}\cdot\sqrt{y}$

$=$একটি মূলদ রাশি $\left(\dfrac{p}{y}\right)\times\sqrt{y}$. অতএব, $\sqrt{x}$ ও $\sqrt{y}$ একজাতীয় করণী।

ভাগফল সম্বন্ধেও অনুরূপে প্রমাণ করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত : দুইটি ভিন্ন জাতীয় দ্বিঘাত করণীর গুণফল ও ভাগফল অমূলদ হইবে।

II. একটি দ্বিঘাত করণী কখনও একটি মূলদ রাশি ও একটি দ্বিঘাত করণীর যোগফল বা অন্তরফলের সমান হইতে পারে না।

প্রমাণ : যদি সম্ভব হয়, মনে কর $\sqrt{a}=b\pm\sqrt{c}$.

উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া পাই $a=b^2+c\pm2b\sqrt{c}$,

$\therefore \quad \sqrt{c}=\pm\dfrac{a-b^2-c}{2b}$, ইহা একটি মূলদ রাশি।

এখন দেখা যাইতেছে একটি অমূলদ রাশি একটি মূলদ রাশির সহিত সমান হইতেছে, কিন্তু তাহা অসম্ভব।

অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

III. যদি $x+\sqrt{y}=a+\sqrt{b}$ হয় এবং যদি x ও a মূলদ এবং $\sqrt{y}$ ও $\sqrt{b}$ অমূলদ হয়, তবে $x=a$ এবং $y=b$ হইবে।

প্রমাণ : যদি x, aর সহিত সমান না হয়, তবে মনে কর $x=a+m$.

এক্ষণে $a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}=a+m+\sqrt{y}$,

$\therefore \sqrt{b}=m+\sqrt{y}$, অর্থাৎ একটি করণী একটি মূলদ রাশি ও একটি করণীর সমষ্টির সমান হইতেছে, কিন্তু ইহা অসম্ভব।

$\therefore x=a$, এবং ইহা হইতে $\sqrt{y}=\sqrt{b}$ অর্থাৎ $y=b$ হইল।

অনুসিদ্ধান্ত : অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, যদি $x-\sqrt{y}=a-\sqrt{b}$ হয়, তবে $x=a$ এবং $y=b$ হইবে।

[**দ্রষ্টব্য :** উপপাদ্য III হইতে জানা গেল যে, $x\pm\sqrt{y}=a\pm\sqrt{b}$ এই আকারের সমীকরণে উভয়পক্ষের মূলদরাশি দুইটি সমান এবং উভয়পক্ষের অমূলদ রাশি দুইটিও সমান ধরা যাইবে। অর্থাৎ সমীকরণটি দুইটি পৃথক্ সমীকরণে $x=a$ এবং $y=b$ বিভক্ত করা যায়। এক্ষেত্রে অবশ্য $\sqrt{y}$ ও $\sqrt{b}$ প্রকৃতপক্ষে অমূলদ হওয়া আবশ্যক।

IV. যদি $\sqrt{(x+\sqrt{y})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ হয়,

তবে $\sqrt{(x-\sqrt{y})}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ হইবে।

প্রমাণ : $\because \sqrt{(x+\sqrt{y})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$,

$\therefore x+\sqrt{y}=a+b+2\sqrt{ab}$ (উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া),

$\therefore x=a+b$ এবং $\sqrt{y}=2\sqrt{ab}$

$\therefore x-\sqrt{y}=a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

$\therefore \sqrt{(x-\sqrt{y})}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

অনুসিদ্ধান্ত : যদি $\sqrt{(x-\sqrt{y})}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ হয়, তবে $\sqrt{(x+\sqrt{y})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ হইবে।

V. যদি $\sqrt[3]{(x+\sqrt{y})}=a+\sqrt{b}$ হয়, তবে $\sqrt[3]{(x-\sqrt{y})}=a-\sqrt{b}$ হইবে।

প্রমাণ : $\because \sqrt[3]{(x+\sqrt{y})}=a+\sqrt{b}$, $\therefore$ উভয় পক্ষের ত্রিঘাত লইয়া পাই $x+\sqrt{y}=a^3+3a^2\sqrt{b}+3ab+b\sqrt{b}$

$[\because (\sqrt{b})^3=(\sqrt{b})^2.\sqrt{b}=b\sqrt{b}]$

$=(a^3+3ab)+(3a^2+b)\sqrt{b}$.

অতএব, $x=a^3+3ab\cdots(1)$
এবং $\sqrt{y}=(3a^2+b)\sqrt{b}\cdots(2)$ } উভয়পক্ষের মূলদ অংশদ্বয় এবং অমূলদ অংশদ্বয় সমান বলিয়া।

এক্ষণে, (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই

$$x-\sqrt{y}=a^3-3a^2\sqrt{b}+3ab-b\sqrt{b}=(a-\sqrt{b})^3$$

$\therefore\quad \sqrt[3]{(x-\sqrt{y})}=a-\sqrt{b}.$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ যদি $\sqrt[3]{(x-\sqrt{y})}=a-\sqrt{b}$ হয়, তবে

$\sqrt[3]{(x+\sqrt{y})}=a+\sqrt{b}$ হইবে।

42. করণীর বর্গমূল নির্ণয়

আমরা জানি যে, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$এর বর্গ একটি মূলদ রাশি ও একটি অমূলদ রাশির সমষ্টি হইবে, অর্থাৎ $\sqrt{a}+\sqrt{b}$এর বর্গকে $x+\sqrt{y}$ এই আকারে প্রকাশ করা যায়। অতএব, $x+\sqrt{y}$ এই আকারের রাশির বর্গমূল $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ আকারের হইবে।

(1) **$x+\sqrt{y}$এর বর্গমূল নির্ণয় প্রণালী :**

মনে কর, $\sqrt{(x+\sqrt{y})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$

উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া পাই $x+\sqrt{y}=a+b+2\sqrt{ab}.$

$\therefore\quad a+b=x\cdots\cdots(1)$

এবং $2\sqrt{ab}=\sqrt{y}$ বা $4ab=y\cdots\cdots(2)$

$\therefore\quad (a-b)^2=(a+b)^2-4ab=x^2-y$

$\therefore\quad a-b=\sqrt{x^2-y}\cdots\cdots(3).$

এক্ষণে, $\because\quad a+b=x\cdots\cdots(1)$

এবং $\quad a-b=\sqrt{x^2-y}\cdots\cdots(3),$

$\therefore$ (1) ও (3) যোগ করিয়া পাই $a=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2-y}),$

এবং (1) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া পাই $b=\frac{1}{2}(x-\sqrt{x^2-y}).$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল

$$=\pm\left[\sqrt{\{\tfrac{1}{2}(x+\sqrt{x^2-y})\}}+\sqrt{\{\tfrac{1}{2}(x-\sqrt{x^2-y})\}}\right].$$

[**দ্রষ্টব্য :** অনুরূপে $x-\sqrt{y}$এর বর্গমূল নির্ণয়ের জন্য $\sqrt{(x-\sqrt{y})}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ এইরূপে ধরিবে]

(2) **$a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$এর বর্গমূল নির্ণয় প্রণালী :**

মনে কর, $\sqrt{(a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া পাই

$$a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}.$$

অতএব, এখানে $a=x+y+z$, $\sqrt{b}=2\sqrt{xy}$, $\sqrt{c}=2\sqrt{yz}$

এবং $\sqrt{d}=2\sqrt{zx}$.

এক্ষণে, $\sqrt{b}\times\sqrt{c}=2\sqrt{xy}\times 2\sqrt{yz}$. $\therefore$ $\sqrt{bc}=4y\sqrt{xz}$,

$$\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{d}}=\frac{4y\sqrt{xz}}{2\sqrt{xz}}=2y \quad (\because \sqrt{d}=2\sqrt{xz}),\ \therefore\ y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bc}{d}}.$$

অনুরূপে পাওয়া যায় $x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bd}{c}}$ এবং $z=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{cd}{b}}$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল

$$=\pm\left\{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bd}{c}}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bc}{d}}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{cd}{b}}\right)}\right\}.$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য : উপরের বর্গমূল সম্ভব হইবে যদি x, y, z-এর যে মানগুলি পাওয়া গিয়াছে তাহাদের সমষ্টি a-র সমান হয় অর্থাৎ যদি $a=x+y+z$ হয়,

অর্থাৎ যদি $a=\frac{\sqrt{bd}}{2\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{bc}}{2\sqrt{d}}+\frac{\sqrt{cd}}{2\sqrt{b}}$ হয়,

অর্থাৎ যদি $2a\sqrt{bcd}=bd+bc+cd$ হয়।

এই সর্ত পূরণ না হইলে উপরের $a=x+y+z$ সর্ত পূরণ হয় না, সুতরাং তখন রাশিটির বর্গমূল নির্ণয় সম্ভব হইবে না।

উদাহরণমালা 13

উদা. 1. Find the square root of $4+2\sqrt{3}$.

মনে কর, $\sqrt{(4+2\sqrt{3})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

এক্ষণে, বর্গ করিয়া পাই $4+2\sqrt{3}=x+y+2\sqrt{xy}$,

$\therefore$ $x+y=4\cdots(1)$ এবং $2\sqrt{xy}=2\sqrt{3}$, অর্থাৎ $xy=3\cdots(2)$

$\therefore$ $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(4)^2-4\times 3=4$,

$\therefore$ $x-y=\pm 2\cdots(3)$

এক্ষণে, $\because$ $x+y=4$ এবং $x-y=\pm 2$, $\therefore$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাই $x=3$ এবং $y=1$; অথবা, $x=1$ এবং $y=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{3}+\sqrt{1})=\pm(\sqrt{3}+1)$.

[দ্রষ্টব্য : প্রথমে রাশিটিকে $a+2\sqrt{b}$ এই আকারে পরিণত করিয়া এমন দুইটি রাশি নির্ণয় কর যাহাদের সমষ্টি a এবং গুণফল bর সমান হয় ; ঐ রাশি দুইটির বর্গমূলের সমষ্টিই নির্ণেয় বর্গমূল। উপরের উদাহরণে $3\times 1=3$ এবং $3+1=4$. $\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল$=\sqrt{3}+1$.]

উদা. 2. Find the square root of $7-4\sqrt{3}$.

এখানে $7-4\sqrt{3}=7-2\sqrt{4\times 3}=4+3-2\sqrt{4\times 3}=(2-\sqrt{3})^2$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল$=\pm(2-\sqrt{3})$.

উদা. 3. Find the square root of $\sqrt{48}+\sqrt{45}$.

এখানে $\sqrt{48}+\sqrt{45}=\sqrt{3}(\sqrt{16}+\sqrt{15})=\sqrt{3}(4+\sqrt{15})$

$$=\sqrt{3}\times\frac{8+2\sqrt{15}}{2} \quad [\ \sqrt{15}\text{ এর সহগ 2 করিবার জন্য }]$$

$$=\sqrt{3}\times\frac{5+3+2\sqrt{15}}{2}=\sqrt{3}\times\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল$=\pm\left\{\sqrt[4]{3}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right\}=\pm\left\{\sqrt[4]{3}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right\}$.

উদা. 4. Find the square root of $9x+8y+12\sqrt{2xy}$.

$9x+8y+12\sqrt{2xy}=9x+8y+2\sqrt{72xy}=(\sqrt{9x}+\sqrt{8y})^2$,

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল$=\pm(\sqrt{9x}+\sqrt{8y})=\pm(3\sqrt{x}+2\sqrt{2y})$.

উদা. 5. Find the square root of $9+2\sqrt{6}+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}$.

মনে কর, $\sqrt{9+2\sqrt{6}+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া পাই $9+2\sqrt{6}+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

$$=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz},$$

ইহা সিদ্ধ হইবে যদি $x+y+z=9$, $2\sqrt{xy}=2\sqrt{6}$,

$2\sqrt{xz}=4\sqrt{2}$ এবং $2\sqrt{yz}=4\sqrt{3}$ হয়।

এক্ষণে, $\because\ 2\sqrt{xy}=2\sqrt{6}$, $\therefore\ xy=6$; $\because\ 2\sqrt{xz}=4\sqrt{2}$,

$\therefore\ xz=8$, এবং $\because\ 2\sqrt{yz}=4\sqrt{3}$, $\therefore\ yz=12$.

$\therefore\ x^2y^2z^2=6\times 8\times 12=576$, $\therefore\ xyz=24$, $\therefore\ x=2$, $y=3$, $z=4$ এবং এই মানগুলির দ্বারা $x+y+z=9$ সমীকরণটিও সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল$=\pm(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})=\pm(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)$.

উদা. 6. Find the square root of $17-6\sqrt{2}+4\sqrt{6}-8\sqrt{3}$.

মনে কর, $\sqrt{17-6\sqrt{2}+4\sqrt{6}-8\sqrt{3}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া পাই $17-6\sqrt{2}+4\sqrt{6}-8\sqrt{3}$

$$=x+y+z-2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}-2\sqrt{yz},$$

ইহা সম্ভব হইবে যদি $x+y+z=17$, $-2\sqrt{xy}=-6\sqrt{2}$,

$2\sqrt{xz}=4\sqrt{6}$ এবং $-2\sqrt{yz}=-8\sqrt{3}$ হয়।

অতএব, $xy=18$, $xz=24$, $yz=48$, $\therefore$ $x^2y^2z^2=18\times24\times48$,

$\therefore$ $xyz=144$, $\therefore$ $x=3$, $y=6$ এবং $z=8$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{8})$.

উদা. 7. Find the square root of $\frac{1}{2}(3x-1)+\sqrt{2x^2+x-6}$.

প্রদত্ত রাশি $=\frac{1}{2}\{(3x-1)+2\sqrt{2x^2+x-6}\}$

$$=\tfrac{1}{2}\{(2x-3)+(x+2)+2\sqrt{(2x-3)(x+2)}\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+2}\}^2$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+2}\right)$

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে $2x^2+x-6$এর দুইটি উৎপাদক $2x-3$ ও $x+2$, এই উৎপাদকদ্বয়ের সমষ্টি $3x-1$; এইভাবে সাজান হইয়াছে।]

উদা. 8. Find the square root of $1+a^2+\sqrt{(1+a^2+a^4)}$.

প্রদত্ত রাশি $=1+a^2+\sqrt{(1+a+a^2)(1-a+a^2)}$

$$=\tfrac{1}{2}\{2+2a^2+2\sqrt{(1+a+a^2)(1-a+a^2)}\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\{(1+a+a^2)+(1-a+a^2)+2\sqrt{(1+a+a^2)(1-a+a^2)}\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\{\sqrt{(1+a+a^2)}+\sqrt{(1-a+a^2)}\}^2$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{(1+a+a^2)}+\sqrt{(1-a+a^2)}\}$.

[**দ্রষ্টব্য :** প্রত্যেক সংখ্যা বা রাশির দুইটি করিয়া বর্গমূল হয়, একটি ধনাত্মক ও একটি ঋণাত্মক। যথা, 4এর বর্গমূল $+2$ ও -2, কারণ $(+2)^2=4$ এবং $(-2)^2=4$. অনুরূপে a^2+b^2+2abএর বর্গমূল $\pm(a+b)$, কিন্তু সাধারণতঃ ধনাত্মক বর্গমূলটিই গণ্য করা হয়। তোমরা সমাধানে উভয় বর্গমূলই দেখাইবে।]

43. দ্বিপদ করণীর করণীনিরসক উৎপাদক

এই পুস্তকের প্রথম খণ্ডের করণী অধ্যায়ে করণী সংক্রান্ত অনেক বিষয় আলোচিত হইয়াছে এবং তৎসঙ্গে করণী নিরসক উৎপাদক নির্ণয়ও দেখান হইয়াছে। নিম্নের উদাহরণগুলি দেখ।

উদাহরণমালা 14

উদা. 1. Find the rationalising factor of $\sqrt[p]{x}-\sqrt[q]{y}$.

মনে কর, $\sqrt[p]{x}$ বা $x^{\frac{1}{p}}=a$ এবং $\sqrt[q]{y}$ বা $y^{\frac{1}{q}}=b$.

সুতরাং প্রদত্ত রাশি$=(a-b)$.

এক্ষণে যদি p ও qএর ল. সা. গু. n হয়, তবে a^n ও b^n দুইটিই মূলদ হইবে, সুতরাং a^n-b^n রাশিটিও মূলদ হইবে।

এখানে n যে-কোন ধনাত্মক জোড় বা বিজোড় পূর্ণসংখ্যা হউক না কেন, a^n-b^n রাশিটি $a-b$ দ্বারা বিভাজ্য।

$\because \quad a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

এবং a^n-b^n এখানে মূলদ,

$\therefore \quad (a-b)$কে $(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$ দ্বারা গুণ করিলে a^n-b^n গুণফলটি মূলদ হইতেছে।

অতএব, এখানে নির্ণেয় করণী নিরসক উৎপাদক

$$=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}.$$

[দ্রষ্টব্য : উপরের উদাহরণে p ও qএর ল. সা. গু. n বলিয়া a^n মূলদ বলা হইল কেন তাহা বুঝিয়া লও। $\because$ p ও qএর ল. সা. গু. n, $\therefore$ nকে p বা q দিয়া ভাগ করিলে ভাগফল অখণ্ড সংখ্যা হইবে। মনে কর, ভাগফল দুইটি যথাক্রমে m ও r. $\therefore$ $a^n=(x^{\frac{1}{p}})^n=x^{\frac{n}{p}}=x^m$ এবং ইহা মূলদ, $\therefore$ a^n মূলদ। অনুরূপে b^n মূলদ।]

উদা. 2. Find the rationalising factor of $\sqrt[m]{a}+\sqrt[n]{b}$ বা $a^{\frac{1}{m}}+b^{\frac{1}{n}}$.

মনে কর, $a^{\frac{1}{m}}=x$ এবং $b^{\frac{1}{n}}=y$; সুতরাং প্রদত্ত রাশি$=x+y$.

এখন, যদি m ও n-এর ল. সা. গু. p হয়, তবে x^p ও y^p দুইটিই মূলদ, সুতরাং x^p+y^p মূলদ হইবে।

(i) p জোড় (even) হইলে $x^p - y^p$ রাশিটি $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য হয় এবং তখন $x^p - y^p = (x+y)(x^{p-1} - x^{p-2}y + \cdots + xy^{p-2} - y^{p-1})$ হইয়া থাকে। অতএব, তখন $x+y$কে $x^{p-1} - x^{p-2}y + \cdots + xy^{p-2} - y^{p-1}$ দ্বারা গুণ করিলে গুণফলটি মূলদ হইতেছে।

অতএব, এখানে নির্ণেয় করণী নিরসক উৎপাদক

$$= x^{p-1} - x^{p-2}y + \cdots\cdots + xy^{p-2} - y^{p-1}.$$

(ii) p যদি বিজোড় হয়, তবে $x^p + y^p$ রাশিটি $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য হয় এবং তখন $x^p + y^p = (x+y)(x^{p-1} - x^{p-2}y + \cdots\cdots - xy^{p-2} + y^{p-1})$.

$\therefore$ নির্ণেয় করণী নিরসক উৎপাদক

$$= x^{p-1} - x^{p-2}y + \cdots\cdots - xy^{p-2} + y^{p-1}.$$

উদা. 3. Find the rationalising factor of $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

প্রদত্ত রাশি $= 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{3}}$, এখানে সূচকের দুইটি হর 2 ও 3এর ল. সা. গু. 6.

মনে কর, $a = 2^{\frac{1}{2}}$ এবং $b = 3^{\frac{1}{3}}$; এখানে $a^6 = (2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^3 = 8$,

$b^6 = (3^{\frac{1}{3}})^6 = 9$; অতএব a^6, b^6 এবং $a^6 - b^6$ প্রত্যেকটি মূলদ।

এক্ষণে, $a^6 - b^6 = (a+b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)$,

$\therefore$ $a+b$এর করণী নিরসক উৎপাদক

$$= a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5.$$

$\therefore$ $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$এর নির্ণেয় করণী নিরসক উৎপাদক

$$= (2^{\frac{1}{2}})^5 - (2^{\frac{1}{2}})^4.3^{\frac{1}{3}} + (2^{\frac{1}{2}})^3.(3^{\frac{1}{3}})^2 - (2^{\frac{1}{2}})^2.(3^{\frac{1}{3}})^3 + (2^{\frac{1}{2}}).(3^{\frac{1}{3}})^4 - (3^{\frac{1}{3}})^5$$

$$= 2^{\frac{5}{2}} - 2^2.3^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{3}{2}}.3^{\frac{2}{3}} - 2.3 + 2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{4}{3}} - 3^{\frac{5}{3}}$$

$$= 4\sqrt{2} - 4\sqrt[3]{3} + 2\sqrt{2}.\sqrt[3]{9} - 6 + 3\sqrt{2}.\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{9}.$$

উদা. 4. Find the rationalising factor of $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1$.

$$\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1 = (9^{\frac{1}{3}}) - 3^{\frac{1}{3}} + 1 = 3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{1}{3}} + 1$$

$$= (3^{\frac{1}{3}})^2 - 3^{\frac{1}{3}} + 1 = a^2 - a + 1 \quad [\ a = 3^{\frac{1}{3}} \text{ ধরিয়া}\ ]$$

$\because$ $a^2 - a + 1$কে $a+1$ দ্বারা গুণ করিলে $a^3 + 1$ হয়,

অর্থাৎ এখানে $(3^{\frac{1}{3}})^3 + 1$ বা $3+1$ মূলদ রাশি হয়,

$\therefore$ নির্ণেয় করণী নিরসক উৎপাদক $= a+1 = \sqrt[3]{3} + 1$.

উদা. 5. Find the rationalising foctor of $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\times(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})$

$=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2=a+b-c+2\sqrt{ab}$.

এখন দেখিতে হইবে ইহাকে কি দিয়া গুণ করিলে $\sqrt{ab}$কে করণীমুক্ত করা যায়। দেখা যাইতেছে যে,

$\{2\sqrt{ab}+(a+b-c)\}\{2\sqrt{ab}-(a+b-c)\}=4ab-(a+b-c)^2$

এবং ইহা মূলদ।

আবার, $2\sqrt{ab}-(a+b-c)=2\sqrt{ab}-a-b+c$

$=(\sqrt{c})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

$=(\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{c}-\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$\therefore$ নির্ণেয় করণী নিরসক উৎপাদক

$=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})$.

উদা. 6. Express $\dfrac{2+\sqrt[3]{3}}{2-\sqrt[3]{3}}$ with rational denominator.

[$\dfrac{2+\sqrt[3]{3}}{2-\sqrt[3]{3}}$কে মূলদ হরবিশিষ্ট আকারে প্রকাশ কর।]

এখানে হর $2-3^{\frac{1}{3}}$এর সূচকগুলি 1 ও $\frac{1}{3}$ এবং সূচকদ্বয়ের হরগুলির ল. সা. গু. 3.

$\because\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$,

$\therefore$ এখানে করণী নিরসক উৎপাদক$=(2)^2+2.3^{\frac{1}{3}}+(3^{\frac{1}{3}})^2$.

এক্ষণে প্রদত্ত ভগ্নাংশের লব ও হরকে ঐ উৎপাদক দ্বারা গুণ করিয়া পাই

প্রদত্ত রাশি$=\dfrac{(2+3^{\frac{1}{3}})\{2^2+2.3^{\frac{1}{3}}+(3^{\frac{1}{3}})^2\}}{(2-3^{\frac{1}{3}})\{2^2+2.3^{\frac{1}{3}}+(3^{\frac{1}{3}})^2\}}$

$=\dfrac{11+8.3^{\frac{1}{3}}+4.3^{\frac{2}{3}}}{8-3}=\dfrac{11+8\sqrt[3]{3}+4\sqrt[3]{9}}{5}$.

[অন্যান্য উদাহরণ পুস্তকের প্রথম খণ্ডে করণী অধ্যায়ে দেখ।]

Exercise 11

1. Find the square root of :—

(a) $41+6\sqrt{32}$; (b) $28-6\sqrt{3}$; (c) $\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})$ [C.U. '24]

(d) $\sqrt{50}-\sqrt{48}$; (e) $\sqrt{175}+\sqrt{147}$; (f) $10\frac{3}{4}+3\sqrt{7}$.

2. Find the square root of :—

(a) $\frac{1}{2}(4x-3)+\sqrt{3x^2-7x+2}$ (b) $1+x^4+\sqrt{x^8+x^4+1}$

(c) $16+2\sqrt{15}+4\sqrt{6}+4\sqrt{10}$ (d) $11-2\sqrt{6}+6\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

(e) $x-y+z+2\sqrt{xz-yz}$.

3. Find the rationalising factors (করণী নিরসক উৎপাদক) of :

(a) $\sqrt[3]{3}+1$ (b) $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$ (c) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$

(d) $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$.

4. Express with a rational denominator (মূলদ হরবিশিষ্ট কর) :—

(a) $\dfrac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1}$ (b) $\dfrac{3-\sqrt[3]{2}}{3+\sqrt[3]{2}}$

(c) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{2}}$ (d) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$.

5. Find the value of

$$\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}, \text{ when } a=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \text{ and } b=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$$

6. Show that $(4+\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}+(4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}=7\sqrt{10}$.

7. Find the value of $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-\sqrt{(15-5\sqrt{5})}}$ correct to 2 places of decimals (আসন্ন দুই দশমিক পর্যন্ত মান নির্ণয় কর)।

8. Find the simplest value of

$$\sqrt{[\sqrt{5}+\sqrt{\{5+8\sqrt{(9-4\sqrt{5})}\}}]}$$

9. If $(x+y)^{\frac{1}{3}}+(y+z)^{\frac{1}{3}}+(z+x)^{\frac{1}{3}}=0$, show that

$$(x+y+z)^3=9(x^3+y^3+z^3).$$

10. If $x+x\sqrt{3}=10$, find the value of x to 3 significant figures.

(Simultaneous Quadratic Equations)

44. দ্বিঘাত সহসমীকরণ

(দুইটি অজ্ঞাত রাশি)

উদাহরণমালা 15

উদা. 1. Solve $\left.\begin{array}{r} x-y=2 \\ xy=3 \end{array}\right\}$

[প্রথম প্রণালী] $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=(2)^2+4\times3=16.$

$\therefore \quad x+y=\pm\sqrt{16}=\pm4.$

এখন, $\left.\begin{array}{r} x+y=4 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$

(যোগ) $2x=6,$ $\quad x=3,$ সুতরাং $y=4-3=1.$

আবার, $\left.\begin{array}{r} x+y=-4 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$

(যোগ) $2x=-2,$ $\quad x=-1,$ সুতরাং $y=-4+1=-3.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হইল $\left.\begin{array}{r} x=3 \\ y=1 \end{array}\right\}$ অথবা $\left.\begin{array}{r} x=-1 \\ y=-3 \end{array}\right\}.$

[দ্বিতীয় প্রণালী] প্রথম সমীকরণ হইতে $x=y+2$

এখন xএর মান $y+2$ দ্বিতীয় সমীকরণে বসাইয়া পাই $(y+2)y=3,$

বা, $y^2+2y=3,$ বা, $y^2+2y-3=0,$

বা, $(y+3)(y-1)=0,$ $\therefore \quad y=1$ বা $-3.$

একণে, যদি $y=1$ হয়, তবে প্রথম সমীকরণ হইতে $x=1+2=3.$

আবার যদি $y=-3$ হয়, তবে প্রথম সমীকরণ হইতে $x=-3+2=-1.$

$\therefore$ সমাধান হইল $\left.\begin{array}{r} x=3 \\ y=1 \end{array}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{array}{r} x=-1 \\ y=-3 \end{array}\right\}.$

[**দ্রষ্টব্য :** এই প্রণালীতে যে কোন সমীকরণের সমাধান করা যায়। সুবিধামত কোন সময়ে xএর মান বা কোন সময়ে y-এর মান একটি সমীকরণ হইতে লইয়া অন্যটিতে বসাইতে হয়। উত্তর লিখিবার সময় সমাধানে xএর একটি মানের সহিত yএর ঠিক অনুরূপ মানটি একত্র লইয়া উত্তর লিখিবে।]

উদা. 2. Solve $x+y=7\cdots(1),\ x^2+2y=17\cdots(2).$

সমীকরণ-(1) হইতে পাই $y=7-x\cdots(3).$

সমীকরণ (2)-এ y-এর স্থানে $7-x$ বসাইয়া পাই $x^2+2(7-x)=17$,

বা, $x^2-2x-3=0$, বা, $(x-3)(x+1)=0$,

$\therefore \quad x=3$ বা -1.

এক্ষণে, $x=3$ হইলে (3) হইতে পাই $y=7-3=4$;

এবং $x=-1$,, ,, ,, ,, $y=7+1=8$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{matrix} x=3 \\ y=4 \end{matrix}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{matrix} x=-1 \\ y=\ \ 8 \end{matrix}\right\}$.

উদা. 3. Solve $\left.\begin{matrix} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{matrix}\right\}\begin{matrix} \cdots\cdots(1) \\ \cdots\cdots(2) \end{matrix}$

$\because \quad x+y=7, \quad \therefore \quad x=7-y\cdots\cdots(3)$

এক্ষণে, সমীকরণ-(2)এ x-এর ঐ মান বসাইয়া পাই $(7-y)^2+y^2=25$,

বা, $49-14y+2y^2=25$, বা, $2y^2-14y+24=0$,

বা, $y^2-7y+12=0$, বা, $(y-3)(y-4)=0$, $\therefore$ $y=3$ বা 4.

$y=3$ হইলে (3) হইতে পাই $x=7-3=4$.

$y=4$,, ,, ,, ,, $x=7-4=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{matrix} x=4 \\ y=3 \end{matrix}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{matrix} x=3 \\ y=4 \end{matrix}\right\}$.

উদা. 4. Solve $\left.\begin{matrix} x^2+xy=15\cdots\cdots(1) \\ y = 1\cdots\cdots(2) \end{matrix}\right\}$ [C. U. '15]

সমীকরণ-(2) হইতে পাই $y=x-1\cdots(3)$. yএর এই মান বসাইয়া

সমীকরণ-(1) হইতে পাই $x^2+x(x-1)=15$, বা, $2x^2-x-15=0$,

বা, $(x-3)(2x+5)=0$. $\therefore \quad x=3, -\frac{5}{2}$.

$x=3$ হইলে সমীকরণ-(3) হইতে পাই $y=3-1=2$;

$x=-\frac{5}{2}$,, ,, ,, ,, ,, $y=-\frac{5}{2}+1=-\frac{7}{2}$.

$\therefore$ সমাধান হইল $\left.\begin{matrix} x=3 \\ y=2 \end{matrix}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{matrix} x=-2\frac{1}{2} \\ y=-3\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$.

উদা. 5. Solve $\left.\begin{matrix} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\cdots(1) \\ x+y=9\cdots(2) \end{matrix}\right\}$ [C. U. '36]

(1) হইতে পাই $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{2}$, সুতরাং $\frac{9}{xy}=\frac{1}{2}$ [$\because \ x+y=9$]

$\therefore \quad xy=18$.

$\therefore \quad (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=81-72=9, \quad \therefore \quad x-y=\pm 3.$

এক্ষণে, $\left.\begin{array}{l} x+y=9 \\ x-y=3 \end{array}\right\}$

(যোগ) $2x=12$, $\quad x=6$, সুতরাং (2) হইতে $y=9-6=3$.

আবার, $\left.\begin{array}{l} x+y=\;\;\,9 \\ x-y=-3 \end{array}\right\}$

(যোগ) $2x=6$, $\quad \therefore \quad x=3$, সুতরাং $y=9-3=6$.

$\therefore \left.\begin{array}{l} x=6 \\ y=3 \end{array}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=6 \end{array}\right\}.$

6. Solve $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2}$, $x+y=10$. [C. U. '38]

প্রথম সমীকরণ হইতে পাই $\frac{x+y}{\sqrt{xy}}=\frac{5}{2}$,

বা, $\frac{10}{\sqrt{xy}}=\frac{5}{2}$ [$\because \quad x+y=10$], বা, $5\sqrt{xy}=20$,

বা, $\sqrt{xy}=4$, $\quad \therefore \quad xy=16$,

বা, $x(10-x)=16$ [$\because \quad y=10-x$ (২য় সমীকরণ হইতে)]

বা, $10x-x^2=16$, $\quad$ বা, $x^2-10x+16=0$,

বা, $(x-2)(x-8)=0$, $\quad \therefore \quad x=2$ বা 8.

এক্ষণে ২য় সমীকরণ হইতে $x=2$ হইলে $y=8$ এবং $x=8$ হইলে $y=2$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=2, y=8$; অথবা $x=8, y=2$.

উদা. 7. Solve $\left.\begin{array}{ll} ax^2+by^2=a+b & \cdots\cdots(1) \\ x+y=1 & \cdots\cdots(2) \end{array}\right\}$

[B. U. E. '63 ; C. U. '29]

$\because \quad x+y=1, \quad \therefore \quad y=1-x \cdots\cdots(3)$

এক্ষণে (1)এ yএর মান $1-x$ বসাইয়া পাই

$ax^2+b(1-x)^2=a+b$, $\quad$ বা, $ax^2+b-2bx+bx^2-a-b=0$,

বা, $(a+b)x^2-2bx-a=0$,

$$\therefore x=\frac{2b\pm\sqrt{4b^2+4a(a+b)}}{2(a+b)}=\frac{b\pm\sqrt{b^2+a^2+ab}}{a+b}$$

এবং $y=1-x=1-\dfrac{b\pm\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a+b}=\dfrac{a\mp\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a+b}.$

উদা. 8. Solve $x+y=a+b, \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=2.$ [C. U. '31]

$\because \quad x+y=a+b, \quad \therefore \quad y=a+b-x.$ এই মান দ্বিতীয় সমীকরণে বসাইয়া পাই $\frac{a}{x}+\frac{b}{a+b-x}=2,$ বা, $\frac{a}{x}-1+\frac{b}{a+b-x}-1=0,$

বা, $\frac{a-x}{x}+\frac{b-a-b+x}{a+b-x}=0$ বা, $\frac{a-x}{x}-\frac{a-x}{a+b-x}=0,$

বা, $(a-x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a+b-x}\right)=0,$

$\therefore \quad a-x=0,$ অথবা, $\frac{1}{x}-\frac{1}{a+b-x}=0.$

যদি $a-x=0$ হয়, তবে $x=a$ এবং তখন $y=a+b-x=a+b-a=b.$

আবার যদি $\frac{1}{x}-\frac{1}{a+b-x}=0$ হয়, তবে $\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b-x},$

বা, $x=a+b-x$ বা, $2x=a+b, \quad \therefore \quad x=\frac{1}{2}(a+b),$

এবং তখন $y=(a+b)-x=(a+b)-\frac{1}{2}(a+b)=\frac{1}{2}(a+b).$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{array}{l} x=a \\ y=b \end{array}\right\}$ অথবা, $x=y=\frac{1}{2}(a+b).$

উদা. 9. Solve $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots(1), \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1 \cdots(2).$ [C. U. '25]

$\because \quad \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2=2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right),$

$\therefore \quad \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+(1)^2=2\times 1$ [প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় হইতে]

বা, $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=1, \quad \therefore \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\pm 1.$

এক্ষণে, $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1 \end{array}\right\}$ যোগ করিয়া $\frac{2x}{a}=2, \quad \therefore \quad x=a.$ এবং বিয়োগ করিয়া $\frac{2y}{b}=0, \quad \therefore \quad y=0.$

অথবা, $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=-1 \\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\ \ 1 \end{array}\right\}$ যোগ করিয়া $\frac{2x}{a}=0, \quad \therefore \quad x=0,$ এবং বিয়োগ করিয়া $\frac{2y}{b}=-2. \therefore \quad y=-b.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{array}{l} x=a \\ y=0 \end{array}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=-b \end{array}\right\}.$

উদা. 10. Solve $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=2,\ \frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=2.$ [C. U. '10]

$\because\ \left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)^2+\left(\frac{a}{x}-\frac{b}{y}\right)^2=2\left(\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}\right).$

$\therefore\ (2)^2+\left(\frac{a}{x}-\frac{b}{y}\right)^2=2\times 2$ [প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় হইতে]

বা, $\left(\frac{a}{x}-\frac{b}{y}\right)^2=0,\quad \therefore\ \frac{a}{x}-\frac{b}{y}=0.$

এক্ষণে, $\left.\begin{array}{l}\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=2\\ \frac{a}{x}-\frac{b}{y}=0\end{array}\right\}$ যোগ করিয়া পাই $\frac{2a}{x}=2,\quad \therefore\ x=a$
এবং বিয়োগ করিয়া পাই $\frac{2b}{y}=2,\quad \therefore\ y=b.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=a,\ y=b.$

উদা. 11. Solve $\left.\begin{array}{l}x+\frac{3}{y}=\ \ 2\cdots(1)\\ y+\frac{3}{x}=-2\cdots(2)\end{array}\right\}$ [A. U. 1879]

(1) হইতে পাই $xy+3=\ \ 2y\cdots(3)$

(2) হইতে পাই $xy+3=-2x\cdots(4)$

$\therefore$ (3) ও (4) হইতে পাই $2y=-2x$, বা, $y=-x\cdots(5)$

এক্ষণে (1)এ yএর স্থানে $-x$ বসাইয়া পাই $x+\frac{3}{-x}=2,$

বা, $x^2-3=2x$, বা, $x^2-2x-3=0,$

বা, $(x-3)(x+1)=0,\quad \therefore\ x=3$ বা, $-1.$

$x=3$ হইলে (5) হইতে পাই $y=-3,$

এবং $x=-1$ হইলে (5) হইতে পাই $y=1.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{array}{l}x=\ \ 3\\ y=-3\end{array}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{array}{l}x=-1\\ y=\ \ 1\end{array}\right\}.$

উদা. 12. Solve $x+y=3\cdots(1),\ 2x^2-5xy+2y^2=0\cdots(2)$ [C. U. '20]

সমীকরণ (2) হইতে $2x^2-4xy-xy+2y^2=0,$

বা, $(2x-y)(x-2y)=0,\quad \therefore\ 2x-y=0$ অথবা $x-2y=0.$

এখন $\left.\begin{array}{l}x+y=3\\ 2x-y=0\end{array}\right\}$ যোগ করিয়া $3x=3,\quad \therefore\ x=1,$
$\therefore\ y=3-1=2\ ;$

আবার, $\left.\begin{array}{l} x+y=3 \\ x-2y=0 \end{array}\right\}$ বিয়োগ করিয়া $3y=3$, $\therefore\ y=1$,
সুতরাং $x=2$.

নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array}\right.$; $\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \end{array}\right\}$.

উদা. 13. Solve $xy+x+y=27\cdots(1)$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\cdots(2)$.

[C. U. '39]

(2) হইতে পাই $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{2}$, বা, $2(x+y)=xy$.

এখন (1) হইতে পাই $2(x+y)+(x+y)=27$, বা, $3(x+y)=27$,

$\therefore\ x+y=9$, $\therefore\ xy+9=27$ [(1) হইতে], $\therefore\ xy=18$.

$\therefore\ (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=81-72=9$, $\therefore\ x-y=\pm 3$.

এক্ষণে, $x+y=9$ এবং $x-y=\pm 3$ এই সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া পাই $\left.\begin{array}{l} x=6 \\ y=3 \end{array}\right\}$ অথবা $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=6 \end{array}\right\}$.

উদা. 14. Solve $\left.\begin{array}{ll} (x+a)(y+b)=c^2 & \cdots(1) \\ x+y=a+b & \cdots(2) \end{array}\right\}$ [C. U. '30]

উভয় পক্ষে $a+b$ যোগ করিয়া (2) হইতে পাই

$(x+a)+(y+b)=2(a+b)\cdots(3)$.

মনে কর, $x+a=p$ এবং $y+b=q$, সুতরাং (3) ও (1) হইতে পাই

$p+q=2(a+b)$ এবং $pq=c^2$.

$\therefore\ (p-q)^2=(p+q)^2-4pq=4(a+b)^2-4c^2=4\{(a+b)^2-c^2\}$

$\therefore\ p-q=\pm 2\sqrt{(a+b)^2-c^2}$.

এখন, $p+q=2(a+b)\qquad\cdots(4)$

এবং $p-q=\pm 2\sqrt{(a+b)^2-c^2}\cdots(5)$

(4) ও (5) যোগ করিয়া পাই $2p=2\{a+b\pm\sqrt{(a+b)^2-c^2}\}$

$\therefore\ p=a+b\pm\sqrt{(a+b)^2-c^2}$

$\therefore\ x+a=a+b\pm\sqrt{(a+b)^2-c^2}$, $\therefore\ x=b\pm\sqrt{(a+b)^2-c^2}$.

আবার (4) হইতে (5) বিয়োগ করিয়া পাই

$2q=2\{a+b\mp\sqrt{(a+b)^2-c^2}\}$

$\therefore\ q=a+b\mp\sqrt{(a+b)^2-c^2}$,

$\therefore\ y+b=a+b\mp\sqrt{(a+b)^2-c^2}$

$\therefore\ y=a\mp\sqrt{(a+b)^2-c^2}$.

$\therefore\ x=b\pm\sqrt{(a+b)^2-c^2}$, $y=a\mp\sqrt{(a+b)^2-c^2}$.

উদা. 15. Solve $5x-2y=0\cdots(1)$, $\frac{3}{x^2}-\frac{5}{y^2}=\frac{11}{20}\cdots\cdots(2)$

[C. U. '50]

(1) হইতে পাই $5x=2y$, $\therefore\ x=\frac{2y}{5}$, $\therefore\ x^2=\frac{4y^2}{25}$.

(2) হইতে পাই $\frac{3}{\frac{4y^2}{25}}-\frac{5}{y^2}=\frac{11}{20}$, বা, $\frac{75}{4y^2}-\frac{5}{y^2}=\frac{11}{20}$,

বা, $\frac{55}{4y^2}=\frac{11}{20}$, বা, $44y^2=55\times 20$, বা, $y^2=\frac{55\times 20}{44}=25$,

$\therefore\ y=\pm 5$ অতএব, $x=\frac{2y}{5}=\frac{2}{5}\times\pm 5=\pm 2$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{matrix}x=2\\y=5\end{matrix}\right\}$ অথবা $\left.\begin{matrix}x=-2\\y=-5\end{matrix}\right\}$.

উদা. 16. Solve $x+y=5\cdots\cdots(1)$, $x^2+y^2=8xy\cdots\cdots(2)$

[C. U. '17]

$\because\ x+y=5$, $\therefore\ x^2+y^2+2xy=25$ (বর্গ করিয়া)

বা, $8xy+2xy=25$ [$\because\ x^2+y^2=8xy$]

বা, $10xy=25$, বা, $xy=\frac{5}{2}$.

$\therefore\ (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=5^2-4\times\frac{5}{2}=15$.

$\therefore\ x-y=\pm\sqrt{15}\cdots\cdots(3)$

একণে (1) ও (3) যোগ করিয়া পাই $2x=5\pm\sqrt{15}$, $\therefore\ x=\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{15})$
এবং (1) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া পাই $2y=5\mp\sqrt{15}$, $\therefore\ y=\frac{1}{2}(5\mp\sqrt{15})$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{15})$, $y=\frac{1}{2}(5\mp\sqrt{15})$.

উদা. 17. Solve $(a-b)x+(a+b)y=a+b\cdots(1)$ and

$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=2a\cdots\cdots(2)$ [C. U. '32]

(1) হইতে পাই $(a+b)y=(a+b)-(a-b)x\cdots\cdots(3)$

(2) হইতে পাই $bx+ay=2axy$, ইহার উভয় পক্ষকে $(a+b)$ দিয়া গুণ করিয়া পাই $b(a+b)x+a(a+b)y=2a(a+b)xy$,

বা, $b(a+b)x+a\{(a+b)-(a-b)x\}=2a\{(a+b)-(a-b)x\}x$

[$(a+b)y$-এর মান বসাইয়া],

বা, $abx+b^2x+a(a+b)-a^2x+abx$

$=2a^2x+2abx-2a(a-b)x^2$,

বা, $2a(a-b)x^2+(b^2-3a^2)x+a(a+b)=0$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $2a(a-b)x^2-(a^2-b^2)x-2a^2x+a(a+b)=0$,

বা, $(a-b)x\{2ax-(a+b)\}-a\{2ax-(a+b)\}=0$,

বা, $\{2ax-(a+b)\}\{(a-b)x-a\}=0$,

$\therefore \quad 2ax-(a+b)=0$, অথবা, $(a-b)x-a=0$,

$\therefore \quad x=\dfrac{a+b}{2a}$, অথবা, $\dfrac{a}{a-b}$.

যদি $x=\dfrac{a+b}{2a}$ হয়, তবে (3) হইতে পাই

$$y=\frac{a+b}{a+b}-\frac{a-b}{a+b}x=1-\frac{a-b}{a+b}\times\frac{a+b}{2a}=1-\frac{a-b}{2a}=\frac{a+b}{2a}.$$

যদি $x=\dfrac{a}{a-b}$ হয়, তবে (3) হইতে পাই

$$y=1-\frac{a-b}{a+b}\times\frac{a}{a-b}=1-\frac{a}{a+b}=\frac{b}{a+b}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=y=\dfrac{a+b}{2a}$; অথবা, $x=\dfrac{a}{a-b}$, $y=\dfrac{b}{a+b}$.

উদা. 18. Solve $\left.\begin{array}{l} x^y \;\;=y^2\cdots\cdots(1) \\ y^{2y}=x^4\cdots\cdots(2) \end{array}\right\}$

[B. U. E. '63 ; C. U. '41, '45]

(2) হইতে পাই $(y^2)^y=x^4$, $\therefore$ (1) হইতে পাই $x^y=y^2$,

বা, $(x^y)^y=(y^2)^y$, বা $(x)^{y^2}=x^4$, $\therefore\ y^2=4$, $\therefore\ y=\pm 2$.

যদি $y=2$ হয়, তবে (1) হইতে পাই $x^2=2^2$, $\therefore\ x=\pm 2$.

যদি $y=-2$ হয়, তবে (1) হইতে পাই $(x)^{-2}=(-2)^2=4$,

বা, $\dfrac{1}{x^2}=4$, বা, $x^2=\frac{1}{4}$, $\therefore\ x=\pm\frac{1}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=\pm 2$, $y=2$; অথবা, $x=\pm\frac{1}{2}$, $y=-2$.

উদা. 19. Solve $x^y=y^x\cdots(1)$, $x=2y\cdots(2)$. [C. U. '35]

$\because\ 2y=x$, $\therefore\ (2y)^y=x^y=y^x=y^{2y}=(y^2)^y$,

$\therefore\ y^2=2y$, বা, $y^2-2y=0$, বা, $y(y-2)=0$, $\therefore\ y=0, 2$.

যদি $y=0$ হয়, তবে (2) হইতে পাই $x=0$;

যদি $y=2$ হয়, তবে (2) " " $x=2\times 2=4$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=0$, $y=0$; অথবা, $x=4$, $y=2$.

উদা. 20. Solve $8.2^{xy}=4^y \cdots\cdots (1)$, $9^x.3^{xy}=\frac{1}{27} \cdots (2)$ [C.U. '42]

(1) হইতে পাই $2^3 \times 2^{xy}=2^{2y}$, বা, $2^{3+xy}=2^{2y}$,

$\therefore \quad 3+xy=2y \cdots (3)$.

(2) হইতে পাই $3^{2x}.3^{xy}=\frac{1}{3^3}=3^{-3}$, বা, $3^{2x+xy}=3^{-3}$,

$\therefore \quad 2x+xy=-3 \cdots (4)$

(3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া পাই $3-2x=2y+3$, বা, $-x=y \cdots (5)$,

এক্ষণে (3)এ yএর স্থানে $-x$ বসাইয়া পাই $3-x^2=-2x$,

বা, $x^2-2x-3=0$, বা, $(x-3)(x+1)=0$, $\therefore \quad x=3, -1$.

$x=3$ হইলে (5) হইতে পাই $y=-3$,

$x=-1$,, , ,, ,, $y=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{array}{l} x=\ \ 3 \\ y=-3 \end{array}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=\ \ 1 \end{array}\right\}$.

উদা. 21. Solve $x^3+y^3=9 \cdots (1)$, $x+y=3 \cdots (2)$. [C U. '16]

$\because \quad x^3+y^3=9$, $\therefore \quad (x+y)^3-3xy(x+y)=9$,

বা, $(3)^3-3xy.3=9$, বা, $27-9xy=9$, $\therefore \quad xy=2$,

$\therefore \quad (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(3)^2-4\times 2=1$

$\therefore \quad x-y=\pm 1 \cdots (3)$.

এখন, (2) ও (3) হইতে পাই,

(a) $\left.\begin{array}{l} x+y=3 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$ এবং (b) $\left.\begin{array}{l} x+y=\ \ 3 \\ x-y=-1 \end{array}\right\}$

$\therefore$ (a) হইতে $x=2$, $y=1$ এবং (b) হইতে $x=1$, $y=2$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \end{array}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array}\right\}$.

উদা. 22. Solve $2^{3x}.4^y=128 \cdots (1)$ and $9^{x+y}=27^{xy} \cdots (2)$.

(1) হইতে পাই $2^{3x}.2^{2y}=2^7$, বা, $2^{3x+2y}=2^7$,

$\therefore \quad 3x+2y=7 \cdots (3)$,

(2) হইতে পাই $3^{2x+2y}=3^{3xy}$, $\therefore \quad 2x+2y=3xy \cdots (4)$.

এক্ষণে, (3) হইতে পাই $2y=7-3x$, $\therefore \quad y=\frac{7-3x}{2} \cdots (5)$.

$\therefore$ (4) হইতে পাই $3x\times\frac{7-3x}{2}=2x+(7-3x)=7-x$,

বা, $21x-9x^2=14-2x$,

বা, $9x^2-23x+14=0$, বা, $9x^2-14x-9x+14=0$,

বা, $(x-1)(9x-14)=0$, $\therefore$ $x=1$, বা, $\frac{14}{9}$.

$\therefore$ (5) হইতে পাই $y=2$, বা, $\frac{7}{6}$.

অতএব, নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=2 \end{matrix}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{matrix} x=\frac{14}{9} \\ y=\frac{7}{6} \end{matrix}\right\}$.

Exercise 12

Solve (সমাধান কর) :—

1. $x+y=12$, $xy=35$.

2. $x+y=7$, $x^2+y^2=29$.

3. $x+y=5$, $x^2+2y=13$.

4. $x+y=\frac{5}{6}$, $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1$. [C. U. '37]

5. $x^2+y^2=1$, $3x+4y=5$. [C. U. '22]

6. $x^2+xy=28$, $x-y=1$.

7. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$, $x+y=3$. [M. U. 1860]

8. $x^2+y^2=a$, $x+2y=1$.

9. $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{10}{3}$, $x+y=10$. [C. U. '47]

10. $x+\frac{4}{y}=1$, $y+\frac{4}{x}=25$. [H. S. '63 ; C. U. '40]

11. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{10}{9}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{3}$.

12. $3x-y=8$, $y^2-8x=9$.

13. $x^2+y^2=41$, $xy=20$.

14. $2x^2+3xy+4y^2=24$, $x+3y=7$. [C. U. '16]

15. $y^x=4$, $y^2=2^x$. [C. U. '43]

16. $x+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}$, $y+\frac{1}{x}=3$. [C. U. '48]

17. $3^x=9^y$, $5^{x+y+1}=25^{xy}$. [C. U. '46]

18. $4^x=2^y$, $(27)^{xy}=9^{y+1}$.

19. $x^2+y^2=b,\ x+2y=1.$

20. $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18,\ x+y=12.$ [C. U. '19]

21. $x^3-y^3=218,\ x-y=2.$ [C. U. '17]

22. $x^2+y^2=74,\ xy=35.$

23. $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{13}{6},\ x+y=13.$

24. $5x=2y,\ \dfrac{3}{x^2}-\dfrac{5}{y^2}=\dfrac{11}{20}.$ [C. U. '50]

25. $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{9}{2},\ \dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{3}.$ [C. U. '52]

26. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{5}=5,\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=\dfrac{5}{6}.$ [C. U. '53]

27. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=5,\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1.$ [U. P. B. '47]

28. $x+y=a+b,\ \dfrac{a}{x+b}+\dfrac{b}{y+a}=1.$ [U. P. B '51]

29. $ax^2+by^2=a+b,\ x+y=1.$ [C. U. '29]

30. $x+y+xy=27,\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$ [P. U. '49]

31. $x+y-\sqrt{xy}=7,\ x^2+y^2+xy=133.$ [C U. '51]

32. $(x-a)(y-b)=ab,\ \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}.$ [C. U. '34]

33. $(x+y)^{\frac{2}{3}}+2(x-y)^{\frac{2}{3}}=3(x^2-y^2)^{\frac{1}{3}},\ 2x-3y=4.$ [C. U. '49]

তৃতীয় অধ্যায়

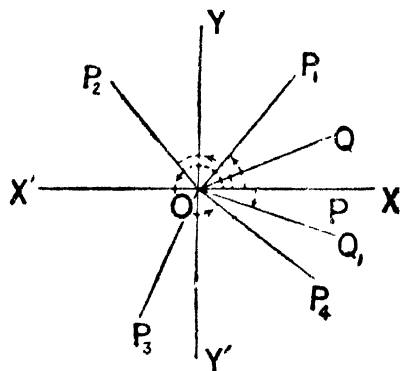
TRIGONOMETRY

[ত্রিকোণমিতি]

যে কোন পরিমাণের কোণ

নবম শ্রেণীর পাঠ্যাংশে কতিপয় নির্দিষ্ট কোণের কোণানুপাত (Trigonometrical ratios) সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। তোমরা জান জ্যামিতিতে কোণের পরিমাণ 0° হইতে 360° পর্যন্ত সীমাবদ্ধ এবং কোণগুলি ধনাত্মক (Positive) হইয়া থাকে। কিন্তু পরিমিতিতে কোণ যে-কোন পরিমাণের এবং ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক যে-কোন প্রকারের হইতে পারে।

1. **ধনাত্মক কোণ** (Positive angle)।

মনে কর, XOX' এবং YOY' সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। মনে কর, OP সরলরেখা উহার OXএর উপর প্রথম অবস্থান হইতে ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে তাহার বিপরীত দিকে ঘুরিয়া OP_1 অবস্থানে গেল। ইহার ফলে যে POP_1 বা XOP_1 কোণ উৎপন্ন হইল তাহা একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হইল। উহা যদি তীর-নির্দিষ্ট দিকে অর্থাৎ ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে তাহার বিপরীত দিকে আরও ঘুরিয়া OP_2 অবস্থানে

চিত্র 1

আসে, তবে XOP_2 কোণটি ধনাত্মক স্থূলকোণ হইবে। ঐরূপ OP রেখা আরও ঘুরিয়া ক্রমশঃ OP_3 ও OP_4 অবস্থানে আসিলে যথাক্রমে ধনাত্মক প্রবৃদ্ধ কোণ XOP_3 এবং তিন সমকোণের অধিক কিন্তু চারি সমকোণ অপেক্ষা কম একটি ধনাত্মক প্রবৃদ্ধ কোণ XOP_4 উৎপন্ন করিবে। OP যদি আরও একটু ঘুরিয়া পূর্ব অবস্থান OXএর সহিত মিলিত হয়, তবে চারি সমকোণ বা 360°-র সমান কোণ উৎপন্ন করিবে। এখন যদি OP ঐভাবে

সম্পূর্ণ একপাক ঘোরার পর আরও ঘুরিয়া OQ অবস্থানে আসে, তবে যে কোণটি উৎপন্ন হইল তাহা অবশ্যই চারি সমকোণ বা 360° অপেক্ষা বৃহত্তর ও ধনাত্মক।

অতএব, দেখা গেল যে ত্রিকোণমিতিতে একটি সরলরেখা তাহার এক প্রান্তকে কেন্দ্র করিয়া তাহার মূল অবস্থান হইতে ক্রমশঃ ঘুরিয়া যে কোন পরিমাণের কোণ (angle of any magnitude) উৎপন্ন করিতে পারে। আর উহা ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে তাহার বিপরীত দিকে (anti-clockwise) ঘুরিলে উৎপন্ন কোণগুলি ধনাত্মক হইবে।

2. ঋণাত্মক কোণ (Negative angle)।

(চিত্র 1) যদি OP সরলরেখা ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে সেই দিকে (clockwise) ঘুরিয়া উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে OQ_1 অবস্থানে আসে, তবে উৎপন্ন XOQ_1 কোণটি **ঋণাত্মক সূক্ষ্মকোণ** হইবে। ঐ অভিমুখে উহা আরও ঘুরিতে থাকিলে ক্রমশঃ ঋণাত্মক স্থূলকোণ, প্রবৃদ্ধ কোণ প্রভৃতি যে-কোন পরিমাণের ঋণাত্মক কোণ উৎপন্ন করিবে।

অতএব, ত্রিকোণমিতিক কোণ যে-কোনও পরিমাণের এবং ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয় প্রকারের হইতে পারে।

[**দ্রষ্টব্য :** ঘূর্ণায়মান OP সরলরেখাকে **generating line** বা **radius vector** বলে।

3. Quadrant (পাদ)। দুইটি সরলরেখা XOX' ও YOY' পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করিলে (চিত্র 1 দেখ) কাগজের সমতলটি চারিটি বিভাগে বিভক্ত হয় এবং প্রত্যেক বিভাগকে এক একটি পাদ (Quadrant) বলে। এখানে XOY, YOX', X'OY' এবং Y'OXকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ পাদ ধরা হয়।

কোণের পরিমাণ সম্বন্ধে যাহা বলা হইয়াছে তাহা হইতে বুঝা যায় যে (চিত্র 1 দেখ),

(i) কোণগুলি **ধনাত্মক** হইলে এবং তাহাদের পরিমাণ

0° ও 90°এর মধ্যে হইলে তাহারা **প্রথম পাদে** অবস্থিত হয়,
90° ও 180° „ „ „ „ **দ্বিতীয় পাদে** „ „
180° ও 270° „ „ „ „ **তৃতীয় পাদে** „ „
270° ও 360° „ „ „ „ **চতুর্থ পাদে** „ „

(ii) কোণগুলি **ঋণাত্মক** হইলে এবং তাহাদের পরিমাণ

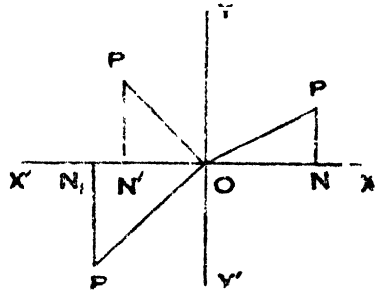
0° ও -90°এর মধ্যে হইলে তাহারা	**চতুর্থ পাদে**	অবস্থিত হইবে,
-90° ও -180° ,, ,, ,, ,,	**তৃতীয় পাদে**	,, ,,
-180° ও -270° ,, ,, ,, ,,	**দ্বিতীয় পাদে**	,, ,,
-270° ও -360° ,, ,, ,, ,,	**প্রথম পাদে**	,, ,,

যদি কোনও কোণের পরিমাণ 750° হয়, তবে বুঝিতে হইবে যে, OP রেখা প্রথম অবস্থানে OX হইতে ধনাত্মক দিকে সম্পূর্ণ দুইবার ঘুরিয়া আরও 30° কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। কারণ, $750^\circ = 2 \times 360^\circ + 30^\circ$, সুতরাং সেস্থলে OP রেখাটি **প্রথম পাদে** অবস্থিত হইবে।

আবার, যদি কোন কোণের পরিমাণ -1235° হয়, তবে বুঝিতে হইবে যে OP রেখা তৃতীয় পাদে অবস্থিত হইবে। কারণ, $-1235^\circ = -360^\circ \times 3 - 155^\circ$, সুতরাং OP রেখা negative direction-এ পুরা 3 বার ঘুরিয়া OX অবস্থানে আসিবার পর আরও -155° কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। অতএব, উহা তৃতীয় পাদে আসিয়াছে।

4. কোণানুপাতের ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্ন (signs)।

তোমরা লেখ অঙ্কনের সময় শিখিয়াছ যে XOX′ ও YOY′ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করিলে প্রচলিত প্রথা অনুসারে O হইতে OX ও OY বরাবর দূরত্বগুলিকে ধনাত্মক (positive) এবং OX′ ও OY′ বরাবর দূরত্বগুলিকে ঋণাত্মক (negative) ধরা হয়। অতএব, Y-অক্ষের ডানদিক positive এবং বামদিক negative ; আর X-অক্ষের উপরের দিক positive এবং নীচের দিক negative.

ত্রিকোণমিতিতেও এই নিয়মে কোণানুপাত নির্ণয় করা হয়। কেবল ঘূর্ণায়মান OP রেখাটি যে-কোন পাদেই থাকুক না কেন উহাকে সতত ধনাত্মক (positive) ধরিতে হইবে। মনে কর, OP প্রথম পাদে অবস্থিত আছে (উপরের চিত্র 2 দেখ) এবং PN⊥OX. এক্ষেত্রে OPN সমকোণী ত্রিভুজের

চিত্র 2

OP, ON ও NP অর্থাৎ অতিভুজ, ভূমি ও লম্ব তিনটিই ধনাত্মক। OP যদি দ্বিতীয় পাদে থাকে এবং $PN' \perp OX'$ হয়, তবে OP ও $N'P$ ধনাত্মক এবং ON' ঋণাত্মক। অনুরূপে, তৃতীয় পাদে কেবল OP ধনাত্মক, কিন্তু ON_1 এবং PN_1 উভয়েই ঋণাত্মক। আর, চতুর্থ পাদে কেবল PN লম্বটি ঋণাত্মক হইবে।

অতএব, প্রথম পাদে সমস্ত ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতগুলিই ধনাত্মক. দ্বিতীয় পাদে কেবল sine অর্থাৎ $\left(\frac{PN'}{OP}\right)$ ধনাত্মক (সুতরাং sin-এর অন্যোন্যক cosec ও ধনাত্মক), কিন্তু অন্য অনুপাতগুলি ঋণাত্মক। তৃতীয় পাদে কেবল tan (সুতরাং তাহার অন্যোন্যক cot ও) ধনাত্মক, কিন্তু অপর অনুপাতগুলি ঋণাত্মক। চতুর্থ পাদে কেবল cos (সুতরাং উহার অন্যোন্যক sec ও) ধনাত্মক, কিন্তু অন্য অনুপাতগুলি ঋণাত্মক।

এইরূপে OX অবস্থান হইতে ঘূর্ণায়মান OP রেখাটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে কোনও কোণ উৎপন্ন করুক না কেন, উহা যে পাদে অবস্থিত থাকিবে সেই অনুসারে কোণানুপাতগুলির ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্ন (signs) নির্ধারিত হইবে।

ইহাকে সংক্ষেপে বলা হয় (**All, sin, tan, cos**), অর্থাৎ প্রথম পাদে সমস্ত কোণানুপাত, দ্বিতীয়ে কেবল sin, তৃতীয়ে কেবল tan এবং চতুর্থ পাদে কেবল cos ধনাত্মক।

চিত্র 3

[দ্রষ্টব্য: যে কোণানুপাতগুলি ধনাত্মক তাহাদের অন্যোন্যকগুলিও ধনাত্মক হইবে। কোন একটি কোণ চারি সমকোণের কোন গুণিতক পরিমাণ বৃদ্ধি পাইলে বা হ্রাস পাইলে ঘূর্ণায়মান বাহুটি (radius vector) সম্পূর্ণ এক বা একাধিকবার ঘুরিয়া পুনরায় তাহার পূর্ব অবস্থানে ফিরিয়া আসে। সুতরাং অসংখ্য কোণের একই সীমারেখা হইতে পারে। ঐরূপ কোণগুলিকে coterminal angles বলে এবং $n.360^\circ + \theta$ দ্বারা কোণগুলিকে প্রকাশ করা হয় (n এখানে যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা)]

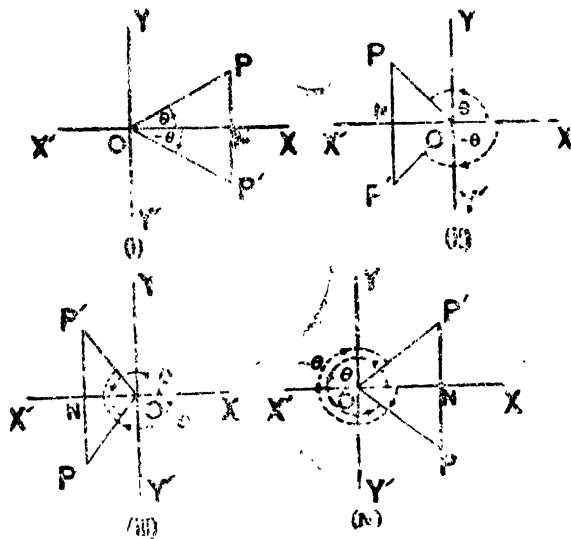
Trigonometrical ratios of angles associated with a given angle θ

(একটি নির্দিষ্ট কোণের সহিত সংযুক্ত কোণসমূহের কোণানুপাত)

5. θ-র যে-কোন মানে ($-\theta$) কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

(চিত্র 4এর প্রথম চিত্রে) মনে কর, OP রেখা ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে তাহার বিপরীত দিকে ঘুরিয়া OX অবস্থান হইতে OP অবস্থানে আসিয়া XOP কোণ উৎপন্ন করিল এবং উহার মান θ, সুতরাং θ কোণটি ধনাত্মক। আবার মনে কর, OP রেখা ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে সেই দিকে ঘুরিয়া OX অবস্থান হইতে OP′ অবস্থানে আসিয়া XOP′ কোণ উৎপন্ন করিল এবং $\angle XOP' = \angle XOP$ হইল। অতএব, $\angle XOP'$ কোণটি ঋণাত্মক অর্থাৎ এক্ষেত্রে কোণটি হইল $-\theta$.

এখন, $PN \perp XOX'$ টানিয়া PNকে বর্ধিত কর। উহা যেন OP′কে P′ বিন্দুতে ছেদ করিল।

এক্ষণে, $\angle NOP = \angle NOP'$, $\angle PNO = \angle P'NO$ (সমকোণ বলিয়া),
এবং $OP = OP'$, $\therefore$ PON ও P′ON সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইল।
অতএব, ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ বাহুগুলি সমান হইবে।

চিত্র 4

$\therefore \quad -PN = P'N$, বা $PN = -P'N$ (P′N ঋণাত্মক), এবং $OP = OP'$ ($\because$ ঘূর্ণায়মান রেখা OPকে সতত ধনাত্মক ধরা হয়)।

অতএব, $\sin(-\theta)=\frac{P'N}{OP'}=\frac{-PN}{OP}=-\sin\theta,$

$$\cos(-\theta)=\frac{ON}{OP'}=\frac{ON}{OP}=\cos\theta,$$

$$\tan(-\theta)=\frac{P'N}{ON}=\frac{-PN}{ON}=-\tan\theta.$$

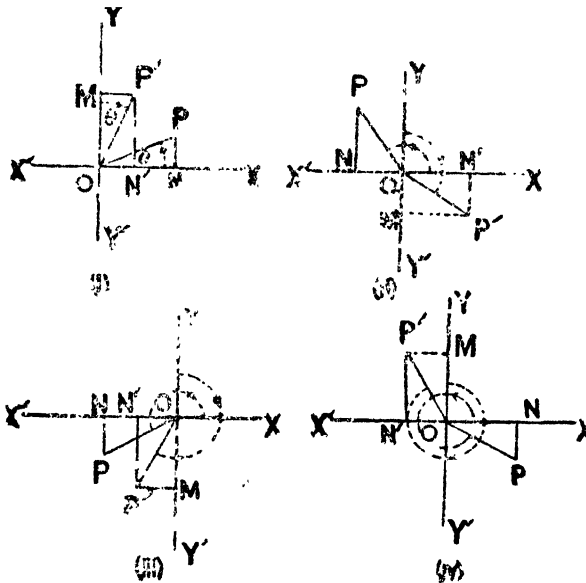
এক্ষণে উহাদের অন্যোন্যক হইতে পাই

$$\operatorname{cosec}(-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta,$$
$$\sec(-\theta)=\sec\theta,$$
$$\cot(-\theta)=-\cot\theta.$$

অন্য চিত্র তিনটিতেও প্রচলিত প্রথা অনুসারে অনুরূপভবে ঐ একই কোণানুপাত পাওয়া যাইবে।

[**দ্রষ্টব্য** : এখানে দেখ চিত্র 4(i)-এ OP চতুর্থ পাদে থাকায় কেবল cos ও উহার অন্যোন্যক sec ধনাত্মক হইয়াছে।]

6. θ-র যে-কোন মানে $(90°-\theta)$ **কোণের কোণানুপাত।**

মনে কর, OP রেখা OX হইতে ধনাত্মক দিকে (anti-clockwise)

চিত্র 5

ঘুরিয়া প্রথমে $\angle XOP=\theta$ উৎপন্ন করিল। মনে কর, OP-র সমান আর একটি সরলরেখা OP' ঐরূপে ঘুরিয়া OYএর সহিত মিলিত হইয়া

90° কোণ ($\angle XOY$) উৎপন্ন করিবার পর বিপরীত দিকে (অর্থাৎ clockwise) ঘুরিয়া আসিয়া $\angle YOP' = \theta$ উৎপন্ন করিল। ইহাতে $\angle XOP' = 90° - \theta$ হইল।

এখন, XOX'এর উপর PN ও P'N' লম্ব টান এবং YOY'এর উপর P'M লম্ব টান। এক্ষণে, প্রত্যেক চিত্রে অঙ্কন অনুসারে $\angle XOP$ ও $\angle YOP'$এর পরিমাণ সমান।

$\therefore$ প্রত্যেক চিত্রে $\angle PON = \angle MOP'$

$= \angle OP'N'$ ($\because$ OM ∥ P'N'),

এবং OPN ও OP'N' সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম,

$\therefore$ ON = P'N' (পরিমাণে), PN = ON' (পরিমাণে) এবং OP = OP'.

আবার, প্রত্যেক চিত্রে ON ও P'N' একই চিহ্নযুক্ত (উভয়ই ধনাত্মক বা উভয়ই ঋণাত্মক) এবং PN ও ON' একই চিহ্নযুক্ত।

অতএব, $\sin(90° - \theta) = \sin \angle XOP' = \frac{P'N'}{OP'} = \frac{ON}{OP} = \cos\theta$,

$$\cos(90° - \theta) = \cos \angle XOP' = \frac{ON'}{OP'} = \frac{PN}{OP} = \sin\theta,$$

$$\tan(90° - \theta) = \tan \angle XOP' = \frac{P'N'}{ON'} = \frac{ON}{PN} = \cot\theta.$$

আবার, $\because$ উহাদের অন্যোন্যকগুলিও সমান,

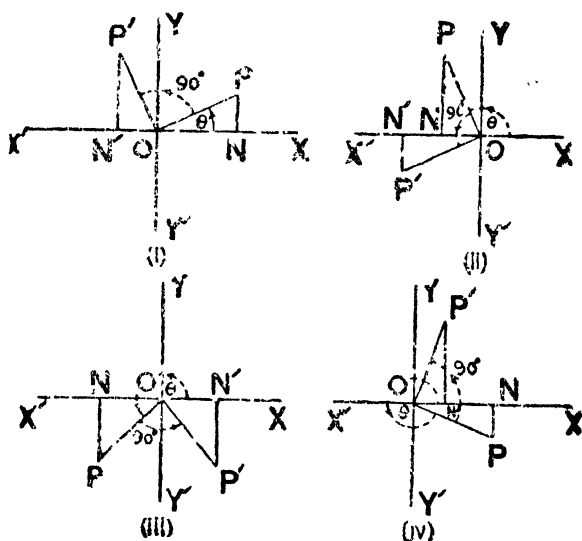
$\therefore$ $\operatorname{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$,

$\sec(90° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$,

$\cot(90° - \theta) = \tan\theta$.

দ্রষ্টব্য : এখানে $(90° - \theta)$ ও θ কোণ দুইটির সমষ্টি 90° বলিয়া উভয়ে পরস্পর পূরক কোণ (complementary angles)। এখানে জানা গেল যে, দুইটি পরস্পর পূরক কোণের (i) একটির sine অন্যটির cosine-এর সমান এবং বিপরীতক্রমে দ্বিতীয়টির sine প্রথমটির cosineএর সমান হয়; (ii) একটির tangent অপরটির cotangentএর সমান এবং বিপরীতক্রমে (vice-versa) দ্বিতীয়টির tangent প্রথমটির cotangentএর সমান ; এবং (iii) একটির secant অপরটির cosecantএর সমান এবং বিপরীতক্রমে দ্বিতীয়টির secant প্রথমটির cosecantএর সমান।

7. θ-র যে কোন মানে $(90^\circ+\theta)$ কোণের কোণানুপাত।

মনে কর, ঘূর্ণায়মান OP রেখা (radius vector) OX অবস্থান হইতে ধনাত্মক দিকে ঘুরিয়া প্রথমে θ কোণ উৎপন্ন করিয়া OP অবস্থানে আসিল। তৎপরে উহা একই দিকে আরও এক সমকোণ ঘুরিয়া OP হইতে OP′ অবস্থানে আসিল [চিত্র 6(i)], ইহাতে $\angle XOP'=90^\circ+\theta$ হইল। OP ও OP′ সর্ব অবস্থানে সমান ও ধনাত্মক।

চিত্র 6

P ও P′ হইতে XOX′এর উপর যথাক্রমে PN ও P′N′ লম্ব টানা হইল।

এক্ষণে, প্রত্যেক চিত্রে POP′ সমকোণ হওয়ায় $\angle PON$ ও $\angle P'ON'$ এর সমষ্টি এক সমকোণ, সুতরাং $\angle PON=90^\circ-\angle P'ON'=\angle OP'N'$. অতএব, PON ও P′ON′ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। $\therefore$ ON ও P′N′ অনুরূপ বাহুদ্বয়ের এবং PN ও ON′ অনুরূপ বাহুদ্বয়ের সাংখ্যমান সমান।

আবার, প্রত্যেক চিত্রে ON ও P′N′এর একই চিহ্ন (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) এবং PN ও ON′ পরস্পর বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট, অর্থাৎ $P'N'=+ON$ এবং $ON'=-PN$.

অতএব, $\sin(90^\circ+\theta)=\sin\angle XOP'=\frac{P'N'}{OP'}=\frac{ON}{OP}=\cos\theta.$

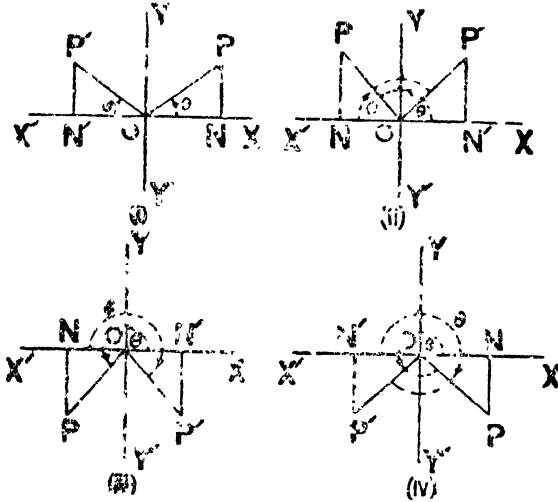
$$\cos(90^\circ+\theta)=\cos\angle XOP'=\frac{ON'}{OP'}=\frac{-PN}{OP}=-\sin\theta,$$

$$\tan(90^\circ+\theta)=\tan\angle XOP'=\frac{P'N'}{ON'}=\frac{ON}{-PN}=-\cot\theta.$$

আবার, উহাদের অন্যোন্যকগুলিও সমান,

$$\therefore\quad \operatorname{cosec}(90^\circ+\theta)=\sec\theta,$$
$$\sec(90^\circ+\theta)=-\operatorname{cosec}\theta.$$
$$\cot(90^\circ+\theta)=-\tan\theta.$$

8. θ-র যে কোন মানে $(180^\circ-\theta)$ কোণের কোণানুপাত।

মনে কর, OP রেখা OX অবস্থান হইতে ধনাত্মক দিকে ঘুরিয়া প্রথমে θ কোণ উৎপন্ন করিয়া OP অবস্থানে আসিল। আবার মনে কর, OP রেখা

চিত্র 7

OX অবস্থান হইতে ধনাত্মক দিকে ঘুরিয়া OX' অবস্থানে আসিয়া (অর্থাৎ 2 সমকোণ বা 180° ঘুরিয়া) পুনরায় OX' হইতে বিপরীত দিকে θ কোণ ঘুরিয়া OP' অবস্থানে আসিল। ইহাতে $\angle XOP$ এবং $\angle X'OP'$ পরিমাণে সমান কিন্তু পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত অর্থাৎ যথাক্রমে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক হইল। অতএব, $\angle XOP'=180^\circ-\theta$ হইল। OP'কে OPএর সমান করিয়া P ও P' হইতে XOX'এর উপর যথাক্রমে PN ও P'N' লম্বপাত কর।

এক্ষণে, প্রত্যেক চিত্রে $\angle PON = \angle P'ON'$ এবং $OP = OP'$, সুতরাং PON ও P'ON' সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ প্রত্যেক চিত্রে ON ও ON' সমান কিন্তু পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত এবং PN ও P'N' সমান ও একই চিহ্নযুক্ত।

∴ $ON' = -ON$ এবং $P'N' = +PN$ হইবে।

অতএব, $\sin(180° - \theta) = \sin \angle XOP' = \frac{P'N'}{OP'} = \frac{PN}{OP} = \sin\theta,$

$$\cos(180° - \theta) = \cos \angle XOP' = \frac{ON'}{OP'} = \frac{-ON}{OP} = -\cos\theta,$$

$$\tan(180° - \theta) = \tan \angle XOP' = \frac{P'N'}{ON'} = \frac{PN}{-ON} = -\tan\theta.$$

আবার, ∵ উহাদের অন্যোন্যকগুলিও সমান;

$$\therefore \quad \text{cosec}(180° - \theta) = \text{cosec}\,\theta$$

$$\sec(180° - \theta) = -\sec\theta$$

$$\cot(180° - \theta) = -\cot\theta.$$

[**দ্রষ্টব্য :** $180° - \theta$ ও θ কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক (supplementary), সুতরাং এখানে দুইটি সম্পূরক কোণের কোণানুপাতগুলির সম্বন্ধ পাওয়া গেল এই যে, **সম্পূরক কোণদ্বয়ের** (i) সাইন (sine) দুইটি সমান এবং একই চিহ্নযুক্ত, (ii) উহাদের কোসাইন (cosine) দুইটি সমান কিন্তু পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত এবং (iii) উহাদের ট্যানজেণ্ট (tangent) দুইটি সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত।]

উদাহরণ। $\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\tfrac{1}{2}.$$

$$\tan\frac{5\pi}{6} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\tan 30° = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

9. θ-র যে-কোন মানে $(180° + \theta)$ **কোণের কোণানুপাত।**

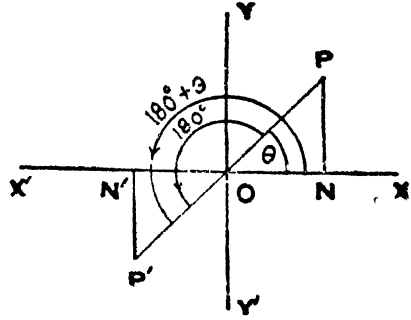
মনে কর, OP সরলরেখা OX অবস্থান হইতে ধনাত্মক দিকে ঘুরিয়া প্রথমে θ কোণ উৎপন্ন করিয়া OP অবস্থানে আসিল এবং মনে কর, উহা একই দিকে আরও 180° ঘুরিয়া OP' অবস্থানে (অর্থাৎ OP-র সহিত এক

সরলরেখায় OP-র বিপরীত দিকে) আসিল। ইহাতে $\angle XOP' = 180° + \theta$ হইল। OP'কে OPর সমান করিয়া P ও P' হইতে XX'এর উপর PN ও P'N' লম্ব টান।

চিত্র 8

এক্ষণে, $\because$ OP = OP' এবং $\angle PON$ = বিপ্রতীপ $\angle P'ON'$,

$\therefore$ PON ও P'ON' সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমান।

$\therefore$ $P'N' = -PN$, $ON' = -ON$ এবং $OP' = OP$.

অতএব,

$$\sin(180° + \theta) = \sin \angle XOP = \frac{P'N'}{OP'} = \frac{-PN}{OP} = -\sin\theta$$

$$\cos(180° + \theta) = \cos \angle XOP' = \frac{ON'}{OP'} = \frac{-ON}{OP} = -\cos\theta$$

$$\tan(180° + \theta) = \tan \angle XOP' = \frac{P'N'}{ON'} = \frac{-PN}{-ON} = \frac{PN}{ON} = \tan\theta.$$

আবার, উহাদের অন্যোন্যকগুলিও সমান,

$$\therefore \operatorname{cosec}(180° + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$$
$$\sec(180° + \theta) = -\sec\theta$$
$$\cot(180° + \theta) = \cot\theta.$$

অন্যরূপে প্রমাণ: পূর্বে $90° + \theta$ কোণের যে কোণানুপাত নির্ণয় করা হইয়াছে তাহা হইতেই $180° + \theta$ কোণের কোণানুপাতগুলি নির্ণয় করা যায়।

$$\sin(180° + \theta) = \sin(90° + \overline{90° + \theta}) = \cos(90° + \theta) = -\sin\theta,$$

$$\cos(180° + \theta) = \cos(90° + \overline{90° + \theta}) = -\sin(90° + \theta) = -\cos\theta,$$

এবং $\tan(180° + \theta) = \tan(90° + \overline{90° + \theta}) = -\cot(90° + \theta) = \tan\theta,$

ইত্যাদি।

[**দ্রষ্টব্য:** এখানে কেবল একটি চিত্র দেওয়া হইয়াছে, উহাতে OP প্রথম পাদে অবস্থিত। OP অন্যান্য পাদে থাকিলে যে তিনটি চিত্র হইবে তাহা অঙ্কন করা সহজ।]

উদাহরণ। $\sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

10. $(270^\circ + \theta)$ কোণের কোণানুপাত।

পূর্বের ন্যায় চিত্র আঁকিয়া জ্যামিতির সাহায্যে এক্ষেত্রেও কোণানুপাতগুলি নির্ণয় করা যায়। নিম্নে বিকল্প প্রণালী দেখান হইতেছে :

$$\sin(270^\circ + \theta) = \sin(180^\circ + \overline{90^\circ + \theta}) = -\sin(90^\circ + \theta) = -\cos\theta,$$

$$\cos(270^\circ + \theta) = \cos(180^\circ + \overline{90^\circ + \theta}) = -\cos(90^\circ + \theta)$$
$$= -(-\sin\theta) = \sin\theta,$$

$$\tan(270^\circ + \theta) = \frac{\sin(270^\circ + \theta)}{\cos(270^\circ + \theta)} = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\theta.$$

উহাদের অন্যোন্যক হইতে পাই $\operatorname{cosec}(270^\circ + \theta) = -\sec\theta$.

$$\sec(270^\circ + \theta) = \operatorname{cosec}\theta,$$
$$\cot(270^\circ + \theta) = -\tan\theta.$$

11. $(360^\circ \pm \theta)$ ও $(n.360^\circ \pm \theta)$ কোণগুলির কোণানুপাত।

পূর্বে বলা হইয়াছে যে ত্রিকোণমিতিক কোণ উৎপাদনের সময় ঘূর্ণায়মান রেখা OP (radius vector) যে-কোন কোণ θ উৎপন্ন করিয়া প্রথমে যে অবস্থানে (OP) আসিল. উহা যদি তৎপরে আরও এক বা একাধিক সম্পূর্ণ পাক (অর্থাৎ যদি 360° বা তাহার কোন গুণিতক $n.360^\circ$ কোণ) ঘোরে তবে উহা পুনরায় তাহার পূর্ব অবস্থানে (OPর সহিত) মিলিত হইবে। অতএব, ঐরূপ কোণদ্বয়ের কোণানুপাতগুলি সমান ও সমচিহ্নযুক্ত হইবে।

অতএব, $\sin(360^\circ + \theta) = \sin\theta$

$\cos(360^\circ + \theta) = \cos\theta$

$\tan(360^\circ + \theta) = \tan\theta$.

আবার, $\sin(360^\circ - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(360^\circ - \theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(360^\circ - \theta) = \tan(-\theta) = -\tan\theta$. ইত্যাদি।

সাধারণ সূত্রাকারে বলা যায় যে, n যদি যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে $n.360^\circ \pm \theta$ (বা $2\pi n \pm \theta$) কোণের কোণানুপাতগুলি $\pm\theta$ কোণের কোণানুপাতগুলির সমান হইবে।

12. **নিয়ম।** এ পর্যন্ত যে সিদ্ধান্তগুলি পাওয়া গিয়াছে সেগুলি **সহজে মনে রাখিবার জন্য** একটি নিয়ম করা যাইতে পারে। যথা—

(*a*) θ **যদি 90 ডিগ্রীর যে-কোন জোড় গুণিতকের** সহিত + বা − চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত থাকে, তবে কোণানুপাতগুলির আকার **পরিবর্তিত হয় না** (অর্থাৎ সাইনটি সাইন, কসটি কস, ইত্যাদি থাকিবে)। উহাদের চিহ্ন (sign) নির্ণয়ের জন্য θকে সূক্ষ্মকোণ ধরিয়া সংযুক্ত কোণটি কোন্ পাদে (quadrant) অবস্থিত তাহা স্থির করিয়া "All, sin, tan, cos" নিয়মানুসারে চিহ্নগুলি নির্ণয় করিবে।

(*b*) θ **যদি 90 ডিগ্রীর যে কোন বিজোড় গুণিতকের** সহিত + বা − চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত থাকে, তবে কোণানুপাতগুলি **পরিবর্তিত হয়** (অর্থাৎ সাইনটি কোসাইন, কোসাইনটি সাইন, ইত্যাদি হইবে)। তাহাদের চিহ্নগুলি নিয়ম-(*a*)র মত নির্ণয় করিবে।

উদাহরণমালা 1

উদা. 1. Find the values of (i) sin 480°, (ii) cos 405° (iii) tan (−1485°) and (iv) cot 1410°.

(i) এখানে $480° = 5 \times 90° + 30°$.

$\because$ এখানে 90°-র গুণিতকটি (5) বিজোড়, $\therefore$ কোণানুপাত পরিবর্তিত হইবে অর্থাৎ sin স্থানে cos হইবে। আবার, 480° কোণটি দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত বলিয়া sin-এর চিহ্ন ধনাত্মক হইবে।

$$\therefore \quad \sin 480° = \sin (5 \times 90° + 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(ii) $405° = 5 \times 90° - 45°$, এখানে 90°-র গুণিতক বিজোড় হওয়ায় কোণানুপাত পরিবর্তিত হইয়া cos-এর স্থানে sin হইবে। আর 405° কোণটি প্রথম পাদে অবস্থিত বলিয়া উহার cosটি ধনাত্মক হইবে।

$$\therefore \quad \cos 405° = \cos (5 \times 90° - 45°) = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(iii) $\because \quad \tan(-\theta) = -\tan\theta,$

$\therefore \quad \tan(-1485°) = -\tan 1485°$

এক্ষণে, $1485° = 16.90° + 45°$, এখানে 90°র গুণিতক 16 জোড় সংখ্যা হওয়ায় কোণানুপাত পরিবর্তিত হইবে না; আর, 1485° কোণটি প্রথম পাদে অবস্থিত বলিয়া উহার tan ধনাত্মক হইবে।

$$\therefore \quad \tan(-1485°) = -\tan(1485°) = -\tan(16.90° + 45°)$$

$$= -\tan 45° = -1.$$

(iv) $1410^\circ = 16.90^\circ - 30^\circ$, এখানে 90°-র গুণিতক জোড় বলিয়া কোণানুপাত পরিবর্তিত হইবে না এবং 1410° কোণটি চতুর্থ পাদে অবস্থিত বলিয়া উহার cot ঋণাত্মক হইবে।

$\therefore \quad \cot 1410^\circ = \cot (16.90^\circ - 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}.$

উদা. 2. Find the sine, cosine and tangent of the following angles: (*a*) 180°, (*b*) 270°, (*c*) 2π.

(*a*) $\because \quad \sin (180^\circ - \theta) = \sin \theta,$

$\therefore \quad \sin (180^\circ - 0^\circ) = \sin 0^\circ$ [$\theta = 0^\circ$ ধরিয়া]

$\therefore \quad \sin 180^\circ = \sin 0^\circ = 0.$

আবার, $\because \quad \cos (180^\circ - \theta) = -\cos \theta,$

$\therefore \quad \cos (180^\circ - 0^\circ) = -\cos 0^\circ$ [$\theta = 0^\circ$ ধরিয়া]

$\therefore \quad \cos 180^\circ = -\cos 0^\circ = -1.$

অতএব, $\tan 180^\circ = \dfrac{\sin 180^\circ}{\cos 180^\circ} = \dfrac{0}{-1} = 0.$

(*b*) $\because \quad \sin (270^\circ + \theta) = -\cos \theta.$

$\therefore \quad \sin 270^\circ = -\cos 0^\circ$ [$\theta = 0^\circ$ ধরিয়া]

$= -1.$

অনুরূপে $\cos 270^\circ = \cos (270^\circ + 0^\circ) = \sin 0^\circ = 0,$

এবং $\tan 270^\circ = \dfrac{\sin 270^\circ}{\cos 270^\circ} = \dfrac{-1}{0} = -\infty.$

(*c*) $2\pi = 2 \times 180^\circ = 360^\circ,$

$\because \quad \sin (360^\circ + \theta) = \sin \theta$

$\therefore \quad \sin (360^\circ + 0^\circ) = \sin 0^\circ$ [$\theta = 0^\circ$ ধরিয়া]

$\therefore \quad \sin 2\pi = \sin 360^\circ = \sin 0^\circ = 0.$

অনুরূপে $\quad \cos 360^\circ = \cos 0^\circ = 1.$

$\therefore \quad \tan 360^\circ = \dfrac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \dfrac{0}{1} = 0.$

উদা. 3. Find the smallest positive coterminal angle and the value of $\cot \dfrac{17\pi}{4}$.

[$\cot \dfrac{17\pi}{4}$-এর মান এবং উহার সহিত একই সীমারেখাবিশিষ্ট (coterminal) ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ নির্ণয় কর।]

$$\frac{17\pi}{4}=4\pi+\frac{\pi}{4}=2\times360^\circ+45^\circ \quad [\because \quad 2\pi=360^\circ]$$

$\therefore$ The coterminal angle $=45^\circ$ বা $\frac{\pi}{4}$.

আবার, $\cot\frac{17\pi}{4}=\cot(2\times360^\circ+45^\circ)=\cot45^\circ=1.$

উদা. 4. Find the value of

$$3\cos270^\circ\sec180^\circ+2\operatorname{cosec}90^\circ-\cos360^\circ.$$

প্রদত্ত রাশি $=3\times\sin0^\circ\times\frac{1}{-\cos0^\circ}+2\times\operatorname{cosec}90^\circ-\cos0^\circ$

$$=3\times0\times\frac{1}{-1}+2\times1-1=0+2-1=1.$$

উদা. 5. Find all the angles numerically (সাংখ্যমানে) less than 360° which satisfy the equation $\sin A=-\frac{1}{2}$.

$\because \quad \frac{1}{2}=\sin30^\circ,$

$\therefore \quad -\frac{1}{2}=-\sin30^\circ;$

অতএব, 360° অপেক্ষা ছোট যে সকল কোণের sine $=-\sin30^\circ$, সেই কোণগুলিই Aএর মান হইবে।

এক্ষণে, $\sin(-30^\circ)=-\sin30^\circ\cdots\cdots(1)$

আবার, $\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin30^\circ,$

বা, $\sin150^\circ=\sin30^\circ$

$\therefore \quad \sin(-150^\circ)=-\sin150^\circ=-\sin30^\circ\cdots\cdots(2)$

আবার, $\sin(180^\circ+30^\circ)=-\sin30^\circ,$

বা, $\sin210^\circ=-\sin30^\circ\cdots\cdots(3).$

আবার, $\sin(360^\circ-30^\circ)=-\sin30^\circ,$

বা, $\sin330^\circ=-\sin30^\circ\cdots\cdots(4)$

$\therefore \quad A=-30^\circ, -150^\circ, 210^\circ$ ও 330°.

উদা. 6. Prove that

$$\sin420^\circ\cos390^\circ+\cos(-300^\circ)\sin(-330^\circ)=1.$$

বামপক্ষ $=\sin(360^\circ+60^\circ)\cos(360^\circ+30^\circ)$

$+\cos(-360^\circ+60^\circ)\sin(-360^\circ+30^\circ)$

$=\sin60^\circ\cos30^\circ+\cos60^\circ\sin30^\circ$

$=\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{\sqrt3}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1.$

উদা. 7. Express the following in terms of the ratios of a positive angle less than 45°.

[45° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক কোণানুপাতে প্রকাশ কর :]

(i) $\tan(-1385°)$ and (ii) $\cos 294°$.

একক্ষেত্রে, (i) $\tan(-1385°)=\tan(-4\times360°+55°)=\tan 55°$

$$=\tan(90°-35°)=\cot 35°,$$

(ii) $\cos 294°=\cos(3\times90°+24°)=\sin 24°$.

উদা. 8. Find the simplest value of $\dfrac{\cos 255°+\tan 285°}{\cot 165°-\sin 375°}$

$$\frac{\cos 255°+\tan 285°}{\cot 165°-\sin 375°}=\frac{\cos(270°-15°)+\tan(270°+15°)}{\cot(180°-15°)-\sin(360°+15°)}$$

$$=\frac{-\sin 15°-\cot 15°}{-\cot 15°-\sin 15°}=1.$$

উদা. 9. If $\tan\theta=-\frac{12}{5}$, find $\sin\theta$ and $\cos\theta$.

এখানে $\tan\theta$-র মান ঋণাত্মক হওয়ায় θ-র সীমারেখা দ্বিতীয় পাদে অথবা চতুর্থ পাদে অবস্থিত। [চিত্র আঁকিয়া লও]

দ্বিতীয় পাদে ভূমি ON ঋণাত্মক এবং লম্ব PN ধনাত্মক,

$\therefore$ ON $=-5$ এবং PN $=12$.

$\therefore$ $OP=\sqrt{PN^2+ON^2}=\sqrt{12^2+(-5)^2}=\sqrt{169}=13.$

অতএব, $\sin\theta=\frac{PN}{OP}=\frac{12}{13}$ এবং $\cos\theta=\frac{ON}{OP}=-\frac{5}{13}$

আবার, চতুর্থ পাদে ভূমি ON′ ধনাত্মক এবং লম্ব P′N′ ঋণাত্মক।

$\therefore$ ON′ $=5$ এবং P′N′ $=-12$ এবং লম্ব OP′ $=$ OP $=13$.

$\therefore$ $\sin\theta=\frac{P'N'}{OP}=-\frac{12}{13}$ এবং $\cos\theta=\frac{ON'}{OP'}=\frac{5}{13}$.

অতএব, $\sin\theta=\pm\frac{12}{13}$ এবং $\cos\theta=\pm\frac{5}{13}$.

উদা. 10. Prove that $\cos^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{3\pi}{4}+\sin^2\frac{5\pi}{4}+\sin^2\frac{7\pi}{4}=2.$

বামপক্ষ $=\cos^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2+3\sin^2\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2.$$

উদা. 11. If $\tan\theta=\frac{5}{12}$ and $\cos\theta$ is negative, find the value of $\dfrac{\sin\theta+\cos(-\theta)}{\sec(-\theta)+\tan\theta}$.

$\because\ \tan\theta=\frac{5}{12}$, $\therefore\ \sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\frac{25}{144}=\frac{169}{144}$,

$\therefore\ \sec\theta=\pm\frac{13}{12}$. এখানে $\because\ \cos\theta$ ঋণাত্মক (স্বীকার),

$\therefore\ \sec\theta=-\frac{13}{12}$, $\therefore\ \cos\theta=-\frac{12}{13}$.

অতএব $\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=\frac{5}{12}\times-\frac{12}{13}=-\frac{5}{13}$.

এক্ষণে, প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sec\theta+\tan\theta}=\dfrac{-\frac{5}{13}-\frac{12}{13}}{-\frac{13}{12}+\frac{5}{12}}=\frac{51}{26}$.

উদা. 12. Solve for θ, giving all the possible values, when $0^\circ<\theta<360^\circ$: $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2$. [C. U. 1936]

[$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2$ সমীকরণটি সমাধান করিয়া θ-র সম্ভাব্য মানগুলি নির্ণয় কর ; এখানে $0^\circ<\theta<360^\circ$.]

$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2$,

বা, $\cos\theta-2=-\sqrt{3}\sin\theta$,

বা, $\cos^2\theta-4\cos\theta+4=3\sin^2\theta=3(1-\cos^2\theta)$

বা, $4\cos^2\theta-4\cos\theta+1=0$,

বা, $(2\cos\theta-1)^2=0$, বা, $2\cos\theta-1=0$,

বা, $2\cos\theta=1$, $\therefore\ \cos\theta=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ$, $\therefore\ \theta=60^\circ$.

এখানে $\cos\theta$ ধনাত্মক বলিয়া কোণটি প্রথম অথবা চতুর্থ পাদে থাকিতে পারে। θ ঋণাত্মক সূক্ষ্মকোণ নহে বলিয়া চতুর্থ পাদে থাকিবে না। চতুর্থ পাদে $\cos\theta=\cos(360^\circ-\theta)=\cos(360^\circ-60^\circ)=\cos 300^\circ$, সুতরাং $\theta=300^\circ$ হইতে পারে, কিন্তু এই মানে প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না। অতএব, এখানে θ-র একমাত্র মান 60° হইল। 300° এখানে একটি অবাস্তব বীজ।

উদা. 13. Find the value of θ, lying between 0° and 360° satisfying the equation $3(\sec^2\theta+\tan^2\theta)=5$.

[0° ও 360°-র মধ্যবর্তী θ-র কোন্ মানগুলি দ্বারা

$3(\sec^2\theta+\tan^2\theta)=5$ সমীকরণ সিদ্ধ হয় ?]

$3(\sec^2\theta+\tan^2\theta)=5,$

বা, $3(1+\tan^2\theta+\tan^2\theta)=5,$ বা, $3+6\tan^2\theta=5,$

বা, $6\tan^2\theta=2,$ বা, $\tan^2\theta=\frac{1}{3},$ $\therefore$ $\tan\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$

এক্ষণে, যদি $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে $\tan\theta$ ধনাত্মক বলিয়া θ প্রথম অথবা তৃতীয় পাদে অবস্থিত হইবে।

অতএব, $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan 30^\circ$ বা, $\tan(180^\circ+30^\circ)$

$\therefore$ $\theta=30^\circ$ বা, $210^\circ.$

আবার, যদি $\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে $\tan\theta$ ঋণাত্মক বলিয়া θ দ্বিতীয় অথবা চতুর্থ পাদে অবস্থিত হইবে।

অতএব, $\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\tan 30^\circ=\tan(180^\circ-30^\circ),$

অথবা $=\tan(360^\circ-30^\circ)$

$\therefore$ $\theta=180^\circ-30^\circ,$ অথবা, $360^\circ-30^\circ,$

$\therefore$ $\theta=150^\circ$ বা, $330^\circ.$

$\therefore$ θ-র নির্ণেয় মান $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$ হইতে পারে।

উদা. 14. Evaluate (মান নির্ণয় কর) $\sin\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}$, where n is any integer.

এখানে n কোন জোড় বা বিজোড় অখণ্ড সংখ্যা।

(1) যদি n জোড় অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে মনে কর, $n=2p$ (p যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা).

$$\therefore \sin\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}=\sin\left\{2p\pi+(-1)^{2p}\frac{\pi}{6}\right\}$$

$$=\sin\left(2p\pi+\frac{\pi}{6}\right) \quad [\ 2p \text{ জোড় বলিয়া } (-1)^{2p}=1\ ]$$

$$=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

(ii) যদি n বিজোড় অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে মনে কর $n=2p+1$ (p যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা)।

$$\therefore \quad \sin\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}=\sin\left\{(2p+1)\pi+(-1)^{2p+1}\frac{\pi}{6}\right\}$$

$$=\sin\left\{(2p+1)\pi-\frac{\pi}{6}\right\}$$

$$=\sin\left\{2p\pi+\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right\}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

[**দ্রষ্টব্য :** $2p+1$ বিজোড় বলিয়া এখানে $(-1)^{2p+1}=-1$]

উদা. 15. If ABCD is a cyclic quadrilateral, show that $\tan A+\tan B+\tan C+\tan D=0$.

$\because$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি = দুই সমকোণ বা $180°$,

$\therefore \quad A+C=180°$, বা, $A=180°-C$,

এবং $B+D=180°$, বা, $B=180°-D$.

এক্ষণে, $\tan A+\tan B+\tan C+\tan D$

$=\tan(180°-C)+\tan(180°-D)+\tan C+\tan D$

$=-\tan C-\tan D+\tan C+\tan D=0.$

Exercise 1

Find the smallest positive co-terminal angle and the value of the expression :—

1. $\cos 420°$ 2. $\tan(-315°)$ 3. $\sec\frac{25\pi}{6}$

[নিম্নলিখিতগুলির ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক সমসীমারেখাবিশিষ্ট কোণ ও মান নির্ণয় কর :— 1. $\cos 420°$ 2. $\tan(-315°)$ 3. $\sec\frac{25\pi}{6}$.]

Find the value of :—

4. $\cot 585°$ 5. $\sin(-1215°)$ 6. $\cot\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

7. $\sin 960°$ 8. $\tan 675°$ 9. $\sec(-1575°)$

10. $\operatorname{cosec}(-1470°)$ 11. $\tan 1200°$

12. $\sec\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ 13. $\sin(-1125°)+\cos(-1125°)$

14. $\dfrac{\cot 315^\circ - \cos(-240^\circ)}{\cot 990^\circ + \cos\left(\frac{16\pi}{3}\right)}$

Prove that :—

15. $\cos(A - 270^\circ) = -\sin A.$

16. $\sin(780^\circ)\cos(390^\circ) - \sin(330^\circ)\cos(-300^\circ) = 1.$

17. $\cos(n\pi + \theta) = (-1)^n \cos\theta.$

18. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\sin\theta\cos\theta} = 1.$

19. If $\sec\frac{2\pi}{3} = -2$, find $\sin\frac{2\pi}{3}$.

20. If $\cot\theta = -\frac{8}{15}$, find $\sin\theta$.

21. If n be an even integer, evaluate $\sin\theta + \sin(\pi + \theta) + \sin(2\pi + \theta) + \cdots$ to n terms.

[n জোড় অখণ্ড সংখ্যা হইলে $\sin\theta + \sin(\pi + \theta) + \sin(2\pi + \theta) + \cdots$ শ্রেণীর n পদ পর্যন্ত মান নির্ণয় কর।]

Express in terms of ratios of positive angles less than 45° :

[নিম্নলিখিতগুলিকে 45° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক কোণানুপাতে প্রকাশ কর :—]

22. $\tan 142^\circ$ 23. $\cos(-930^\circ)$ 24. $\sin\frac{17\pi}{9}$.

25. Find all the angles numerically less than 360° which satisfy the equation $\tan\theta = -\sqrt{3}$.

[$\tan\theta = -\sqrt{3}$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে এরূপ সাংখ্যমানে 360° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর θ-র মানগুলি নির্ণয় কর।]

26. What values between 0° and 360° may θ have if $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

[যদি $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ হয়, তবে 0° ও 360°-র মধ্যে θ-র কি কি মান হইতে পারে ?]

Solve for θ, giving all possible values, when $0°<\theta<360°$:—

[$0°<\theta<360°$ হইলে নিম্নের সমীকরণগুলি সমাধান করিয়া θ-র সম্ভাব্য মানগুলি নির্ণয় কর :—]

27. $\cot\theta+\tan\theta=2\sec\theta$. **28.** $\sec\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

29. $2\sin^2\theta+\cos\theta=2$. **30.** $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2$.

31. $2(\sec^2\theta+\sin^2\theta)=5$.

32. If n is any integer, find the values of :—

(i) $\cos\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}\right\}$ (ii) $\sin\left\{\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}$

(iii) $\tan\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}$.

33. Find the values of A when,

(i) $\sin A=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ and A lies between 180° and 270°.

(ii) $\tan A=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ and A lies between 270° and 360°.

(iii) $\sec A=\sqrt{2}$ and $360°<A<450°$.

34. An angle θ lies between 270° and 360°, and $\sin\theta=-\frac{1}{2}$, find $\sec\theta$.

[θ কোণটি 270° ও 360°এর মধ্যবর্তী এবং $\sin\theta=-\frac{1}{2}$ হইলে $\sec\theta$ নির্ণয় কর।]

35. If $\cot\theta=\frac{3}{4}$ and $\sin\theta$ is negative, find the value of

$$\frac{\cot(-\theta)+\operatorname{cosec}\theta}{\cos\theta+\sin(-\theta)}.$$

36. Simplify and evaluate, when $\theta=240°$

(i) $$\frac{\sin(\pi-\theta)}{\tan(\pi+\theta)}\cdot\frac{\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}\cdot\frac{\cos(2\pi-\theta)}{\sin(-\theta)}$$

(ii) $$\frac{\sin(-\theta)}{\sin(\pi+\theta)}-\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cot\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}.$$

37. In $\triangle ABC$, show that $\sin(B+C)+\sin(C+A)+\sin(A+B) = \sin A+\sin B+\sin C.$

38. ABCD is a quadrilateral ; prove that $\tan\frac{1}{2}(A+B)+\tan\frac{1}{2}(C+D)=0.$

39. If ABC be a triangle, find the value of
$$\frac{\sin(A+B)+\sin(B+C)+\sin(C+A)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-C\right)+\sin(2\pi-A)+\sin(\pi+B)}.$$

Compound Angles

(Addition and Subtraction Formulas)

13. **মিশ্র কোণ (Compound Angle)**

দুই বা ততোধিক কোণের সমষ্টি বা অন্তরফলকে একটি মিশ্র কোণ (Compound Angle) বলে।

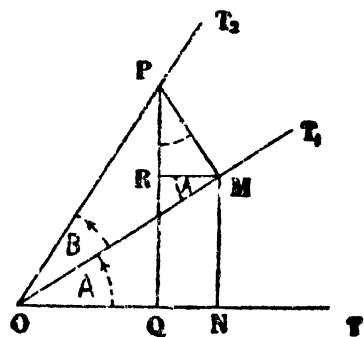
যথা, $A+B$ কোণ, $A-B$ কোণ, $A+B+C$ কোণ ইত্যাদি। মিশ্র কোণ সম্বন্ধে উপপাদ্যগুলি দেখ।

14. উপপাদ্য 1. A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $A+B<90°$ হইলে প্রমাণ কর যে,

(1) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

এবং (2) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$

(1) মনে কর, ঘূর্ণায়মান OT সরলরেখা প্রথম অবস্থান OT হইতে ধনাত্মক দিকে ঘুরিয়া A কোণের সমান TOT_1 কোণ উৎপন্ন করিল। পরে উহা একই দিকে আরও ঘুরিয়া B কোণের সমান T_1OT_2 কোণ উৎপন্ন করিল।

অতএব, $\angle TOT_2=A+B$ হইল।

চিত্র নং 9

অঙ্কন : ঘূর্ণায়মান রেখাটির শেষ অবস্থান OT_2-এর উপর যে-কোন বিন্দু P লও এবং P হইতে OT ও OT_1 এর উপর যথাক্রমে PQ ও PM লম্ব টান। আবার M বিন্দু হইতে OT ও PQ এর উপর যথাক্রমে MN ও MR লম্ব টান।

প্রমাণ : ∵ MR ও TQ, একই সরলরেখা PQ-এর উপর লম্ব,

$\therefore$ MR ∥ TO, $\therefore$ $\angle OMR$ = একান্তর $\angle MON = A$.

আবার, $\angle OMR + \angle PMR = 1$ সমকোণ $= \angle PMR + \angle RPM$.

$\therefore \quad \angle MPR = \angle OMR = A$.

এক্ষণে সমকোণী ত্রিভুজ POQ হইতে পাই, $\sin (A+B) = \sin \angle POQ$

$$= \frac{PQ}{OP} = \frac{RQ+PR}{OP} = \frac{MN+PR}{OP}$$ [∵ MNQR আয়তের RQ = MN]

$$= \frac{MN}{OP} + \frac{PR}{OP} = \frac{MN}{OM} \cdot \frac{OM}{OP} + \frac{PR}{PM} \cdot \frac{PM}{OP}$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

(2) [প্রথমে (1)এর অঙ্কন পর্যন্ত লিখিয়া নিম্নের প্রমাণ লিখিবে ।]

প্রমাণ : RM ও QT একই সরলরেখা PQএর উপর লম্ব বলিয়া RM ∥ QN বা OT.

$\therefore \quad \angle OMR$ = একান্তর $\angle MON = A$,

আবার, $\angle OMR + \angle PMR = 1$ সমকোণ $= \angle PMR + \angle RPM$.

$\therefore \quad \angle RPM = \angle OMR = A$.

RQ ও MN একই সরলরেখা OTর উপর লম্ব বলিয়া RQ ∥ MN.

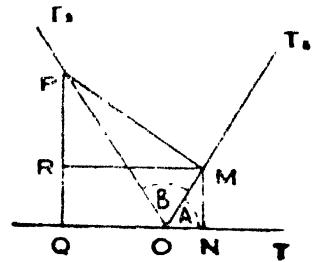
এক্ষণে $\cos (A+B) = \cos \angle POQ = \frac{OQ}{OP} = \frac{ON-QN}{OP}$

$$= \frac{ON-MR}{OP}$$ [∵ MNQR আয়তের MR = QN]

$$= \frac{ON}{OP} - \frac{MR}{OP} = \frac{ON}{OM} \cdot \frac{OM}{OP} - \frac{MR}{PM} \cdot \frac{PM}{OP}$$

$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

দ্রষ্টব্য : যদি উপপাদ্যটিতে A ও B দুইটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হয়, কিন্তু উভয়ের সমষ্টি 90° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর না হয়, তবে চিত্রটি কিরূপ হইবে তাহা চিত্র 10এ দেখান হইল।

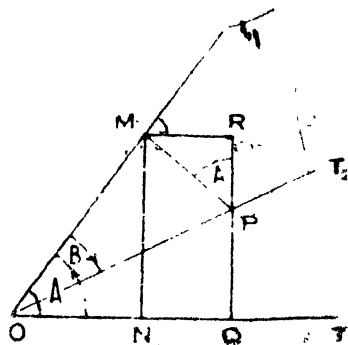
এই দুইস্থলে A ও B কোণদ্বয়কে সূক্ষ্মকোণ ধরা হইয়াছে। A ও B যে-কোন কোণ হইলেও ঠিকমত চিত্র আঁকিলে উপরের প্রমাণ সিদ্ধ হইবে. (কেবল সংশ্লিষ্ট রেখাগুলির ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্নগুলি ঠিকমত লইতে হইবে)।

চিত্র নং 10

15. **উপপাদ্য 2.** A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $A > B$ হইলে প্রমাণ কর যে,

(1) $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

এবং (2) $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.

(1) মনে কর, ঘূর্ণায়মান OT সরলরেখা প্রথম অবস্থান OT হইতে ধনাত্মক দিকে ঘুরিয়া A কোণের সমান TOT_1 কোণ উৎপন্ন করিল এবং তৎপরে বিপরীত দিকে ঘুরিয়া B কোণের সমান T_1OT_2 কোণ উৎপন্ন করিল। অতএব, $\angle TOT_2 = A-B$ হইল।

অঙ্কন : ঘূর্ণায়মান রেখার শেষ অবস্থান OT_2 রেখার উপর যে-কোন বিন্দু P লইয়া উহা হইতে OT ও OT_1-এর উপর যথাক্রমে PQ ও PM লম্ব টান। আবার, M বিন্দু হইতে OT ও বর্ধিত QP-র উপর যথাক্রমে MN ও MR লম্ব টান।

প্রমাণ : $\because$ OQ এবং MR একই সরলরেখা RQ-এর উপর লম্ব,

$\therefore$ MR ∥ OQ,

$\therefore$ $\angle T_1MR =$ অনুরূপ $\angle MON = A$.

আবার, $\angle MPR + \angle PMR = 1$ সমকোণ $= \angle PMR + \angle T_1MR$,

$\therefore$ $\angle MPR = \angle T_1MR = A$.

এক্ষণে, সমকোণী ত্রিভুজ POQ হইতে পাই

$$\sin(A-B) = \sin \angle POQ = \frac{PQ}{OP} = \frac{RQ-PR}{OP}$$

$$= \frac{MN-PR}{OP} \quad [\because RQ = MN]$$

$$= \frac{MN}{OP} - \frac{PR}{OP} = \frac{MN}{OM} \cdot \frac{OM}{OP} - \frac{PR}{PM} \cdot \frac{PM}{OP}$$

$$= \sin A \cos B - \cos A \sin B.$$

(2) [প্রথমে (1)এর অঙ্কন পর্যন্ত লিখিয়া নিম্নের প্রমাণ লিখিবে।]

প্রমাণ : FQএর উপর MR ও OQ লম্ব বলিয়া MR ∥ OQ.

$\therefore \quad \angle T_1MR =$ অনুরূপ $\angle MON = A$. আবার, $\angle PMR + \angle MPR = 1$ সমকোণ $= \angle PMR + \angle T_1MR$, $\quad \therefore \quad \angle MPR = \angle T_1MR = A$.
MN ও RQ একই OT রেখার উপর লম্ব বলিয়া MP ‖ RQ.

এক্ষণে $\cos(A-B) = \cos \angle POQ = \frac{OQ}{OP} = \frac{ON+NQ}{OP}$

$= \frac{ON+MR}{OP}$ [$\because$ MNQR আয়তের $NQ = MR$] $= \frac{ON}{OP} + \frac{MR}{OP}$

$= \frac{ON}{OM} \cdot \frac{OM}{OP} + \frac{MR}{PM} \cdot \frac{PM}{OP} = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.

[**দ্রষ্টব্য :** উপরের উপপাদ্যে A ও B সূক্ষ্মকোণ, A+B এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং A−B ধনাত্মক ধরা হইয়াছে। A ও B যে-কোন পরিমাণের কোণ হইলেও ঠিকমত চিত্র আঁকিয়া উপরের প্রণালীতে উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যায় (সংশ্লিষ্ট রেখাগুলিকে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্নসহ লইতে হইবে)।

কোন চিত্র না আঁকিয়া উপরে প্রমাণিত সূত্রগুলির সাহায্যে নিম্নের প্রণালীতেও প্রমাণ করা যায় যে উপপাদ্যগুলি যে-কোন পরিমাণ কোণের পক্ষেও সত্য।

মনে কর, $X = 90° + A$, সুতরাং $\sin X = \sin(90° + A) = \cos A$ এবং $\cos X = \cos(90° + A) = -\sin A$.

$$\therefore \quad \sin(X+B) = \sin\{(90°+A)+B\} = \sin\{90° + (A+B)\}$$
$$= \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$
$$= \sin X \cos B + \cos X \sin B.$$

আবার, $\cos(X+B) = \cos\{90° + (A+B)\} = -\sin(A+B)$
$$= -\sin A \cos B - \cos A \sin B$$
$$= \cos X \cos B - \sin X \sin B.$$

অনুরূপে $X = 90° + B$ লিখিয়াও ঐ সূত্র দুইটি প্রমাণ করা যায়। আবার, $X_1 = 90° + X$ লিখিয়াও ঐ সূত্রদ্বয় প্রমাণ করা যায়।

আবার, মনে কর $X = -A$.

$$\therefore \quad \sin(X+B) = \sin(-A+B) = \sin\{-(A-B)\} = -\sin(A-B)$$
$$= -(\sin A \cos B - \cos A \sin B)$$
$$= -\sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$= \sin(-A) \cos B + \cos(-A) \sin B$$
$$= \sin X \cos B + \cos X \sin B.$$

অনুরূপ প্রণালীতে প্রমাণ করা যায় যে, উপপাদ্য 2-এর সূত্রগুলিও যে-কোন পরিমাণ কোণের পক্ষে সত্য।

অতএব, ঐ উপপাদ্যগুলি সর্বক্ষেত্রে সত্য। উহাদিগকে Addition Theorems বা Subtraction Theorems বলা হয়।

16. কতিপয় অনুসিদ্ধান্তের প্রমাণ:

অনু. সি. 1. Prove that $\sin(A+B)\sin(A-B)$

$$=\sin^2 A-\sin^2 B\cdots\cdots(i)$$
$$=\cos^2 B-\cos^2 A\cdots\cdots(ii)$$

প্রমাণ: $\sin(A+B)\sin(A-B)$

$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$

$=\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B$

$=\sin^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A)\sin^2 B$

$=\sin^2 A-\sin^2 A\sin^2 B-\sin^2 B+\sin^2 A\sin^2 B$

$=\sin^2 A-\sin^2 B\cdots\cdots(i)$ [প্রমাণিত হইল]

$=(1-\cos^2 A)-(1-\cos^2 B)$

$=\cos^2 B-\cos^2 A\cdots\cdots(ii).$

অনু. সি. 2. Prove that $\cos(A+B)\cos(A-B)$

$$=\cos^2 A-\sin^2 B\cdots(i)$$
$$=\cos^2 B-\sin^2 A\cdots(ii).$$

প্রমাণ: $\cos(A+B)\cos(A-B)$

$=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)(\cos A\cos B+\sin A\sin B)$

$=\cos^2 A\cos^2 B-\sin^2 A\sin^2 B$

$=\cos^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\cos^2 A)\sin^2 B$

$=\cos^2 A-\sin^2 B\cdots\cdots(i)$ [প্রমাণিত হইল]

$=(1-\sin^2 A)-(1-\cos^2 B)$

$=1-\sin^2 A-1+\cos^2 B=\cos^2 B-\sin^2 A\cdots\cdots(ii).$

অনু. সি. 3. Show that (i) $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

(ii) $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.$

প্রমাণ : (i) $\tan(A+B)=\dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$

$$=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$

ডান পক্ষের লব ও হরকে cos A cos B দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\tan(A+B)=\frac{\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}+\dfrac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}-\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$$

(ii) $\tan(A-B)=\dfrac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}=\dfrac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B+\sin A\sin B}$

এক্ষণে, ডান পক্ষের লব ও হরকে cos A cos B দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\tan(A-B)=\frac{\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}-\dfrac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.$$

অনু. সি. 4. Prove that (i) $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$

(ii) $\cot(A-B)=\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$

প্রমাণ : (i) $\cot(A+B)=\dfrac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}$

$$=\frac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}$$

এক্ষণে, ডান পক্ষের লব ও হরকে sin A sin B দ্বারা ভাগ করিয়া পাই

$$\cot(A+B)=\frac{\dfrac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}-\dfrac{\sin A\sin B}{\sin A\sin B}}{\dfrac{\sin A\cos B}{\sin A\sin B}+\dfrac{\cos A\sin B}{\sin A\sin B}}=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$$

(ii) $\cot(A-B)=\dfrac{\cos(A-B)}{\sin(A-B)}=\dfrac{\cos A\cos B+\sin A\sin B}{\sin A\cos B-\cos A\sin B}$

এক্ষণে, ডান পক্ষের লব ও হরকে sin A sin B দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\cot(A-B)=\frac{\dfrac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}+\dfrac{\sin A\sin B}{\sin A\sin B}}{\dfrac{\sin A\cos B}{\sin A\sin B}-\dfrac{\cos A\sin B}{\sin A\sin B}}=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}.$$

অনু. সি. 5. Find the expansion (বিস্তৃতি নির্ণয় কর) of

(i) $\sin(A+B+C)$

(ii) $\cos(A+B+C)$

(iii) $\tan(A+B+C)$.

এক্ষণে, (i) $\sin(A+B+C)=\sin\{(A+B)+C\}$

$=\sin(A+B)\cos C+\cos(A+B)\sin C$

$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\cos C$
$\quad+(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\sin C$

$=\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A$
$\quad+\sin C\cos A\cos B-\sin A\sin B\sin C.$

[দ্রষ্টব্য : $\sin(A+B+C)$-এর বিস্তৃতিকে (expansionকে)
$\cos A\cos B\cos C(\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C)$
এই আকারে লেখা যায়।]

(ii) $\cos(A+B+C)=\cos\{(A+B)+C\}$

$=\cos(A+B)\cos C-\sin(A+B)\sin C$

$=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\cos C$
$\quad-(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\sin C$

$=\cos A\cos B\cos C-\sin A\sin B\cos C$
$\quad-\sin A\sin C\cos B-\sin B\sin C\cos A.$

[দ্রষ্টব্য : $\cos(A+B+C)$এর বিস্তৃতিকে (expansionকে)
$\cos A\cos B\cos C(1-\tan A\tan B-\tan A\tan C-\tan B\tan C)$
এই আকারে লেখা যায়।]

(ii) $\tan(A+B+C)=\tan\{(A+B)+C\}$

$$=\frac{\tan(A+B)+\tan C}{1-\tan(A+B)\tan C}$$

$$\frac{\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}+\tan C}{1-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.\tan C}$$

$$=\frac{\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B}}{\dfrac{1-\tan A\tan B-(\tan A+\tan B)\tan C}{1-\tan A\tan B}}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan A\tan C-\tan B\tan C}.$$

[দ্রষ্টব্য : (1) এই সূত্রটি স্মরণ রাখিবে। $\tan(A+B+C) = \frac{\sin(A+B+C)}{\cos(A+B+C)}$ এইরূপ লিখিয়া তৎপরে $\sin(A+B+C)$ ও $\cos(A+B+C)$-এর expansion দুইটি লিখিবে। তৎপরে লব ও হরকে $\cos A \cos B \cos C$ দিয়া ভাগ করিলেই $\tan(A+B+C)$-এর উপরের expansionটি পাওয়া যাইবে।

(2) উপরের প্রদর্শিত প্রণালীতে 4, 5 বা তদধিক সংখ্যক কোণের সমষ্টির ত্রিকোণমিতিক বিস্তৃতিগুলির (functions বা expansions-এর) সূত্র পাওয়া যায়।]

উদাহরণমালা 2

উদা. 1. Find the value of sin 75°, cos 75°, and tan 75°.

$\sin 75° = \sin(45°+30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

$\cos 75° = \cos(45°+30°) = \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

$\tan 75° = \tan(45°+30°) = \frac{\tan 45° + \tan 30°}{1 - \tan 45° \tan 30°}$

$$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\times\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}.$$

উদা. 2. Find the value of tan 15°.

$\tan 15° = \tan(45°-30°) = \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1+\tan 45° \tan 30°}$

$$= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\times\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}.$$

উদা. 3. Find the value of $\sin(A-B)$, when $\sin A = \frac{3}{5}$ and $\sin B = \frac{5}{13}$.

$\because \quad \sin A = \frac{3}{5}, \quad \therefore \quad \cos A = \sqrt{1-\sin^2 A} = \sqrt{1-\frac{9}{25}}$
$= \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$;

$\because \quad \sin B = \frac{5}{13}, \quad \therefore \quad \cos B = \sqrt{1-\sin^2 B} = \sqrt{1-\frac{25}{169}}$
$= \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$.

এক্ষণে, $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B = \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} - \frac{4}{5} \times \frac{5}{13}$
$= \frac{36}{65} - \frac{20}{65} = \frac{16}{65}$.

[**দ্রষ্টব্য :** প্রকৃত পক্ষে $\cos A = \pm\frac{4}{5}$ এবং $\cos B = \pm\frac{12}{13}$ হয়, কিন্তু আমরা এরূপ ক্ষেত্রে ধনাত্মক বর্গমূলটি লইয়া থাকি ।]

উদা. 4. Prove that $\tan(45° + A) = \frac{1+\tan A}{1-\tan A}$.

$\tan(45° + A) = \frac{\tan 45° + \tan A}{1 - \tan 45° \tan A} = \frac{1+\tan A}{1-\tan A}$ [$\because \tan 45° = 1$]

উদা. 5. Prove that $\tan(A+B)\tan(A-B) = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A - \sin^2 B}$
[C. U. '44]

প্রদত্ত বামপক্ষ $= \frac{\sin(A+B).\sin(A-B)}{\cos(A+B).\cos(A-B)}$
$= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A - \sin^2 B}$ [অনু. সি. 1 ও 2 দেখ]

উদা. 6. Show that $\frac{\cos 6° + \sin 6°}{\cos 6° - \sin 6°} = \tan 51°$.

$\cos 6° + \sin 6° = \cos(51° - 45°) + \sin(51° - 45°)$
$= \cos 51° \cos 45° + \sin 51° \sin 45° + \sin 51° \cos 45°$
$- \cos 51° \sin 45°$
$= \cos 51°. \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin 51°. \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin 51°. \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos 51°. \frac{1}{\sqrt{2}}$
$= 2 \sin 51°. \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \sin 51°$.

অনুরূপে, $\cos 6° - \sin 6° = \cos(51° - 45°) - \sin(51° - 45°)$
$= 2 \cos 51°. \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cos 51°$.

$\therefore \quad \frac{\cos 6° + \sin 6°}{\cos 6° - \sin 6°} = \frac{\sqrt{2} \sin 51°}{\sqrt{2} \cos 51°} = \frac{\sin 51°}{\cos 51°} = \tan 51°$.

উদা. 7. Prove that $\cot A - \cot 2A = \operatorname{cosec} 2A$.

$$\cot A - \cot 2A = \frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\cos 2A}{\sin 2A}$$

$$= \frac{\sin 2A \cos A - \cos 2A \sin A}{\sin A \sin 2A} = \frac{\sin(2A - A)}{\sin A \sin 2A}$$

$$= \frac{\sin A}{\sin A \sin 2A} = \frac{1}{\sin 2A} = \operatorname{cosec} 2A.$$

উদা. 8. Prove the identity (অভেদটি প্রমাণ কর)

$$\cos^2 A + \cos^2\left(A + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(A - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}.$$ [C. U. '33]

বামপক্ষ $= \cos^2 A + \{\cos(A + 60°)\}^2 + \{\cos(A - 60°)\}^2$

$= \cos^2 A + (\cos A \cos 60° - \sin A \sin 60°)^2$
$\qquad + (\cos A \cos 60° + \sin A \sin 60°)^2$

$= \cos^2 A + (\frac{1}{2} \cos A - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A)^2 + (\frac{1}{2} \cos A + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A)^2$

$= \cos^2 A + 2(\frac{1}{4} \cos^2 A + \frac{3}{4} \sin^2 A)$

$= \cos^2 A + \frac{1}{2} \cos^2 A + \frac{3}{2} \sin^2 A = \frac{3}{2} \cos^2 A + \frac{3}{2} \sin^2 A$

$= \frac{3}{2}(\cos^2 A + \sin^2 A) = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}.$

উদা. 9. Prove that $\tan 10° + \tan 35° + \tan 10° \tan 35° = 1$.

$\because \quad \dfrac{\tan 10° + \tan 35°}{1 - \tan 10° \tan 35°} = \tan(10° + 35°) = \tan 45° = 1,$

$\therefore \quad \tan 10° + \tan 35° = 1 - \tan 10° \tan 35°,$

$\therefore \quad \tan 10° + \tan 35° + \tan 10° \tan 35° = 1.$

উদা. 10. If $\cos(A + B) \sin(C + D) = \cos(A - B) \sin(C - D)$, show that $\cot A. \cot B. \cot C = \cot D$. [C. U. '30]

$\because \quad \cos(A + B) \sin(C + D) = \cos(A - B) \sin(C - D),$

$\therefore \quad \dfrac{\cos(A + B)}{\cos(A - B)} = \dfrac{\sin(C - D)}{\sin(C + D)},$

Or, $\dfrac{\cos(A + B) + \cos(A - B)}{\cos(A + B) - \cos(A - B)} = \dfrac{\sin(C - D) + \sin(C + D)}{\sin(C - D) - \sin(C + D)}$

[By Comp. & Divi.]

Or, $\dfrac{2 \cos A \cos B}{-2 \sin A \sin B} = \dfrac{2 \sin C \cos D}{-2 \cos C \sin D},$

$Or, \frac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B} = \frac{\sin C}{\cos C} \frac{\cos D}{\sin D},$

$Or, \cot A \cot B = \tan C \cot D = \frac{\cot D}{\cot C} \left[\because \tan C = \frac{1}{\cot C} \right]$

$\therefore \cot A \cot B \cot C = \cot D.$

উদা. 11. If $\sin(A+B) = n \sin(A-B)$ and if $n \neq -1$, show that $\cot A = \frac{n-1}{n+1} \cot B$.

$\because \sin(A+B) = n \sin(A-B),$

$\therefore \sin A \cos B + \cos A \sin B = n(\sin A \cos B - \cos A \sin B),$

$Or, \cos A \sin B + n \cos A \sin B$

$= n \sin A \cos B - \sin A \cos B$ [পক্ষান্তর করিয়া]

$Or, \cos A \sin B (1+n) = \sin A \cos B (n-1),$

$Or, \frac{\cos A \sin B}{\sin A \cos B} = \frac{n-1}{n+1}, \quad or, \quad \cot A \tan B = \frac{n-1}{n+1},$

$Or, \cot A \times \frac{1}{\cot B} = \frac{n-1}{n+1}, \qquad \cot A = \frac{n-1}{n+1} \cot B.$

উদা. 12. Show that if an angle α be divided into two parts so that the ratio of the tangents of the parts is λ, the difference x between the parts is given by the equation $\sin x = \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \sin \alpha$. [A. U. '45]

[যদি α কোণকে দুই অংশে বিভক্ত করায় ঐ অংশদ্বয়ের tangent দুইটির অনুপাত λ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\sin x = \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \sin \alpha$ সমীকরণ হইতে ঐ অংশদ্বয়ের অন্তর x পাওয়া যায়।]

মনে কর, α কোণের অংশদ্বয় m ও n.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই $\frac{\tan m}{\tan n} = \lambda \cdots (1),$

$m - n = x \cdots (2)$ এবং $m + n = \alpha \cdots (3).$

এক্ষণে, $\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \sin \alpha = \frac{\frac{\tan m}{\tan n} - 1}{\frac{\tan m}{\tan n} + 1} \cdot \sin \alpha = \frac{\tan m - \tan n}{\tan m + \tan n} \sin \alpha$

$$=\frac{\frac{\sin m}{\cos m}-\frac{\sin n}{\cos n}}{\frac{\sin m}{\cos m}+\frac{\sin n}{\cos n}}.\sin(m+n)\ [\because \alpha=m+n]$$

$$=\frac{\sin m\cos n-\cos m\sin n}{\sin m\cos n+\cos m\sin n}.\sin(m+n)$$

$$=\frac{\sin(m-n)}{\sin(m+n)}.\sin(m+n)=\sin(m-n)$$

$$=\sin x.$$

উদা. 13. If $A+B=C$, prove that

$$\cos^2 A+\cos^2 B-2\cos A\cos B\cos C=\sin^2 C.$$

বামপক্ষ $=\cos^2 A+\cos^2 B-2\cos A\cos B\cos(A+B)$ $[\because C=A+B.]$

$$=\cos^2 A+\cos^2 B-2\cos A\cos B\times(\cos A\cos B-\sin A\sin B)$$

$$=\cos^2 A+\cos^2 B-2\cos^2 A\cos^2 B+2\cos A\cos B\sin A\sin B$$

$$=\cos^2 A-\cos^2 A\cos^2 B+\cos^2 B-\cos^2 A\cos^2 B+2\cos A\cos B\sin A\sin B$$

$$=\cos^2 A(1-\cos^2 B)+\cos^2 B(1-\cos^2 A)+2\cos A\cos B\sin A\sin B$$

$$=\cos^2 A\sin^2 B+\cos^2 B\sin^2 A+2\cos A\cos B\sin A\sin B$$

$$=(\cos A\sin B+\cos B\sin A)^2=\{\sin(A+B)\}^2=\sin^2 C.$$

Exercise 2

1. Find the value of (i) $\sin(-15°)$, (ii) $\cot 15°$, (iii) $\tan(-75°)$.
2. Find the expansion (বিস্তৃতি) of $\sin(A-B+C)$
3. Find the value of $\sin 105°+\cos 105°+\cos\frac{\pi}{4}$.
4. If $\sin A=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{12}{13}$, find the value of $\cos(A+B)$.
5. If $\sin B=\frac{4}{5}$ and $\cos A=\frac{8}{17}$, find the value of $\sec(A+B)$.
6. If $\tan A=\frac{2}{11}$ and $\cot B=\frac{24}{7}$, find $\cot(A-B)$.

Prove the following identities (অভেদগুলি প্রমাণ কর) :—

7. $2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$

8. $\frac{\sin (A-B)}{\sin A \sin B}=\cot B-\cot A.$

9. $\cos A+\cos (120^\circ+A)+\cos (120^\circ-A)=0.$ [C. U. '53]

10. $\cos \left(\frac{\pi}{3}-\theta\right) \cos \left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\sin \left(\frac{\pi}{3}-\theta\right) \sin \left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$
$=\sin (\theta+\alpha)$

11. $2 \cos (45^\circ+A) \cos (45^\circ-A)=\cos^2 A-\sin^2 A.$

12. $\tan \left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{\cos \theta+\sin \theta}{\cos \theta-\sin \theta}.$

13. $\frac{\tan (2\alpha-\beta)+\tan \beta}{1-\tan (2\alpha-\beta) \tan \beta}=\tan 2\alpha.$

14. $\cos^2 A+\cos^2(120^\circ-A)+\cos^2(120^\circ+A)=\frac{3}{2}.$

15. $\cos 69^\circ22' \cos 9^\circ22'+\cos 80^\circ38' \cos 20^\circ38'=\frac{1}{2}.$

16. $\cos 38^\circ15' \sin 68^\circ15'-\cos 51^\circ45' \sin 21^\circ45'=\frac{1}{2}.$

17. $\sin 3\theta \cos \theta-\cos 3\theta \sin \theta=\sin 2\theta.$

18. $\cot 2A+\tan A=\operatorname{cosec} 2A.$ [C. U. '47

19. $1+\frac{\tan 2A}{\cot A}=\sec 2A.$ 20. $\frac{\cos 9^\circ+\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ-\sin 9^\circ}=\tan 54^\circ.$

21. $\tan (A+B)+\tan (A-B)=\frac{\sin 2A}{1-\sin^2 A-\sin^2 B}.$

22. $\sin (m+1)\theta. \sin (m-1)\theta+\cos (m+1)\theta. \cos (m-1)\theta$
$=\cos 2\theta$

23. $\cos \frac{1}{2}(\phi-\theta)-\sin \theta. \sin \frac{1}{2}(\phi+\theta)=\cos \theta. \cos \frac{1}{2}(\phi+\theta).$

24. $\tan^2 A-\tan^2 B=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A \cos^2 B}.$ [C. U. '36]

25. $\tan (\alpha+\beta) \tan (\alpha-\beta)=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}.$

26. $\tan 27^\circ+\tan 18^\circ+\tan 18^\circ \tan 27^\circ=1.$

Simplify :—

27. $\frac{\sin (A-B)}{\sin A \sin B}+\frac{\sin (B-C)}{\sin B \sin C}+\frac{\sin (C-A)}{\sin C \sin A}.$

28. $1+\frac{\sin (A-B)}{\cos A \cos B}+\frac{\sin (B-C)}{\cos B \cos C}+\frac{\sin (C-A)}{\cos C \cos A}.$

29. If $\sin \alpha \sin \beta-\cos \alpha \cos \beta+1=0$,
show that $1+\cot \alpha \tan \beta=0.$ [C. U. '39]

30. If $A+B+C=\pi$ and $\cos A=\cos B \cos C$, show that
$\tan A=\tan B+\tan C.$ [C. U. '42]

31. If $\tan\beta=\dfrac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}$, show that
$\tan(\alpha-\beta)=(1-n)\tan\alpha$. [P. U. '50]

32. If $x\sin(\theta+\alpha)=y\sin(\theta+\beta)$, show that
$$\tan\theta=\frac{y\sin\beta-x\sin\alpha}{x\cos\alpha-y\cos\beta}$$

33. If A, B, C be the angles of a triangle, show that
$\sin^2C=\cos^2A+\cos^2B+2\cos A\cos B\cos C$. [C.U. '30]
[কোন ত্রিভুজের কোণগুলি A, B, C হইলে দেখাও যে
$\sin^2C=\cos^2A+\cos^2B+2\cos A\cos B\cos C$.]

34. Prove geometrically the formula
$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ where A is an obtuse angle and B is acute. [C. U. '41]
[A একটি স্থূলকোণ এবং B সূক্ষ্মকোণ হইলে জ্যামিতিক প্রণালীতে প্রমাণ কর যে $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$].

Transformation of Products and Sums

গুণফলকে যোগফল অথবা বিয়োগফলের আকারে প্রকাশ করিয়া রূপান্তর করা যায়। আবার, যোগফল অথবা বিয়োগফলকে গুণফলের আকারে প্রকাশ করা যায়।

17. **Transformation of products into sums or differences**
গুণফলকে যোগফল বা অন্তরফলের আকারে রূপান্তর।)

(1) পূর্বে প্রমাণিত 14 ও 15 অনুচ্ছেদ হইতে পাই
$\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin(A+B)\cdots$(i)
$\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin(A-B)\cdots$(ii)

(যোগ করিয়া) $2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$
আবার, (i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া পাই
$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$.

উপরের সূত্রদ্বয়ের সাহায্যে আমরা একটি sine ও একটি cosine-এর গুণফলকে দুইটি sines-এর সমষ্টি বা অন্তরফলরূপে প্রকাশ করিতে পারি।

(2) পূর্বে প্রমাণিত 14 ও 15 অনুচ্ছেদ হইতে পাই
$\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B)\cdots$(iii)
$\cos A\cos B+\sin A\sin B=\cos(A-B)\cdots$(iv)

$\therefore$ (যোগ করিয়া) $2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$.
আবার, (iv) হইতে (iii) বিয়োগ করিয়া পাই
$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$.

এই সূত্র দুইটির সাহায্যে (i) দুইটি cosines-এর গুণফলকে দুইটি cosines-এর যোগফলরূপে এবং (ii) দুইটি sines-এর গুণফলকে দুইটি cosines এর অন্তরফলরূপে প্রকাশ করা যায়।

সূত্র চারিটি বিশেষ প্রয়োজনীয়। নিম্নে ঐগুলি একত্রে দেওয়া হইল,

$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)\cdots(1)$

$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)\cdots(2)$

$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)\cdots(3)$

$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)\cdots(4)$

[**দ্রষ্টব্য :** মনে রাখিবার সুবিধার জন্য মুখে মুখে বলা হয়

$2\sin A\cos B=\sin(\text{sum})+\sin(\text{difference})$

$2\cos A\sin B=\sin(\text{sum})-\sin(\text{difference})$

$2\cos A\cos B=\cos(\text{sum})+\cos(\text{difference})$

$2\sin A\sin B=\cos(\text{difference})-\cos(\text{sum})$

লক্ষ্য করিবে শেষের সূত্রটিতে প্রথমটি difference এবং পরেরটি sum.

উদাহরণ 1. $2\sin 11A\cos 5A$

$=\sin(11A+5A)+\sin(11A-5A)$

$=\sin 16A+\sin 6A.$

উদাহরণ 2. $2\cos 5\theta\sin 8\theta=\sin(5\theta+8\theta)-\sin(5\theta-8\theta)$

$=\sin 13\theta-\sin(-3\theta)$

$=\sin 13\theta+\sin 3\theta.$

উদাহরণ 3. $2\cos 75^\circ\cos 15^\circ$

$=\cos(75^\circ+15^\circ)+\cos(75^\circ-15^\circ)$

$=\cos 90^\circ+\cos 60^\circ=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$

উদাহরণ 4: $2\sin\frac{5\theta}{2}\sin\frac{7\theta}{2}$

$$=\cos\left(\frac{5\theta}{2}-\frac{7\theta}{2}\right)-\cos\left(\frac{5\theta}{2}+\frac{7\theta}{2}\right)$$

$$=\{\cos(-\theta)-\cos 6\theta\}=\cos\theta-\cos 6\theta.$$

18. Transformation of sums or differences into products

(যোগফল অথবা বিয়োগফলকে গুণফল আকারে প্রকাশ)

$\because\ \sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

এবং $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

$\therefore$ (যোগ করিয়া) $\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B\cdots(1)$

এক্ষণে, মনে কর $A+B=C$ এবং $A-B=D$;

সুতরাং, $A=\frac{C+D}{2}$ এবং $B=\frac{C-D}{2}$.

অতএব (1) হইতে পাই $\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\cdots$(I)

আবার, $\because$ $\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B\cdots(2)$

$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B\cdots(3)$

এবং $\cos(A+B)-\cos(A-B)$

$$=-\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$$

$$=-2\sin A\sin B=2\sin A\sin(-B)\cdots(4)$$

$\therefore$ (2), (3) ও (4)-এ A ও B-এর মান বসাইয়া পাই

$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\cdots$(II)

$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\cdots$(III)

এবং $\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}\cdots$(IV)

উপরের সূত্র চারিটিও বিশেষ প্রয়োজনীয়। ঐগুলি নিয়ে একত্রে দেওয়া হইল :—

$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\cdots$(I)

$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\cdots$(II)

$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\cdots$(III)

$\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}\cdots$(IV)

[দ্রষ্টব্য : শেষ সূত্রটিতে লক্ষ্য কর যে, $\frac{C-D}{2}$ না হইয়া $\frac{D-C}{2}$ হইয়াছে।

মনে রাখিবার সুবিধার জন্য বলা যায় :—

(i) Sum of two sines $=2\sin(\frac{1}{2}$ sum$)\cos(\frac{1}{2}$ diff.)

(ii) difference of two sines $=2\cos(\frac{1}{2}$ sum$)\sin(\frac{1}{2}$ diff.)

(iii) sum of two cosines $=2\cos(\frac{1}{2}$ sum$)\cos(\frac{1}{2}$ diff.)

(iv) difference of two cosines

$=2\sin(\frac{1}{2}$ sum$)\sin(\frac{1}{2}$ diff. reversed).]

উদাহরণ 1. $\sin 8\theta+\sin 6\theta=2\sin\frac{8\theta+6\theta}{2}\cos\frac{8\theta-6\theta}{2}$

$=2\sin 7\theta\cos\theta.$

উদাহরণ 2. $\sin 14\theta-\sin 8\theta=2\cos\frac{14\theta+8\theta}{2}\sin\frac{14\theta-8\theta}{2}$

$=2\cos 11\theta\sin 3\theta.$

উদাহরণ 3. $\cos 2\theta+\cos 5\theta=2\cos\frac{2\theta+5\theta}{2}\cos\frac{2\theta-5\theta}{2}$

$=2\cos\frac{7\theta}{2}\cos\left(-\frac{3\theta}{2}\right)$

$=2\cos\frac{7\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}.$

উদাহরণ 4. $\cos 75^\circ-\cos 15^\circ=2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\sin\frac{15^\circ-75^\circ}{2}$

$=2\sin 45^\circ\sin(-30^\circ)$

$=-2\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$=-2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$

উদাহরণমালা 3

উদা. 1. Prove that $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ=\frac{3}{16}$.

[P. U. '42]

বামপক্ষ $=\sin 20^\circ\sin 40^\circ.\frac{\sqrt{3}}{2}.\sin 80^\circ$ $\left[\because\ \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ.(2\sin 80^\circ\sin 40^\circ)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ\{\cos(80^\circ-40^\circ)-\cos(80^\circ+40^\circ)\}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ\{\cos 40^\circ-\cos 120^\circ\}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ\{\cos 40^\circ-(-\tfrac{1}{2})\}$ $[\because\ \cos 120^\circ=-\tfrac{1}{2}]$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ(\cos 40^\circ+\tfrac{1}{2})$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ\cos 40^\circ+\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{8}\times 2\sin 20^\circ \cos 40^\circ+\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{8}\{\sin(20^\circ+40^\circ)+\sin(20^\circ-40^\circ)\}+\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{8}\{\sin 60^\circ+\sin(-20^\circ)\}+\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin 20^\circ\right)+\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$

$=\frac{3}{16}-\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ+\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ=\frac{3}{16}.$

উদা. 2. Find the value of $\cos 80^\circ+\cos 40^\circ-\cos 20^\circ$.

প্রদত্ত রাশি $=2\cos\frac{80^\circ+40^\circ}{2}\cos\frac{80^\circ-40^\circ}{2}-\cos 20^\circ$

$=2\cos 60^\circ\cos 20^\circ-\cos 20^\circ=2\times\frac{1}{2}\times\cos 20^\circ-\cos 20^\circ$

$=\cos 20^\circ-\cos 20^\circ=0.$

উদা. 3. Show that $\cos 5^\circ-\sin 25^\circ=\sin 35^\circ$.

$\because\quad \sin 25^\circ=\cos(90^\circ-25^\circ),$

$\therefore\quad \cos 5^\circ-\sin 25^\circ=\cos 5^\circ-\cos(90^\circ-25^\circ)$

$=\cos 5^\circ-\cos 65^\circ=2\sin\frac{5^\circ+65^\circ}{2}\sin\frac{65^\circ-5^\circ}{2}$

$=2\sin 35^\circ\sin 30^\circ=2\sin 35^\circ\times\frac{1}{2}=\sin 35^\circ.$

উদা. 4. Prove that $\cos^2 A+\cos^2(60^\circ+A)+\cos^2(60^\circ-A)=\frac{3}{2}$.

$\because\quad 2\cos^2 A=\cos^2 A+\cos^2 A=\cos^2 A+1-\sin^2 A$

$=\cos A\cos A-\sin A\sin A+1$

$=\cos(A+A)+1=\cos 2A+1,$

$\therefore$ প্রদত্ত বামপক্ষ $=\frac{1}{2}(1+\cos 2A)+\frac{1}{2}\{\cos(120^\circ+2A)+1\}$

$+\frac{1}{2}\{\cos(120^\circ-2A)+1\}$

$=\frac{1}{2}\{3+\cos 2A+\cos(120^\circ+2A)+\cos(120^\circ-2A)\}$

$=\frac{1}{2}(3+\cos 2A+2\cos 120^\circ\cos 2A)$

$=\frac{1}{2}(3+\cos 2A+2\times-\frac{1}{2}\times\cos 2A)$

$=\frac{1}{2}(3+\cos 2A-\cos 2A)=\frac{3}{2}.$

উদা. 5. Show that $\frac{\sin A-\sin B}{\cos B-\cos A}=\cot\frac{A+B}{2}$.

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{B+A}{2}\sin\frac{A-B}{2}}=\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}=\cot\frac{A+B}{2}.$$

উদা. 6. Prove that $\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 4\theta+\sin 5\theta}{\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cos 5\theta}=\tan 3\theta$

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{(\sin 5\theta+\sin\theta)+(\sin 4\theta+\sin 2\theta)}{(\cos 5\theta+\cos\theta)+(\cos 4\theta+\cos 2\theta)}$$

$$=\frac{2\sin 3\theta\cos 2\theta+2\sin 3\theta\cos\theta}{2\cos 3\theta\cos 2\theta+2\cos 3\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{2\sin 3\theta(\cos 2\theta+\cos\theta)}{2\cos 3\theta(\cos 2\theta+\cos\theta)}=\frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta}=\tan 3\theta.$$

উদা. 7. Express

$\sin(B+C-A)+\sin(C+A-B)+\sin(A+B-C)-\sin(A+B+C)$ as the product of three sines.

[প্রথম দুইটি পদকে এবং শেষ দুইটি পদকে গুণফলে প্রকাশ করিয়া]

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=2\sin C\cos(B-A)+2\cos(A+B)\sin(-C)$$

$$=2\sin C\cos(B-A)-2\cos(A+B)\sin C$$

$$=2\sin C\{\cos(B-A)-\cos(A+B)\}$$

$$=2\sin C(2\sin B\sin A)=4\sin A\sin B\sin C.$$

উদা. 8. Express $4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ as the sum of four cosines.

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=2\cos\alpha.2\cos\beta\cos\gamma$$

$$=2\cos\alpha\{\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)\}$$

$$=2\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)+2\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)$$

$$=\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha-\beta-\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)$$

$$=\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma).$$

উদা. 9. If $\sin A = m \sin B$, prove that

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{m-1}{m+1}\tan\frac{A+B}{2}.$$

$\because$ $\sin A = m\sin B$, $\therefore$ $\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{m}{1}$,

$\therefore$ Comp. & Div. দ্বারা $\dfrac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\dfrac{m-1}{m+1}$,

$$\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{m-1}{m+1},\ \text{বা,}\ \cot\frac{A+B}{2}\tan\frac{A-B}{2}=\frac{m-1}{m+1},$$

বা, $\tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{m-1}{m+1}\times\dfrac{1}{\cot\frac{A+B}{2}}=\dfrac{m-1}{m+1}\tan\dfrac{A+B}{2}.$

উদা. 10. প্রমাণ কর যে n জোড় হইলে কিংবা বিজোড় হইলে $\left(\dfrac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B}\right)^n+\left(\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}\right)^n$এর মান যথাক্রমে $2\cot^n\dfrac{A-B}{2}$ কিংবা শূন্য হইবে। [P. U. '33]

এখানে বামপক্ষ

$$=\left\{\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}\right\}^n+\left\{\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}}\right\}^n$$

$$=\left(\cot\frac{A-B}{2}\right)^n+\left\{\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\left(-\frac{A-B}{2}\right)}\right\}^n$$

$$=\left(\cot\frac{A-B}{2}\right)^n+\left\{\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{-\sin\frac{A-B}{2}}\right\}^n$$

$$=\left(\cot\frac{A-B}{2}\right)^n+\left(-\cot\frac{A-B}{2}\right)^n$$

এক্ষণে, n যদি জোড় (even) হয়, তবে $\left(-\cot\dfrac{A-B}{2}\right)^n$ পদটি ধনাত্মক হইয়া $\left(\cot\dfrac{A-B}{2}\right)^n$ হইবে, সুতরাং তখন প্রদত্ত রাশি $=2\cot^n\dfrac{A-B}{2}$.

আবার, n যদি বিজোড় (odd) হয়, তবে $\left(-\cot\frac{A-B}{2}\right)^n$ পদটি ঋণাত্মক হইয়া $-\left(\cot\frac{A-B}{2}\right)^n$এর সমান হইবে,

সুতরাং তখন প্রদত্ত রাশি $=0$.

উদা. 11. If $\sin\theta+\sin\phi=a$ and $\cos\theta+\cos\phi=b$, show that $\tan\frac{\theta-\phi}{2}=\pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$.

$$\because\quad \sin\theta+\sin\phi=a,\quad \therefore\quad 2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}=a\cdots(1)$$

আবার, $\because\ \cos\theta+\cos\phi=b,\ \therefore\ 2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}=b\cdots(2)$

এক্ষণে (1) ও (2)এর বর্গের সমষ্টি লইয়া পাই

$$4\sin^2\frac{\theta+\phi}{2}\cos^2\frac{\theta-\phi}{2}+4\cos^2\frac{\theta+\phi}{2}\cos^2\frac{\theta-\phi}{2}=a^2+b^2,$$

বা, $4\cos^2\frac{\theta-\phi}{2}\left\{\sin^2\frac{\theta+\phi}{2}+\cos^2\frac{\theta+\phi}{2}\right\}=a^2+b^2,$

বা, $4\cos^2\frac{\theta-\phi}{2}=a^2+b^2$ [$\because$ বামপক্ষের অপর উৎপাদকটি $=1$.]

$$\therefore\quad \cos^2\frac{\theta-\phi}{2}=\frac{a^2+b^2}{4}\cdots\cdots(3)$$

$$\therefore\quad \sin^2\frac{\theta-\phi}{2}=1-\cos^2\frac{\theta-\phi}{2}$$

$$=1-\frac{a^2+b^2}{4}=\frac{4-a^2-b^2}{4}\cdots\cdots(4)$$

এক্ষণে, (4)কে 3 দিয়া ভাগ করিয়া পাই

$$\tan^2\frac{\theta-\phi}{2}=\frac{4-a^2-b^2}{4}\times\frac{4}{a^2+b^2}=\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\therefore\quad \tan\frac{\theta-\phi}{2}=\pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}.$$

উদা. 12. If $\frac{x}{\tan(\theta+\alpha)}=\frac{y}{\tan(\theta+\beta)}=\frac{z}{\tan(\theta+\gamma)}$, prove that $\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=0.$

[Pat. '45]

প্রদত্ত শর্ত হইতে পাই $\frac{x}{y}=\frac{\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\beta)}$ ..... (1)

$\frac{y}{z}=\frac{\tan(\theta+\beta)}{\tan(\theta+\gamma)}$ ......(2)

এবং $\frac{z}{x}=\frac{\tan(\theta+\gamma)}{\tan(\theta+\alpha)}$ ..... (3).

এক্ষণে (1) হইতে comp, & div. দ্বারা পাই

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{\tan(\theta+\alpha)+\tan(\theta+\beta)}{\tan(\theta+\alpha)-\tan(\theta+\beta)}=\frac{\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)}+\frac{\sin(\theta+\beta)}{\cos(\theta+\beta)}}{\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)}-\frac{\sin(\theta+\beta)}{\cos(\theta+\beta)}}$$

$$=\frac{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)+\cos(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)}{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)-\cos(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)}$$

$$=\frac{\sin\{(\theta+\alpha)+(\theta+\beta)\}}{\sin\{(\theta+\alpha)-(\theta+\beta)\}}=\frac{\sin(2\theta+\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{\sin(2\theta+\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha-\beta)}$$

[লব ও হরকে $\sin(\alpha-\beta)$ দ্বারা গুণ করিয়া]

$$\therefore\quad \frac{x+y}{x-y}.\sin^2(\alpha-\beta)=\sin(2\theta+\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta)$$

$$=\tfrac{1}{2}\{\cos(2\theta+2\beta)-\cos(2\theta+2\alpha)\}\cdots(4)$$

অনুরূপে (2) হইতে পাই $\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)$

$$=\tfrac{1}{2}\{\cos(2\theta+2\gamma)-\cos(2\theta+2\beta)\}\cdots(5)$$

এবং (3) হইতে পাই $\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)$

$$=\tfrac{1}{2}\{\cos(2\theta+2\alpha)-\cos(2\theta+2\gamma)\}\cdots(6)$$

এক্ষণে (4), (5), (6) যোগ করিয়া পাই

প্রদত্ত বামপক্ষ $=\frac{1}{2}\times\{0\}=0.$

Exercise 3

Express the following as a sum or difference :—

[যোগফল বা অন্তরফলরূপে প্রকাশ কর :]

1. $2\sin 5\theta\cos 2\theta$
2. $2\cos 7\theta\sin 8\theta$
3. $\cos\frac{5\theta}{2}\cos\frac{7\theta}{2}$
4. $2\sin 3A\sin(A+B)$

Express in the form of a product (গুণফল রূপে প্রকাশ কর :)-

5. $\sin 80^\circ + \sin 40^\circ$
6. $\sin 3\theta - \sin 7\theta$
7. $\cos 7A + \cos 3A$
8. $\cos 7\theta - \cos 9\theta$

Find the value of :—

9. $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ$
10. $\sin 78^\circ - \sin 18^\circ + \cos 132^\circ + \cos \frac{\pi}{3}$
11. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$
12. $\sqrt{3} \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$
13. $\dfrac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}$

Prove the following identities (অভেদগুলি প্রমাণ কর :)—

14. $\dfrac{\sin \theta + \sin \alpha}{\cos \theta + \cos \alpha} = \tan \dfrac{(\theta + \alpha)}{2}$
15. $\dfrac{\sin 2\theta + \sin 3\theta}{\cos 2\theta - \cos 3\theta} = \cot \dfrac{\theta}{2}$
16. $\cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) + \cos \left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) = \sqrt{3} \cos \theta$
17. $\sin \theta \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = \frac{1}{4} \sin 3\theta$
18. $\dfrac{\cos (2A - 3B) + \cos 3B}{\sin (2A - 3B) + \sin 3B} = \cot A$
19. $\cos 95^\circ + \cos 25^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}} (\cos 10^\circ + \sin 10^\circ)$
20. $\cos \theta + \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) = 0$
21. $\dfrac{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ} = \tan 35^\circ$
22. $\sin^2 5\theta - \sin^2 3\theta = \sin 8\theta \sin 2\theta$
23. $\dfrac{\cos (A+B) - 2 \cos A + \cos (A-B)}{\sin (A+B) - 2 \sin A + \sin (A-B)} = \cot A$
24. $\cos 10^\circ - \sin 40^\circ = \sin 20^\circ$
25. $\dfrac{\sin 7A - \sin 3A - \sin 5A + \sin A}{\cos 7A + \cos 3A - \cos 5A - \cos A} = \tan 2A$

26. $\sin^2\theta+\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)=\frac{3}{2}$

27. $4\cos\theta\cos(120^\circ+\theta)\cos(120^\circ-\theta)=\cos 3\theta$

28. $\cos A+\cos B+\cos C+\cos(A+B+C)$

$=4\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{A+B}{2}$ [A. U. '45]

29. Express $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C-\sin 2(A+B+C)$ as the product of three sines (তিনটি sine-এর গুণফলরূপে প্রকাশ কর)।

30. Express $4\sin A\cos B\cos C$ as the sum of four sines.

31. If $\operatorname{cosec} A+\sec A=\operatorname{cosec} B+\sec B$, then $\tan A\tan B=\cot\frac{1}{2}(A+B)$. [P. U. '36]

32. Express $\sin(B+C-A)+\sin(C+A-B)+\sin(A+B-C)-\sin(A+B+C)$ as the product of three sines.

33. If $\cos A=k\cos B$, show that

$\cot\frac{1}{2}(A+B)=\frac{k+1}{k-1}\tan\frac{1}{2}(B-A)$.

34. If $\cos A+\cos B=\frac{1}{3}$ and $\sin A+\sin B=\frac{1}{4}$, find the value of $\tan\frac{1}{2}(A+B)$.

35. Simplify $\frac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A+\sin 7A}{\cos A+\cos 3A+\cos 5A+\cos 7A}$. [A. U. '48]

36. If $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{3}$ and $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}$, show that $\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{2}{3}$.

37. If $\sin A+\sin B=a$, and $\cos A+\cos B=b$, find the value of $\cot\frac{A-B}{2}$.

38. If $x\cos\alpha+y\sin\alpha=k=x\cos\beta+y\sin\beta$, prove that

$$\frac{x}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=\frac{y}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=\frac{k}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Multiple Angles

(গুণিতক কোণ)

19. 2A কোণের কোণানুপাত (**Trigonometrical ratios of angle 2A**)

A কোণের গুণিতক (multiple) 2A কোণ, কারণ 2A কোণটি A কোণের দ্বিগুণ। অনুরূপে 3A, 4A প্রভৃতি কোণগুলিকে গুণিতক কোণ বলা হয়। এখানে গুণিতক কোণের কোণানুপাত নির্ণয় সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

(*a*) পূর্বে প্রমাণিত হইয়াছে যে, A ও B এর যে কোন মানে

$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ এবং

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$.

এক্ষণে প্রথম সূত্রটিতে $B=A$ ধরিয়া পাই

$\sin 2A=\sin A\cos A+\cos A\sin A=2\sin A\cos A \cdots(1)$

আবার দ্বিতীয় সূত্রটিতে $B=A$ ধরিয়া পাই

$\cos 2A=\cos A.\cos A-\sin A.\sin A=\cos^2 A-\sin^2 A \cdots(2)$

$=\cos^2 A-(1-\cos^2 A)=2\cos^2 A-1 \cdots(3)$

[অথবা (2) হইতে] $=(1-\sin^2 A)-\sin^2 A=1-2\sin^2 A \cdots(4)$.

অতএব, $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A$ হইল।

অনুসিদ্ধান্ত : (3) ও (4) হইতে পক্ষান্তর করিয়া পাই

$1+\cos 2A=2\cos^2 A \cdots(5)$, এবং $1-\cos 2A=2\sin^2 A \cdots(6)$

অতএব, $\dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\dfrac{2\sin^2 A}{2\cos^2 A}=\tan^2 A$.

(*b*) পূর্বে প্রমাণিত হইয়াছে যে $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

এবং $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$.

এক্ষণে প্রথম সূত্রটিতে $B=A$ বসাইয়া পাই

$\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A} \cdots(7)$

আবার দ্বিতীয় সূত্রটিতে $B=A$ ধরিয়া পাই

$$\cot 2A=\frac{\cot^2 A-1}{2\cot A}\quad\cdots(8)$$

[**দ্রষ্টব্য :** A ও B-এর যে কোন মানে যোগের সূত্রগুলি (addition formulæ) সর্বক্ষেত্রে সিদ্ধ বলিয়া প্রমাণিত হওয়ায় ঐ সূত্রগুলি হইতে লব্ধ উপরের সূত্রগুলিও A-এর যে কোন মানে সিদ্ধ হইবে।]

20. $3A$ কোণের কোণানুপাত (Trigonometrical ratios of angle $3A$).

পূর্বের সূত্রগুলি হইতে পাই

(i)
$$\begin{aligned}\sin 3A &= \sin(2A+A)=\sin 2A\cos A+\cos 2A\sin A\\ &=2\sin A\cos A.\cos A+(1-2\sin^2 A).\sin A\\ &=2\sin A\cos^2 A+\sin A-2\sin^3 A\\ &=2\sin A(1-\sin^2 A)+\sin A-2\sin^3 A\\ &=2\sin A-2\sin^3 A+\sin A-2\sin^3 A\\ &=3\sin A-4\sin^3 A.\end{aligned}$$

অতএব, $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A.$

(ii)
$$\begin{aligned}\cos 3A &= \cos(2A+A)=\cos 2A\cos A-\sin 2A\sin A\\ &=(2\cos^2 A-1)\cos A-2\sin A\cos A.\sin A\\ &=2\cos^3 A-\cos A-2\sin^2 A\cos A\\ &=2\cos^3 A-\cos A-2(1-\cos^2 A)\cos A\\ &=4\cos^3 A-3\cos A.\end{aligned}$$

অতএব, $\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A.$

[**দ্রষ্টব্য :** উপরে দেখা গেল যে $\sin 3A$ বা $\cos 3A$ নির্ণয়ের সময় $\cos 2A$এর মান বসাইতে হইয়াছে, কিন্তু $\cos 2A$এর মান $2\cos^2 A-1$ এবং $1-2\sin^2 A$ দুইই হইতে পারে। অতএব উহার কোন্ মানটি বসাইতে হইবে তাহা স্থির করিবার জন্য মনে রাখিবে যে, sineএর মান নির্ণয়ের জন্য $\cos 2A$এর sine দিয়া মানটি এবং cosineএর মান নির্ণয়ের জন্য $\cos 2A$এর cosine দিয়া মানটি বসাইতে হয়।]

(iii)
$$\tan 3A=\tan(2A+A)=\frac{\tan 2A+\tan A}{1-\tan 2A\tan A}$$

$$=\frac{\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}+\tan A}{1-\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}.\tan A}=\frac{\dfrac{2\tan A+\tan A-\tan^3 A}{1-\tan^2 A}}{\dfrac{1-\tan^2 A-2\tan^2 A}{1-\tan^2 A}}$$

$$=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}.$$

(iv) sin 2A ও cos 2Aকে tan Aএর আকারে প্রকাশ। [C. U. '31]

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\sin A\cos A}{\sin^2 A + \cos^2 A}$$

[$\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1$]

$$= \frac{\frac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A}}{\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} + \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}}$$ [লব ও হরকে $\cos^2 A$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

$$= \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}.$$

অন্যরূপে প্রমাণ: $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

$$= 2\frac{\sin A}{\cos A}.\cos^2 A = 2\tan A.\cos^2 A$$

$$= 2\tan A.\frac{1}{\sec^2 A} = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}.$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \cos^2 A - \cos^2 A.\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \cos^2 A(1-\tan^2 A) = \frac{1-\tan^2 A}{\sec^2 A} = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}.$$

[**দ্রষ্টব্য:** উপরের সূত্রগুলিতে প্রদর্শিত প্রণালী অনুসারে A-এর উচ্চতর যে কোন গুণিতক কোণেরই কোণানুপাতগুলি A কোণের কোণানুপাতে প্রকাশ করা যায়। এ পর্যন্ত প্রমাণিত সূত্রগুলি বিশেষ প্রয়োজনীয়।]

উদাহরণমালা 4

উদা. 1. Express $\cos 4\theta$ in terms of $\sin\theta$

[$\cos 4\theta$কে $\sin\theta$ দ্বারা প্রকাশ কর।]

$$\cos 4\theta = \cos 2(2\theta) = 1 - 2\sin^2 2\theta = 1 - 2(\sin 2\theta)^2$$
$$= 1 - 2(2\sin\theta\cos\theta)^2 = 1 - 8\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$= 1 - 8\sin^2\theta(1-\sin^2\theta) = 1 - 8\sin^2\theta + 8\sin^4\theta.$$

উদা. 2. If $\sin A = \frac{3}{5}$, find the value of $\cos 2A$.

$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = 1 - 2\times\frac{9}{25} = \frac{7}{25}.$$

উদা. 3. Find tan A, when $\cos 2A = \frac{24}{25}$.

$$\because \cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}, \quad \therefore \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \frac{25}{24},$$

$\therefore \quad \dfrac{2}{2\tan^2 A}=\dfrac{49}{1}$ (Comp. & Div. দ্বারা),

বা, $\tan^2 A=\frac{1}{49}$, $\therefore \quad \tan A=\frac{1}{7}$.

উদা. 4. If $\cos A=\frac{4}{5}$, find the value of $\sin 3A$.

$\because \quad \cos A=\frac{4}{5}, \quad \therefore \quad \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}$

$=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$.

এক্ষণে, $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A=3\times\frac{3}{5}-4(\frac{3}{5})^3$

$=\frac{9}{5}-\frac{108}{125}=\frac{117}{125}$.

উদা. 5. Prove that $\cos^2(45^\circ-\theta)-\sin^2(45^\circ-\theta)=\sin 2\theta$.

বামপক্ষ $=\cos^2 A-\sin^2 A$ [$A=45^\circ-\theta$ ধরিয়া]

$=\cos 2A=\cos 2(45^\circ-\theta)=\cos(90^\circ-2\theta)=\sin 2\theta$.

উদা 6. Show that $\sin 8\theta=8\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta$.

বামপক্ষ $=\sin 8\theta=\sin 2(4\theta)=2\sin 4\theta\cos 4\theta$

$=2.2\sin 2\theta\cos 2\theta.\cos 4\theta$ [$\because \quad \sin 4\theta=2\sin 2\theta\cos 2\theta$]

$=2.\ 2\ 2\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta$

[$\because \quad \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$]

$=8\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta$.

উদা. 7. Prove that $\cos^6 A+\sin^6 A=1-3\sin^2 A\cos^2 A$

$=\frac{1}{4}(1+3\cos^2 2A)$.

বামপক্ষ $=(\cos^2 A)^3+(\sin^2 A)^3$

$=(\cos^2 A+\sin^2 A)(\cos^4 A-\cos^2 A\sin^2 A+\sin^4 A)$

$=(\cos^4 A-\sin^2 A\cos^2 A+\sin^4 A$.

[$\because \quad \cos^2 A+\sin^2 A=1$]

$=(\cos^2 A+\sin^2 A)^2-3\sin^2 A\cos^2 A$

$=1-3\sin^2 A\cos^2 A$. [প্রমাণিত হইল]

$=1-3\times(\frac{1}{2}\sin 2A)^2$ [$\because \quad \sin 2A=2\sin A\cos A$]

$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2A=1-\frac{3}{4}(1-\cos^2 2A)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 2A$

$=\frac{1}{4}(1+3\cos^2 2A)$.

উদা. 8. Show that $\cot\theta-\tan\theta=2\cot 2\theta$.

বামপক্ষ $=\cot\theta-\dfrac{1}{\cot\theta}=\dfrac{\cot^2\theta-1}{\cot\theta}=2.\dfrac{\cot^2\theta-1}{2\cot\theta}=2\cot 2\theta$.

উদা. 9. Prove that $\frac{1-\cos 2\theta+\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta+\sin 2\theta}=\tan\theta$. [C. U. '38]

বামপক্ষ $=\frac{(1-\cos 2\theta)+\sin 2\theta}{(1+\cos 2\theta)+\sin 2\theta}$

$=\frac{2\sin^2\theta+\sin 2\theta}{2\cos^2\theta+\sin 2\theta}$ [অনুচ্ছেদ 19, সূত্র 5 ও 6]

$=\frac{2\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}=\frac{2\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{2\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\tan\theta$.

উদা. 10. If $\tan\theta=\frac{x}{y}$, find the value of $x\sin 2\theta+y\cos 2\theta$.

[B. H. U. '40]

$\because\ \tan\theta=\frac{x}{y}\quad\therefore\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{x}{y},\quad\therefore\ y\sin\theta=x\cos\theta.$

এক্ষণে, $x\sin 2\theta+y\cos 2\theta=2.\,x\sin\theta\cos\theta+y(1-2\sin^2\theta)$

$=2\sin\theta.\,x\cos\theta+y(1-2\sin^2\theta)$

$=2\sin\theta.\,y\sin\theta+y(1-2\sin^2\theta)$

$=2y\sin^2\theta+y(1-2\sin^2\theta)=y.$

উদা. 11. Prove that $\frac{\sec 8A-1}{\sec 4A-1}=\frac{\tan 8A}{\tan 2A}$. [B. H. U. '57]

বামপক্ষ $=\dfrac{\frac{1}{\cos 8A}-1}{\frac{1}{\cos 4A}-1}=\frac{1-\cos 8A}{\cos 8A}\times\frac{\cos 4A}{1-\cos 4A}$

$=\frac{2\sin^2 4A.\cos 4A}{\cos 8A.\,2\sin^2 2A}$

$=\frac{2\sin 4A\cos 4A\times\sin 4A}{\cos 8A.\,2\sin^2 2A}=\frac{\sin 8A}{\cos 8A}\times\frac{\sin 4A}{2\sin^2 2A}$

$=\tan 8A\times\frac{2\sin 2A\cos 2A}{2\sin^2 2A}=\tan 8A\times\frac{\cos 2A}{\sin 2A}$

$=\tan 8A\cot 2A=\tan 8A\times\frac{1}{\tan 2A}=\frac{\tan 8A}{\tan 2A}$.

উদা. 12. Prove that $\tan 3A-\tan 2A-\tan A$

$=\tan 3A\tan 2A\tan A$.

বামপক্ষ $=\tan(2A+A)-\tan 2A-\tan A$

$=\frac{\tan 2A+\tan A}{1-\tan 2A\tan A}-\tan 2A-\tan A$

$$=\frac{\tan 2A+\tan A-\tan 2A-\tan A+(\tan 2A+\tan A)\tan 2A \tan A}{1-\tan 2A \tan A}$$

$$=\frac{\tan 2A+\tan A}{1-\tan 2A \tan A}.\tan 2A \tan A=\tan 3A \tan 2A \tan A.$$

উদা. 13. Show that $\cos^2\theta+\cos^2(\alpha+\theta)$
$-2\cos\alpha\cos\theta\cos(\alpha+\theta)$ is independent of θ. [P.U. '46]
[প্রমাণ কর যে উপরে প্রদত্ত রাশিটি θ নিরপেক্ষ]

প্রদত্ত রাশি $=\cos^2\theta+(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta)^2$
$\quad -2\cos\alpha\cos\theta(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta)$

$=\cos^2\theta+\cos^2\alpha\cos^2\theta+\sin^2\alpha\sin^2\theta-2\cos\alpha\cos\theta\sin\alpha\sin\theta$
$\quad -2\cos^2\alpha\cos^2\theta+2\cos\alpha\cos\theta\sin\alpha\sin\theta$

$=\cos^2\theta-\cos^2\alpha\cos^2\theta+\sin^2\alpha\sin^2\theta$

$=\cos^2\theta-\cos^2\theta(1-\sin^2\alpha)+\sin^2\alpha(1-\cos^2\theta)$

$=\cos^2\theta-\cos^2\theta+\cos^2\theta\sin^2\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\theta\sin^2\alpha$

$=\sin^2\alpha$, ইহা θ নিরপেক্ষ।

উদা. 14. Prove that $\dfrac{\tan 2^n\theta}{\tan\theta}$

$=(1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)(1+\sec 2^3\theta)\cdots(1+\sec 2^n\theta).$

$\because \quad 1+\sec 2\theta=1+\dfrac{1}{\cos 2\theta}=1+\dfrac{1}{\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}}=1+\dfrac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}$

$=\dfrac{1-\tan^2\theta+1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2}{1-\tan^2\theta},$

$\therefore$ উভয় পক্ষকে $\tan\theta$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$\tan\theta(1+\sec 2\theta)=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\tan 2\theta.$

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে $\tan 2\theta.(1+\sec 2^2\theta)=\tan 2^2\theta$,
$\tan 2^2\theta(1+\sec 2^3\theta)=\tan 2^3\theta,\cdots\cdots$, এবং $\tan 2^{n-1}\theta(1+\sec 2^n\theta)$
$=\tan 2^n\theta.$

$\therefore \quad \tan\theta(1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)(1+\sec 2^3\theta)\cdots(1+\sec 2^n\theta)$
$=\tan 2^n\theta.$

$\therefore \dfrac{\tan 2^n\theta}{\tan\theta}=(1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)(1+\sec 2^3\theta)\cdots(1+\sec 2^n\theta).$

Exercise 4

1. If $\cot A=3$, find $\tan 2A$.

2. If $\sec \theta=3$, find the value of $\cos 3\theta$.

3. If $\sin 2A=\cdot 28$, find $\tan A$.

4. (i) Simplify $\sin 3A \operatorname{cosec} A \cdot \dfrac{\cos 3A}{\cos A}$

(ii) Express $\sin 2A$ and $\cos 2A$ in terms of $\tan A$. [C.U. '31]

[$\sin 2A$ ও $\cos 2A$কে $\tan A$ দ্বারা প্রকাশ কর]

Prove the following identities (নিম্নের অভেদগুলি প্রমাণ কর):

5. $\dfrac{\sin 2\theta}{1-\cos 2\theta}=\cot \theta.$

6. $\cot 2A+\tan A=\operatorname{cosec} 2A.$ [C. U. '47]

7. $\cos^4 A-\sin^4 A=\cos 2A.$

8. $\dfrac{1+\tan^2 A}{1-\tan^2 A}=\sec 2A.$

9. $\dfrac{\cos 2\theta}{1-\sin 2\theta}=\cot\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right).$

10. $\cot A+\cot (60^\circ+A)+\cot (120^\circ+A)=3 \cot 3A.$ [Pat. '45]

11. $\dfrac{\cos 3\theta+\sin 3\theta}{\cos \theta-\sin \theta}=1+2 \sin 2\theta.$

12. $\sin^3 A+\sin^3 (120^\circ+A)+\sin^3 (240^\circ+A)=-\frac{3}{4} \sin 3A.$ [P. U. '39]

12. (*a*) $4 (\cos^3 20^\circ+\sin^3 10^\circ)-3(\cos 20^\circ+\sin 10^\circ).$

13. $\tan \left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)-\tan \left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=2 \tan 2\theta.$

14. $\cos^3 A \cos 3A+\sin^3 A \sin 3A=\cos^3 2A.$ [P. U. '39, '43]

15. $\dfrac{\sin A+\sin 2A+\sin 4A+\sin 5A}{\cos A+\cos 2A+\cos 4A+\cos 5A}=\tan 3A.$

16. $\cos^2 A+\cos^2\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos^2 \left(A-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{2}.$ [C. U. '43]

17. $\cos 3\theta \sin 2\theta-\cos 4\theta \sin \theta=\dfrac{\cos 2\theta}{\operatorname{cosec} \theta}.$

18. $2 \operatorname{cosec} 2A=\tan A+\cot A.$ [B. H. U. '48]

19. $4 \sin^3\theta \cos 3\theta + 4 \cos^3\theta \sin 3\theta = 3 \sin 4\theta$.

[Hints : $4 \sin^3\theta = 3 \sin \theta - \sin 3\theta$, এবং

$4 \cos^3\theta = 3 \cos \theta + \cos 3\theta$]

20. $\dfrac{\sin (A+3B)+\sin (3A+B)}{\sin 2A+\sin 2B} = 2 \cos (A+B)$. [A. U. '47]

21. $\cos 4x - \cos 4y = 8(\cos x - \cos y)(\cos x + \cos y) \times (\cos x - \sin y)(\cos x + \sin y)$. [P. U. '36]

22. $\dfrac{\sin 4A (1-\cos 2A)}{\cos 2A (1-\cos 4A)} = \tan A$.

23. $\dfrac{1}{\tan 3\alpha - \tan \alpha} - \dfrac{1}{\cot 3\alpha - \cot \alpha} = \cot 2\alpha$.

24. If $2 \tan \alpha = 3 \tan \beta$, show that $\tan (\alpha - \beta) = \dfrac{\sin 2\beta}{5 - \cos 2\beta}$.

[C. U. '46 ; P. U. '47]

25. Find the value of $\cos^2\theta + \cos^2(120^\circ - \theta) + \cos^2(120^\circ + \theta)$.

26. If $\tan \theta = \sec 2\alpha$, prove that $\sin 2\theta = \dfrac{1 - \tan^4\alpha}{1 + \tan^4\alpha}$.

[P. U. 40]

27. If α and β are acute angles and $\cos 2\alpha = \dfrac{3 \cos 2\beta - 1}{3 - \cos 2\beta}$, show that $\tan \alpha = \sqrt{2} \tan \beta$. [C. U. '41]

28. If $\tan \theta = \frac{1}{7}$ and $\tan \phi = \frac{1}{3}$, show that $\cos 2\theta = \sin 4\phi$.

[A. U. '50]

29. If $\theta = \dfrac{\pi}{2^n + 1}$, prove that

$2^n \cos \theta \cos 2\theta \cos 2^2\theta \cdots \cos 2^{n-1}\theta = 1$.

30. Prove that $\dfrac{2 \cos 2^n\theta + 1}{2 \cos \theta + 1} = (2 \cos \theta - 1)(2 \cos 2\theta - 1) \times (2 \cos 2^2\theta - 1) \cdots (2 \cos 2^{n-1}\theta - 1)$.

Submultiple Angles

[অংশ কোণ]

কোন একটি কোণের ½ বা ⅓ অংশকে ঐ কোণের অংশ কোণ (Submultiple angle) বলা হয়। $\frac{A}{2}$, $\frac{A}{3}$ কোণ দুইটি A কোণের Submultiple angles.

21. গুণিতক কোণগুলি সম্বন্ধে আমরা নিম্নের সূত্রগুলি প্রমাণ করিয়াছি :—

(1) $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

(2) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$;

$[\,1 + \cos 2A = 2\cos^2 A\,;\ 1 - \cos 2A = 2\sin^2 A\,]$

(3) $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$.

কোন একটি কোণ অপর কোণের দ্বিগুণ হইলেই উপরের সূত্রগুলি সবক্ষেত্রে সিদ্ধ হইবে।

এক্ষণে, ঐ সূত্রগুলিতে A-এর স্থানে $\frac{A}{2}$ বসাইয়া (সুতরাং 2A এর স্থানে $2.\frac{A}{2}$ বা A বসাইয়া) যথাক্রমে নিম্নের সূত্রগুলি পাই :—

(1) $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$.

(2) $\cos A = \cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2} = 2\cos^2 \frac{A}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}$.

$\left[1 + \cos A = 2\cos^2 \frac{A}{2},\ 1 - \cos A = 2\sin^2 \frac{A}{2}\right]$

(3) $\tan A = \dfrac{2\tan \frac{A}{2}}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}$

22. গুণিতক কোণ সম্বন্ধে পূর্বে নিম্নের তিনটি সূত্রও প্রমাণিত হইয়াছে :—

(4) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

(5) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

(6) $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$.

কোন একটি কোণ অন্য একটি কোণের তিন গুণ হইলেই উপরের সূত্র গুলি সর্বক্ষেত্রে সিদ্ধ হইবে।

একণে ঐ সূত্রগুলিতে A এর স্থানে $\frac{A}{3}$ বসাইয়া (সুতরাং 3A এর স্থানে $3.\frac{A}{3}$ বা A বসাইয়া) পাই :—

(4) $\sin A = 3\sin\frac{A}{3} - 4\sin^3\frac{A}{3}$

(5) $\cos A = 4\cos^3\frac{A}{3} - 3\cos\frac{A}{3}$

(6) $\tan A = \dfrac{3\tan\frac{A}{3} - \tan^3\frac{A}{3}}{1 - 3\tan^2\frac{A}{3}}.$

অনুসিদ্ধান্ত : (i) $\because \sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$,

$\therefore$ A এর স্থানে $\frac{A}{2}$ বসাইয়া পাই $\sin A = \dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$

(ii) $\because \cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$, $\therefore \cos A = \dfrac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$.

23. cos A দ্বারা $\frac{A}{2}$ কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

$\because 1-\cos A = 2\sin^2\frac{A}{2}$ $\therefore \sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos A)$.

$\therefore \sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$ ...(i)

আবার, $\because 1+\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2}$. $\therefore \cos^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos A)$,

$\therefore \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos A)}$ ...(ii)

অতএব, $\tan\frac{A}{2}=\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}$ ... (iii)

[এখন অপর অনুপাতগুলি সহজেই নির্ণয় করা যাইবে।]

24. Ambiguity of signs (চিহ্ন সম্বন্ধে অনিশ্চয়তা)।

উপরের 23 অনুচ্ছেদে দেখা গেল যে cos A এর মান হইতে $\sin\frac{A}{2}$ ও $\cos\frac{A}{2}$এর দুইটি মান পাওয়া যায়। ঐ মান দুইটি সমান ও পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত। এইরূপ দুইটি মান প্রাপ্ত হওয়ার কারণ এই যে, যদি কেবল cos Aএর মান জানা থাকে, কিন্তু A সম্বন্ধে আর কিছু জানা না থাকে, তবে Aএর সুতরাং $\frac{A}{2}$এরও একটি মান-শ্রেণী হইতে পারে। যদি ঐ মান-শ্রেণীর ক্ষুদ্রতম কোণ α ধরা হয়, তবে $A=2n\pi\pm\alpha$ হইবে (এখানে n যে কোন পূর্ণসংখ্যা)।

অতএব, $\sin\frac{A}{2}$ ও $\cos\frac{A}{2}$এর মান নির্ণয় করিবার জন্য আমরা প্রকৃতপক্ষে $\sin\frac{1}{2}(2n\pi\pm\alpha)$ ও $\cos\frac{1}{2}(2n\pi\pm\alpha)$এর মান নির্ণয় করিতেছি।

এক্ষণে, $\sin\frac{1}{2}(2n\pi\pm\alpha)=\sin\left(n\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right)$

$$=\sin n\pi\cos\frac{\alpha}{2}\pm\cos n\pi\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sin\frac{\alpha}{2},$$

কারণ, $\sin n\pi=0$ এবং $\cos n\pi=\pm1$.

আবার, $\cos\frac{1}{2}(2n\pi\pm\alpha)=\cos\left(n\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right)$

$$=\cos n\pi\cos\frac{\alpha}{2}\mp\sin n\pi\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\cos\frac{\alpha}{2}.$$

অতএব, যদি A সম্বন্ধে আর কিছু জানা না থাকে এবং কেবল cos Aএর মান জানা থাকে, তবে $\sin\frac{A}{2}$ ও $\cos\frac{A}{2}$এর দুইটি করিয়া মান হইবে।

আর যদি Aএর মানও জানা থাকে, কিংবা Aর মানের সীমা (যথা 450° ও 540°এর মধ্যে ইত্যাদি) জানা থাকে, তবে $\sin\frac{A}{2}$ বা $\cos\frac{A}{2}$এর

মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে, সে বিষয়ে আর কোন অনিশ্চয়তা (ambiguity) থাকে না। তখন উহা কোন্ পাদে (quadrantএ) অবস্থিত জানা যাইবে এবং উহার signও নির্দিষ্ট হইবে।

উদাহরণ। $\cos 330° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ হইলে $\sin 165°$ ও $\cos 165°$এর মান নির্ণয় কর।

$$\sin 165° = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 330°}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{4-2\sqrt{3}}{4}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2} = \pm\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

আবার, $\cos 165° = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 330°)} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2}$

$$= \pm\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

এক্ষণে, 165° কোণ দ্বিতীয় পাদে (quadrantএ) অবস্থিত বলিয়া উহার sine ধনাত্মক এবং cosine ঋণাত্মক হইবে।

$\therefore\quad \sin 165° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, এবং $\cos 165° = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

25. $\sin A$ **দ্বারা** $\sin\frac{A}{2}$ ও $\cos\frac{A}{2}$**এর মান নির্ণয়।**

$\because\quad \sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2} = 1\cdots\cdots(1)$

এবং $2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \sin A\cdots(2)$

$\therefore$ (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2 = 1+\sin A,$$

$\therefore\quad \sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1+\sin A}\cdots\cdots(3)$

আবার, (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই

$$\left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)^2 = 1-\sin A,$$

$\therefore\quad \sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1-\sin A}\cdots\cdots(4)$

এক্ষণে, (3) ও (4) যোগ করিয়া পাই

$$2 \sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{1+\sin A} \pm \sqrt{1-\sin A},$$

$$\therefore \quad \sin \frac{A}{2} = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{1+\sin A} \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{1-\sin A} \cdots\cdots (5)$$

অনুরূপে (3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া পাই

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{1+\sin A} \mp \tfrac{1}{2} \sqrt{1-\sin A} \cdots\cdots (6).$$

26. Ambiguity of signs.

উপরের (5) ও (6) সূত্র দুইটি হইতে দেখা যায় যে, sin A-এর একটি মানের জন্য $\sin \frac{A}{2}$ বা $\cos \frac{A}{2}$-এর চারিটি মান হয়।

যদি কেবলমাত্র sin A-এর মান জানা থাকে, কিন্তু A কোণ সম্বন্ধে অন্য কিছু জানা না থাকে, তবে A-এর একটি মান-শ্রেণীর অন্তর্গত যে কোন মান হইতে পারে। মনে কর α ঐ মান-শ্রেণীর অন্তর্গত ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ। অতএব $A = n\pi + (-1)^n\alpha$, সুতরাং $\sin \frac{A}{2} = \sin \frac{1}{2}\{n\pi + (-1)^n\alpha\}$ এবং

$$\cos \frac{A}{2} = \cos \tfrac{1}{2}\{n\pi + (-1)^n\alpha\}.$$

এক্ষণে (i) যদি n জোড় অখণ্ড সংখ্যা হয়, মনে কর $n = 2m$.

$$\therefore \quad \sin \tfrac{1}{2}\{n\pi + (-1)^n\alpha\} = \sin\left\{m\pi + (-1)^{2m}\frac{\alpha}{2}\right\}$$

$$= \sin\left(m\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin m\pi \cos \frac{\alpha}{2} + \cos m\pi \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$= \pm \sin \frac{\alpha}{2} \quad [\because \quad \sin m\pi = 0 \text{ এবং } \cos m\pi = \pm 1]$$

(ii) যদি n বিজোড় অখণ্ড সংখ্যা হয়, মনে কর $n = 2m+1$.

$$\therefore \quad \sin \tfrac{1}{2}\{n\pi + (-1)^n\alpha\} = \sin \tfrac{1}{2}\{(2m+1)\pi + (-1)^{2m+1}\alpha\}$$

$$= \sin\left(m\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \quad [\because \quad (-1)^{2m+1} = -1]$$

$$= \sin m\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + \cos m\pi \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \pm \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

অতএব দেখা গেল যে, কেবল sin-এর মান জানা থাকিলে এবং A সম্বন্ধে আর কিছু জানা না থাকিলে $\sin\frac{A}{2}$এর চারিটি মান পাওয়া যায়।

অনুরূপে দেখা যায় যে, এইরূপ ক্ষেত্রে

$\cos\frac{A}{2}=\pm\cos\frac{\alpha}{2}$ বা $\pm\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)$, অর্থাৎ $\cos\frac{A}{2}$এরও চারিটি মান পাওয়া যায়।

এখন দেখ, $\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{A}{2}\right)$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\quad\left[\because\ \sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

$$\therefore\quad \sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}.$$

আবার, $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{A}{2}\right)$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\therefore\quad \sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A}.$$

অতএব, যদি A জানা থাকে, তবে $\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ ও $\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$এর sign (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) নির্দিষ্টভাবে জানা যায় এবং sign সম্বন্ধে আর কোন অনিশ্চয়তা থাকে না।

27. tan A দ্বারা $\tan\frac{A}{2}$এর মান নির্ণয়।

সূত্র হইতে পাই $\tan A=\dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$,

$$\therefore\quad \tan A-\tan A\tan^2\frac{A}{2}=2\tan\frac{A}{2}\ (\text{বজ্র গুণন দ্বারা}),$$

বা, $\tan A\tan^2\frac{A}{2}+2\tan\frac{A}{2}-\tan A=0$, ইহা একটি দ্বিঘাত-সমীকরণ, এই সমীকরণটি সমাধান করিয়া পাই,

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-(4\tan A)\times(-\tan A)}}{2\tan A}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\tan^2 A}}{2\tan A}=\frac{-2\pm 2\sqrt{1+\tan^2 A}}{2\tan A}$$

$$\frac{\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$$

[পূর্ব অনুচ্ছেদগুলিতে sign-এর অনিশ্চয়তা (ambiguity) সম্বন্ধে যে যুক্তি দেখান হইয়াছে, এস্থলেও তাহা প্রযোজ্য ।]

28. 18°, 36°, 54°, 72° কোণের কোণানুপাত নির্ণয় ।

(i) মনে কর, $A=18^\circ$, সুতরাং $5A=90^\circ$, $\therefore\ 2A=90^\circ-3A$.

$\therefore\ \sin 2A=\sin(90^\circ-3A)=\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$,

বা, $2\sin A\cos A=\cos A(4\cos^2 A-3)$.

এক্ষণে, $\because\ A=18^\circ\ \therefore\ \cos A\neq 0$,

$\therefore\ 2\sin A=4\cos^2 A-3=4(1-\sin^2 A)-3=1-4\sin^2 A$,

বা, $4\sin^2 A+2\sin A-1=0$.

$$\sin A=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times 4\times -1}}{2\times 4}=\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{8}$$

$$=\frac{-2\pm 2\sqrt{5}}{8}=\frac{\pm\sqrt{5}-1}{4}.$$

এখানে A একটি সূক্ষ্মকোণ বলিয়া sin A ধনাত্মক, সুতরাং উপরে লব্ধ মান দুইটির মধ্যে কেবল ধনাত্মক মানটিই গ্রহণ করিতে হইবে ।

$$\therefore\ \sin 18^\circ=\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1).$$

আবার, $\cos 18^\circ=+\sqrt{1-\sin^2 18^\circ}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}$

$$=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}=\tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

(ii) $\cos 36^\circ=\cos 2.18^\circ=1-2\sin^2 18^\circ$

$$=1-2\times\frac{6-2\sqrt{5}}{16}=\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1).$$

$\sin 36^\circ=\sqrt{1-\cos^2 36^\circ}=\sqrt{1-\tfrac{1}{16}(\sqrt{5}+1)^2}$

$$=\sqrt{1-\tfrac{1}{16}(6+2\sqrt{5})}=\tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

(iii) 54° কোণ 36° কোণের পূরক কোণ বলিয়া

$\sin 54° = \cos 36° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$

এবং $\cos 54° = \sin 36° = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

(iv) 72° কোণ 18° কোণের পূরক কোণ বলিয়া

$\sin 72° = \cos 18° = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$,

এবং $\cos 72° = \sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$.

উদাহরণমালা 5

উদা. 1. Find sin 15° and cos 15°.

$\cos 15° + \sin 15° = +\sqrt{1+\sin 30°} = \sqrt{1+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ...(i)

$\cos 15° - \sin 15° = +\sqrt{1-\sin 30°} = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ...(ii)

(i) ও (ii) যোগ করিয়া পাই $2\cos 15° = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$,

$$\therefore \quad \cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া পাই $2\sin 15° = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$.

$$\therefore \quad \sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

উদা. 2. Find $\sin\frac{\pi}{8}$ and $\cos\frac{\pi}{8}$.

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sin 22\tfrac{1}{2}° = +\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos 45°)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \cos 22\tfrac{1}{2}° = +\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos 45°)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

উদা. 3. Show that $\cos 7°30' = \frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

[Pat. '38]

$7°30' \times 2 = 15°$;

$$\therefore \quad 2\cos^2 7°30' = 1 + \cos 15° = 1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},$$

$\therefore \quad \cos^2 7°30' = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{8}(4+\sqrt{6}+\sqrt{2})$

[$\sqrt{2}$ দ্বারা লব ও হরকে গুণ করিয়া]

আবার, $\{\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)\sqrt{2+\sqrt{2}}\}^2$

$= \frac{1}{16}(6+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}-2\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$

$= \frac{1}{8}(3+\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3})(2+\sqrt{2}) = \frac{1}{8}(4+\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

$\therefore \quad \cos^2 7°30' = \{\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)\sqrt{2+\sqrt{2}}\}^2$

$\therefore \quad \cos 7°30' = \frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

উদা. 4. Find the ratios of 3° and multiples of 3°.

$\sin 3° = \sin(18°-15°) = \sin 18° \cos 15° - \cos 18° \sin 15°$

$= \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1).\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1).\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4}.\sqrt{2}.\ \sqrt{5+\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - \frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5+\sqrt{5}})$.

$\cos 3° = \cos(18°-15°) = \cos 18° \cos 15° + \sin 18° \sin 15°$

$= \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \times \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{8}(\sqrt{5+\sqrt{5}})(\sqrt{3}+1) + \frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

দ্রষ্টব্য : এ পর্যন্ত 3°, 15°, 18°, 30°, 36°, 45° কোণের কোণানুপাতগুলি পাওয়া গিয়াছে বলিয়া উহাদের সাহায্যে 3° কোণের যে কোন গুণিতক কোণের কোণানুপাতগুলিও জানা যাইবে। কারণ, 6° = 36° − 30° ; 9° = 45° − 36°, 12° = 30° − 18° ; 21° = 36° − 15° ; ইত্যাদি।

3°-র গুণিতক যদি 45° অপেক্ষা বড় হয়, তবে তাহার পূরক কোণ (complement) 45° অপেক্ষা ছোট হইবে, সুতরাং ঐ পূরক কোণের কোণানুপাত হইতে 45° অপেক্ষা বৃহত্তর 3°-র গুণিতক কোণগুলিরও কোণানুপাতগুলি জানা যাইবে।

উদা. 5. Show that $\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$.

বামপক্ষ $= \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$.

উদা. 6 Prove that $(\cos^2 66° - \sin^2 6°)(\cos^2 48° - \sin^2 12°) = \frac{1}{16}$.
[C. U. (B. Sc.) '49]

$\because$ $\cos 66° = \cos(90° - 24°) = \sin 24°$,

এবং $\cos 48° = \cos(90° - 42°) = \sin 42°$,

$\therefore$ প্রদত্ত বামপক্ষ $= (\sin^2 24° - \sin^2 6°)(\sin^2 42° - \sin^2 12°)$

$= \sin(24° + 6°)\sin(24° - 6°)\sin(42° + 12°)\sin(42° - 12°)$

[$\because$ $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B).\sin(A-B)$]

$= \sin 30° \sin 18° \sin 54° \sin 30°$

$= \frac{1}{2}.\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1).\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1).\frac{1}{2} = \frac{1}{64}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$

$= \frac{1}{64} \times 4 = \frac{1}{16}$.

উদা. 7. Show that $4(\cos^3 10° + \sin^3 20°)$
$= 3(\cos 10° + \sin 20°)$.

$\because$ $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$,

$\therefore$ $\cos 30° = 4\cos^3 10° - 3\cos 10°$ [$A = 10°$ ধরিয়া]

আবার, $\because$ $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$,

$\therefore$ $\sin 60° = 3\sin 20° - 4\sin^3 20°$ [$A = 20°$ ধরিয়া]

এক্ষণে, $4(\cos^3 10° + \sin^3 20°) = 4\cos^3 10° + 4\sin^3 20°$

$= \cos 30° + 3\cos 10° + 3\sin 20° - \sin 60°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + 3(\cos 10° + \sin 20°) - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 3(\cos 10° + \sin 20°)$.

উদা. 8. If $\cos A = \frac{4}{5}$ and $\cos B = \frac{3}{5}$, find the value of $\cos\frac{A-B}{2}$, A and B being positive acute angles.

$\because$ $\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\theta)}$,

$\therefore$ $\cos\frac{A-B}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\{1+\cos(A-B)\}}$ [$\theta = A - B$ ধরিয়া]

এক্ষণে, $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$, এবং

$\because$ $\cos A = \frac{4}{5}$, $\therefore$ $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A}$

$= \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$ [$\because$ A সূক্ষ্মকোণ]

এবং $\because \cos B=\frac{3}{5}$, $\therefore \sin B=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$ [$\because$ B সূক্ষ্মকোণ]

$\therefore \cos(A-B)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$.

এক্ষণে $\cos\frac{A-B}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{24}{25})}=\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{49}{25}}=\frac{7}{5}\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{7}{5\sqrt{2}}$.

উদা. 9. If $270°<\theta<360°$ and $\cos\theta=\frac{119}{169}$, find $\sin\frac{\theta}{2}$ and $\cos\frac{\theta}{2}$

$\because$ θ কোণ $270°$ অপেক্ষা বৃহত্তর, কিন্তু $360°$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর,

$\therefore$ $\frac{\theta}{2}$ অবশ্যই $135°$ অপেক্ষা বৃহত্তর, কিন্তু $180°$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

$\therefore$ এখানে $\sin\frac{\theta}{2}$ ধনাত্মক এবং $\cos\frac{\theta}{2}$ ঋণাত্মক হইবে।

এক্ষণে, $\sin\frac{\theta}{2}=+\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{119}{169}}{2}}=\sqrt{\frac{25}{169}}=\frac{5}{13}$

এক্ষণে, $\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\frac{119}{169}}{2}}=-\sqrt{\frac{144}{169}}=-\frac{12}{13}$

উদা. 10. Show that $\frac{2\sin A-\sin 2A}{2\sin A+\sin 2A}=\tan^2\frac{A}{2}$

বামপক্ষ$=\frac{2\sin A-2\sin A\cos A}{2\sin A+2\sin A\cos A}=\frac{2\sin A(1-\cos A)}{2\sin A(1+\cos A)}$

$$=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}=\tan^2\frac{A}{2}$$

উদা. 11 Prove that $(\cos A+\cos B)^2+(\sin A-\sin B)^2=4\cos^2\frac{A+B}{2}$.

বামপক্ষ$=\cos^2A+\cos^2B+2\cos A\cos B+\sin^2A+\sin^2B-2\sin A\sin B$

$=(\cos^2A+\sin^2A)+(\cos^2B+\sin^2B)+2(\cos A\cos B-\sin A\sin B)$

$=1+1+2\cos(A+B)=2+2\cos(A+B)$

$=2\{1+\cos(A+B)\}=2\times2\cos^2\frac{A+B}{2}=4\cos^2\frac{A+B}{2}$.

উদা. 12. If $A=240°$, is the statement (উক্তি)

$2\sin\frac{A}{2}=\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}$ correct? If not, how must it be modified (উক্তিটি যদি শুদ্ধ না হয়, তবে কি পরিবর্তন করিলে শুদ্ধ হইবে)?

এখানে $A=240°$, $\therefore\ \frac{A}{2}=120°$, সুতরাং $\sin\frac{A}{2}$ ধনাত্মক এবং $\cos\frac{A}{2}$ অপেক্ষা বৃহত্তর।

$$\therefore\quad \sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=+\sqrt{1+\sin A}\cdots\cdots(1)$$

এবং $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=+\sqrt{1-\sin A}\cdots\cdots(2)$

$\therefore$ (1)+(2) করিয়া $2\sin\frac{A}{2}=\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}$.

অতএব, এখানে প্রদত্ত statement শুদ্ধ নহে, উহার অমূলদ রাশি দুইটির মধ্যে — চিহ্ন স্থানে + চিহ্ন হইলে শুদ্ধ হইবে।

উদা. 13. If $\sec(\phi+\alpha)+\sec(\phi-\alpha)=2\sec\phi$, prove that $\cos\phi=\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. [**Pat** '44]

প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই $\frac{1}{\cos(\phi+\alpha)}+\frac{1}{\cos(\phi-\alpha)}=\frac{2}{\cos\phi}$,

বা, $\frac{\cos(\phi-\alpha)+\cos(\phi+\alpha)}{\cos(\phi+\alpha)\cos(\phi-\alpha)}=\frac{2}{\cos\phi}$,

বা, $\frac{2\cos\phi\cos\alpha}{\cos^2\phi-\sin^2\alpha}=\frac{2}{\cos\phi}$,

বা, $2\cos^2\phi-2\sin^2\alpha=2\cos^2\phi\cos\alpha$;

বা, $2\cos^2\phi-2\cos^2\phi\cos\alpha=2\sin^2\alpha$,

বা, $2\cos^2\phi(1-\cos\alpha)=2\sin^2\alpha$,

বা, $\cos^2\phi=\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}=1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

$$\therefore\quad \cos\phi=\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

উদা. 14. If $\tan A=\frac{\sin B\sin C}{\cos B+\cos C}$, prove that one of the values of $\tan\frac{A}{2}$ is $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$.

$\because \sec^2 A = 1+\tan^2 A,$

$\therefore$ এখানে $\sec^2 A = 1+\left(\frac{\sin B \sin C}{\cos B+\cos C}\right)^2$

$$=1+\frac{\sin^2 B \sin^2 C}{(\cos B+\cos C)^2}=\frac{(\cos B+\cos C)^2+\sin^2 B \sin^2 C}{(\cos B+\cos C)^2}$$

$$=\frac{(\cos B+\cos C)^2+(1-\cos^2 B)(1-\cos^2 C)}{(\cos B+\cos C)^2}$$

$$=\frac{\cos^2 B \cos^2 C+2\cos B\cos C+1}{(\cos B+\cos C)^2}=\frac{(1+\cos B\cos C)^2}{(\cos B+\cos C)^2},$$

$\therefore \sec A=\frac{1+\cos B\cos C}{\cos B+\cos C}, \quad \therefore \cos A=\frac{\cos B+\cos C}{1+\cos B\cos C},$

$\therefore$ Comp. & Div দ্বারা পাই

$$\frac{1-\cos A}{1+\cos A}=\frac{1+\cos B\cos C-\cos B-\cos C}{1+\cos B\cos C+\cos B+\cos C}$$

$$=\frac{(1-\cos B)(1-\cos C)}{(1+\cos B)(1+\cos C)},$$

$$\therefore \frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{B}{2}.\ 2\sin^2\frac{C}{2}}{2\cos^2\frac{B}{2}.\ 2\cos^2\frac{C}{2}}=\frac{\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}$$

$\therefore \tan^2\frac{A}{2}=\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2} \quad \therefore \tan\frac{A}{2}=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}.$

অতএব. $\tan\frac{A}{2}$এর একটি মান $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$ হইল।

Exercise 5

1. Find $\sin 9^\circ$ and $\cos 9^\circ$.
2. Prove that $\cos 15^\circ-\sin 15^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$. [B. H. U. '33]
3. Find the value of $\cos^2 48^\circ-\sin^2 12^\circ$.
4. Find the value of $\cos^2 36^\circ+\sin^2 18^\circ$.
5. Evaluate (মান নির্ণয় কর) $2\sin 75^\circ \sin 15^\circ$.
6. Show that $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\frac{\theta}{2}$.
7. Show that $\frac{\cos A}{1-\sin A}=\frac{\cot\frac{1}{2}A+1}{\cot\frac{1}{2}A-1}$.

8. If $\sin A=\frac{60}{61}$ and $\sin B=\frac{4}{5}$, find the value of $\sin^2\frac{A-B}{2}$ and $\cos^2\frac{A+B}{2}$, the angles A and B being positive acute angles (A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ)।

9. Show that $\cos^2 18^\circ \sin^2 36^\circ+\cos 36^\circ \sin 18^\circ=\frac{9}{16}$.

10. Find the value of $\sin^2 72^\circ \cos^2 54^\circ-\sin 54^\circ \cos 72^\circ$.
[C. U. (B. Sc.) '48]

11. If $\sin\alpha+\sin\beta=a$ and $\cos\alpha+\cos\beta=b$, find the values of $\cos(\alpha+\beta)$ and $\tan\frac{\alpha-\beta}{2}$.

12. If A lies between 450° and 630°, find $\sin\frac{A}{2}$ and $\cos\frac{A}{2}$ in terms of A.

Prove that :—

13. $\sec\theta+\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$. [C. U. '39]

14. $4(\cos^3 25^\circ+\cos^3 35^\circ)=3(\cos 25^\circ+\cos 35^\circ)$.

15. $\tan 6^\circ \tan 42^\circ \tan 66^\circ \tan 78^\circ=1$.

16. $\tan\frac{A+B}{2}+\tan\frac{A-B}{2}=\frac{2\sin A}{\cos A+\cos B}$. [B. H. U. '39]

17. $\cos\frac{1}{2}(\phi-\theta)-\sin\theta\sin\frac{1}{2}(\phi+\theta)=\cos\theta\cos\frac{1}{2}(\phi+\theta)$.
[C. U. '50]

18. $16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15}=1$. [B. H. U. '47]

19. $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$.
[Pat '38 ; B. H. U. '46]

20. $(\cos x+\cos y)^2+(\sin x+\sin y)^2=4\cos^2\frac{1}{2}(x-y)$.

21. If $\theta=340^\circ$, is the statement (উক্তি)
$2\sin\frac{\theta}{2}=-\sqrt{1+\sin\theta}-\sqrt{1-\sin\theta}$ correct? If not, how must it be modified (যদি উহা শুদ্ধ না হয়, তবে কি পরিবর্তন করিলে শুদ্ধ হইবে)?

22. If $A=320°$, prove that $\tan\frac{A}{2}=\frac{-1+\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$.

23. If $\cos\theta=\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta}$, prove that one value of $\tan\frac{\theta}{2}$ is $\tan\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}$. [Pat. '42]

24. If $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$, and α lies between 180° and 270°, find the values of $\sin\frac{\alpha}{2}$ and $\cos\frac{\alpha}{2}$. [Pat. '42]

25. Prove that $2\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}$ and determine which are the correct signs when $270°>A>180°$.
[এবং $270°>A>180°$ হইলে শুদ্ধ চিহ্নগুলি কি হইবে ?] [B. H. U. '31]

26. If $\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\cdot\tan\frac{\phi}{2}$, show that $\cos\phi=\frac{\cos\theta-e}{1-e\cos\theta}$.
[H. S. '67 ; Pat. '40 ; A. U. '44, '46]

[Hints : $\tan\frac{\phi}{2}=\frac{\sqrt{1+e}\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-e}\cos\frac{\theta}{2}}$,

বা, $\frac{1}{\tan^2\frac{\phi}{2}}=\frac{(1-e)\cos^2\frac{\theta}{2}}{(1+e)\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$\therefore\ \frac{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}{1+\tan^2\frac{\phi}{2}}=\frac{(1-e)\cos^2\frac{\theta}{2}-(1+e)\sin^2\frac{\theta}{2}}{(1-e)\cos^2\frac{\theta}{2}+(1+e)\sin^2\frac{\theta}{2}}$

আবার, $\cos\phi=\frac{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}{1+\tan^2\frac{\phi}{2}}$, $\therefore\ \cos\phi=\cdots\cdots$]

27. Show that

$\sin x=2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}$.

Trigonometrical Identities

(অভেদাবলী)

29 তিন বা ততোধিক কোণ কোন সম্বন্ধযুক্ত হইলে সেইগুলির কোণানুপাত সংক্রান্ত অনেক অভেদাবলী পাওয়া যায়। বিশেষতঃ যদি তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ (180° বা π) হয়, তবে সেই কোণগুলির কোণানুপাত সংক্রান্ত অনেক প্রয়োজনীয় অভেদ পাওয়া যায়। আমরা এখানে সেইগুলি সম্বন্ধে আলোচনা করিব। এই অভেদগুলি প্রমাণ করিতে পূর্বের পূরক ও সম্পূরক কোণগুলি (Complementary and Supplementary angles) সম্বন্ধে যে সকল সিদ্ধান্ত স্থাপিত হইয়াছে, সেইগুলি বিশেষ আবশ্যক হইবে।

(1) যদি $A+B+C=\pi=180^\circ$ হয়, তবে উহাদের মধ্যে যে কোন দুইটি কোণের সমষ্টি তৃতীয় কোণের সম্পূরক হইবে। অর্থাৎ

$$A+B=180^\circ-C=\pi-C,\ B+C=180^\circ-A,\ A+C=180^\circ-B.$$

অতএব, (i) $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C.$

(ii) $\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$

(iii) $\sin C=\sin(A+B).$

(iv) $\cos C=-\cos(A+B).$

(v) $\tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C$

(vi) $\cot(A+B)=-\cot C.$

(2) যদি $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ=\frac{\pi}{2}$ হয় ($A+B+C=180^\circ$ হইতেও এই সম্বন্ধ পাওয়া যায়) তবে $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ ও $\frac{C}{2}$-এর প্রত্যেকটি অপর দুইটির সমষ্টির পূরক কোণ হইবে, অর্থাৎ $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$, $\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}$ এবং $\frac{C}{2}+\frac{A}{2}=90^\circ-\frac{B}{2}$.

অতএব, (i) $\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$,

(ii) $\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}$,

(iii) $\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}$,

(iv) $\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B+C}{2}$, $\cos\frac{A}{2}=\sin\frac{B+C}{2}$,

$\tan\frac{A}{2}=\cot\frac{B+C}{2}$, ইত্যাদি।

উপরের 29 অনুচ্ছেদের সূত্রগুলি ও পূর্ব-প্রমাণিত সূত্রগুলি বিশেষ প্রয়োজনীয়। ঐগুলির সাহায্যে নিম্নের অভেদগুলি প্রমাণ করা হইয়াছে।

উদাহরণমালা 6

উদা. 1. If $A+B+C=\pi$ prove that

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$.

[C. Pre. U. '64 ; C. U. '33, '37, '38, '53]

বামপক্ষ $=(\sin 2A+\sin 2B)+\sin 2C$

$=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$=2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

[$\because A+B=180^\circ-C$, $\therefore \sin(A+B)=\sin C$]

$=2\sin C\{\cos(A-B)+\cos C\}$

$=2\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$

[$\because \cos C=-\cos(A+B)$]

$=2\sin C\times 2\sin A\sin B=4\sin A\sin B\sin C$.

উদা. 2. If $A+B+C=\pi$, prove that

$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-4\cos A\cos B\cos C-1$.

বামপক্ষ $=(\cos 2A+\cos 2B)+\cos 2C$

$=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C-1$

$=-2\cos C\cos(A-B)+2\cos^2 C-1$

[$\because \cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$]

$=-2\cos C\{\cos(A-B)-\cos C\}-1$

$=-2\cos C\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}-1$

[$\because -\cos C=\cos(A+B)$]

$=-2\cos C\times 2\cos A\cos B-1$

$=-4\cos A\cos B\cos C-1$.

উদা. 3. If $A+B+C=180°$, show that $\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A \tan 2B \tan 2C$.

$$\tan(2A+2B)=\frac{\tan 2A+\tan 2B}{1-\tan 2A \tan 2B}.$$

এক্ষণে, $\because \quad 2A+2B+2C=360°$,

$\therefore \quad 2A+2B=360°-2C, \quad \therefore \quad \tan(2A+2B)=\tan(360°-2C)$
$=-\tan 2C.$

অতএব, $\quad -\tan 2C=\dfrac{\tan 2A+\tan 2B}{1-\tan 2A \tan 2B}$

$\therefore \quad \tan 2A+\tan 2B=-\tan 2C+\tan 2A \tan 2B \tan 2C.$

[বজ্র গুণন দ্বারা]

$\therefore \quad \tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A \tan 2B \tan 2C.$

উদা. 4. If $A+B+C=\pi$, prove that

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

[C. U. '29, '50]

বামপক্ষ $=(\sin A+\sin B)+\sin C$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\left[\because \quad \frac{A+B}{2}=90°-\frac{C}{2}\right]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\left[\because \quad \frac{A}{2}+\frac{B}{2}=90°-\frac{C}{2}\right]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\times 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

উদা. 5. If $A+B+C=\pi$, prove that

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

বামপক্ষ $=(\cos A+\cos B)+\cos C$

$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$

$\left[\because \quad \cos C=1-2\sin^2\frac{C}{2}\right]$

$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}+1$

$\left[\because \quad \frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}, \qquad \cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}\right]$

$=2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)+1$

$=2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)+1$

$=2\sin\frac{C}{2}\times 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+1$

$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1$

উদা. 6. If $A+B+C=\pi$, prove that

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$ [C. U.]

$\because \quad A+B+C=\pi, \quad \therefore \quad A+B=\pi-C,$

$\therefore \quad \tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C,$

$\therefore \quad \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C,$

বা, $\tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C$

[বজ্র গুণন দ্বারা]

$\therefore \quad \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$

উদা. 7. If $A+B+C=\pi$, show that

$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=1+4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}.$

ডানপক্ষের $4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}$

$=2\sin\frac{\pi-A}{4}\left(2\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}\right)$

$$=2\sin\frac{\pi-A}{4}\left\{\cos\frac{B-C}{4}-\cos\frac{2\pi-(B+C)}{4}\right\}$$

$$=2\sin\frac{\pi-A}{4}\left\{\cos\frac{B-C}{4}-\cos\frac{2\pi-(\pi-A)}{4}\right\}$$

$$=2\sin\frac{\pi-A}{4}\left\{\cos\frac{B-C}{4}-\cos\frac{\pi+A}{4}\right\}$$

$$=2\sin\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{B-C}{4}-2\sin\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi+A}{4}$$

$$=\left(\sin\frac{\pi-A+B-C}{4}+\sin\frac{\pi-A-B+C}{4}\right)-\left(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{-2A}{4}\right)$$

$$=\sin\frac{2B}{4}+\sin\frac{2C}{4}-\sin\frac{\pi}{2}-\left(-\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$=\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}-1+\sin\frac{A}{2}\left[\because\quad \sin\frac{\pi}{2}=1\right]$$

$$\therefore\ \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=1+4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}.$$

উদা. 8. If $A+B+C=\pi$, prove that

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}.$$

ডানপক্ষ $=2\cos\frac{\pi-A}{4}\left(2\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}\right)$

$$=2\cos\frac{\pi-A}{4}\left\{\cos\frac{2\pi-(B+C)}{4}+\cos\frac{B-C}{4}\right\}$$

$$=2\cos\frac{\pi-A}{4}\left\{\cos\frac{2\pi-(\pi-A)}{4}+\cos\frac{B-C}{4}\right\}$$

$$=2\cos\frac{\pi-A}{4}\left(\cos\frac{\pi+A}{4}+\cos\frac{B-C}{4}\right)$$

$$=2\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi+A}{4}+2\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{B-C}{4}$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)+2\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{B-C}{4}$$

$$=\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\left[\because\quad \cos\frac{\pi}{2}=0\right].$$

উদা. 9. If $A+B+C=\pi$, prove that

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1.$$

[C. U. 36, '39]

$\because \quad A+B+C=\pi=180^\circ,$

$\therefore \quad \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ,$ বা, $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}.$

$\therefore \quad \tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\tan\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)=\cot\frac{C}{2},$

বা, $\dfrac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\cot\frac{C}{2}=\dfrac{1}{\tan\frac{C}{2}},$

বা, $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$

[বজ্র গুণন দ্বারা]

$\therefore \quad \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1.$

উদা. 10. If $A+B+C=\pi$, prove that

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C.$$

[C. U. ; Pat. U.]

$\because \quad \cos 2A=1-2\sin^2 A, \quad \therefore \quad 2\sin^2 A=1-\cos 2A$

$\therefore \quad \sin^2 A=\frac{1}{2}(1-\cos 2A).$ অনুরূপে $\sin^2 B=\frac{1}{2}(1-\cos 2B).$

এক্ষণে, $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$

$=\frac{1}{2}(1-\cos 2A)+\frac{1}{2}(1-\cos 2B)+\sin^2 C$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\sin^2 C$

$=1-\frac{1}{2}\times 2\cos(A+B)\cos(A-B)+1-\cos^2 C$

$=2-\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos^2 C$

$=2+\cos C\cos(A-B)-\cos^2 C$

[$\because \quad \cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$]

$=2+\cos C\{\cos(A-B)-\cos C\}$

$=2+\cos C\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}$

$=2+\cos C\times 2\cos A\cos B=2+2\cos A\cos B\cos C.$

উদা. 11. **If $A+B+C=\pi$, prove that**

$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1.$

[C. U. '37, '47]

$\because \quad \cos 2A=2\cos^2 A-1,$

$\therefore \quad 2\cos^2 A=1+\cos 2A,$

$\therefore \quad \cos^2 A=\frac{1}{2}(1+\cos 2A).$

অনুরূপে, $\cos^2 B=\frac{1}{2}(1+\cos 2B).$

এক্ষণে, $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$

$=\frac{1}{2}(1+\cos 2A+1+\cos 2B)+\cos^2 C$

$=1+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\cos^2 C$

$=1+\frac{1}{2}\times 2\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2 C$

$=1+\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2 C$

$=1-\cos C\cos(A-B)+\cos^2 C$

$[\because \quad A+B=\pi-C, \quad \therefore \quad \cos(A+B)=-\cos C]$

$=1-\cos C\{\cos(A-B)-\cos C\}$

$=1-\cos C\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}$

$=1-\cos C\times 2\cos A\cos B=1-2\cos A\cos B\cos C.$

$\therefore \quad \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1.$

উদা. 12. **If $A+B+C=180°$, show that**

$\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

বামপক্ষ $=(\sin A+\sin B)-\sin C$

$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\left[\because \quad \frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right]$

$=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)$

$=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$

$=2\cos\frac{C}{2}\times 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

উদা. 13. If $A+B+C=\frac{\pi}{2}$, prove that

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin A\sin B\sin C=1$. [C. U. '38]

$\because\ \cos 2A=1-2\sin^2 A,\quad \therefore\ 2\sin^2 A=1-\cos 2A.$

$\therefore\ \sin^2 A=\frac{1}{2}(1-\cos 2A)$. অনুরূপে $\sin^2 B=\frac{1}{2}(1-\cos 2B)$.

এক্ষণে, $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$

$=\frac{1}{2}(1-\cos 2A+1-\cos 2B)+\sin^2 C$

$=1-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\sin^2 C$

$=1-\frac{1}{2}\times 2\cos(A+B)\cos(A-B)+\sin C.\sin C$

$=1-\sin C\cos(A-B)+\sin C.\cos(A+B)$

$$\left[\because\ A+B=\frac{\pi}{2}-C,\ \therefore\ \cos(A+B)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=\sin C.\right]$$

$=1-\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$

$=1-\sin C\times 2\sin A\sin B=1-2\sin A\sin B\sin C.$

$\therefore\ \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin A\sin B\sin C=1.$

উদা. 14 If $A+B+C=180°$, show that

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}=\sin A+\sin B+\sin C.$$

$\because\ A+B+C=180°,\quad \therefore\ \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90°,$

$\therefore\ \cos\frac{A}{2}=\cos\left\{90°-\left(\frac{B+C}{2}\right)\right\}=\sin\frac{B+C}{2}$

অনুরূপে, $\cos\frac{B}{2}=\sin\frac{C+A}{2}$ এবং $\cos\frac{C}{2}=\sin\frac{A+B}{2}$.

এক্ষণে, প্রদত্ত বামপক্ষ $=\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\sin\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2}$
$+\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$=\frac{1}{2}(\sin B+\sin C)+\frac{1}{2}(\sin C+\sin A)$
$+\frac{1}{2}(\sin A+\sin B)=\sin A+\sin B+\sin C.$

উদা. 15. If $A+B+C=2\pi$, show that

$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-2\cos A\cos B\cos C=1.$

$\because\ A+B+C=2\pi=360°,\quad \therefore\ A+B=360°-C.$

$\therefore\ \cos(A+B)=\cos(360°-C)=\cos C.$

এক্ষণে, $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$

$$=\tfrac{1}{2}(1+\cos 2A+1+\cos 2B)+\cos^2 C$$
$$=1+\tfrac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\cos^2 C$$
$$=1+\tfrac{1}{2}\times 2\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2 C$$
$$=1+\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos C.\cos C$$
$$=1+\cos C\cos(A-B)+\cos C\cos(A+B)$$
$$=1+\cos C\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}$$
$$=1+\cos C\times 2\cos A\cos B=1+2\cos A\cos B\cos C.$$

$\therefore\quad \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-2\cos A\cos B\cos C=1.$

উদা. 16. **If $A+B+C=\pi$, show that**

$$\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin A+\sin B+\sin C}=8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$ [উদা. 1 দেখ]

$$=4\times 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\times 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\times 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=32\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

আবার, $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

[উদা. 4 দেখ]

প্রদত্ত বামপক্ষ $=\dfrac{32\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

$$=8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

উদা. 17. **If $A+B+C=2\theta$, prove that**

$$\cos^2\theta+\cos^2(\theta-A)+\cos^2(\theta-B)+\cos^2(\theta-C)$$
$$=2+2\cos A\cos B\cos C.$$

$\because\quad \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1,\quad \therefore\quad \cos^2\theta=\tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta).$

এক্ষণে প্রদত্ত বামপক্ষ $=\frac{1}{2}\{(1+\cos 2\theta)+1+\cos(2\theta-2A)$
$+1+\cos(2\theta-2B)+1+\cos(2\theta-2C)$

$=\frac{1}{2}\{4+2\cos\frac{2\theta+2\theta-2A}{2}\cos\frac{2\theta-2\theta+2A}{2}+$
$2\cos\frac{4\theta-2B-2C}{2}\cos(B-C)\Big\}$

$=2+\cos(2\theta-A)\cos A+\cos(2\theta-B-C)\cos(B-C)$

$=2+\cos(B+C)\cos A+\cos A\cos(B-C)$

[$\because$ $2\theta-A=B+C$ এবং $2\theta-B-C=A$]

$=2+\cos A\{\cos(B+C)+\cos(B-C)\}$

$=2+\cos A\times 2\cos B\cos C=2+2\cos A\cos B\cos C.$

উদা. 18. If $\cos A+\cos B+\cos C=0$, **show that**
$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=12\cos A\cos B\cos C.$

বামপক্ষ $=4\cos^3 A-3\cos A+4\cos^3 B-3\cos B$
$+4\cos^3 C-3\cos C$

$=4(\cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C)-3(\cos A+\cos B+\cos C)$

$=4\times 3\cos A\cos B\cos C-3\times 0$ [$\because\cos A+\cos B+\cos C=0$
$\therefore$ $\cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C=3\cos A\cos B\cos C$]

$=12\cos A\cos B\cos C.$

উদা. 19, **If** $x+y+z=xyz$, **prove that**
$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz.$

মনে কর, $x=\tan A$, $y=\tan B$ এবং $z=\tan C$.

$\because$ $x+y+z=xyz,$

$\therefore$ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C,$

বা $\tan A-\tan A\tan B\tan C=-(\tan B+\tan C),$

বা, $\tan A(1-\tan B\tan C)=-(\tan B+\tan C)$

বা, $\tan A=-\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=-\tan(B+C)=\tan\{\pi-(B+C)\}$

$\therefore$ $A=\pi-(B+C)$, $\therefore$ $A+B+C=\pi.$

$\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A\tan 2B\tan 2C$ [উদা. 3 দেখ]

বা, $\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}+\dfrac{2\tan B}{1-\tan^2 B}+\dfrac{2\tan C}{1-\tan^2 C}$

$=\dfrac{8\tan A\tan B\tan C}{(1-\tan^2 A)(1-\tan^2 B)(1-\tan^2 C)}.$

বা, $\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{8xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$.

বা, $\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$

. $x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-x^2)(1-z^2)+z(1-x^2)(1-y^2)$
$=4xyz$ [উভয় পক্ষকে $(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)$ দ্বারা গুণ করিয়া].

উদা. 20. If $x+y+z=xyz$, prove that

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{3y-y^3}{1-3y^2}+\frac{3z-z^3}{1-3z^2}=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\cdot\frac{3y-y^3}{1-3y^2}\cdot\frac{3z-z^3}{1-3z^2}.$$

মনে কর, $x=\tan A$, $y=\tan B$ এবং $z=\tan C$.

$\because\ x+y+z=xyz$,

$\therefore\ \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

$\therefore\ \tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C=0$ ...(1)

এক্ষণে, $\tan(A+B+C)=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}$

$=0$ [$\because$ (1) হইতে পাই লবটি $=0$]

$=\tan 180°$.

$\therefore\ A+B+C=n\pi$ (এখানে n যে কোন অখণ্ড সংখ্যা),

$\therefore\ 3A+3B+3C=3n\pi$, বা, $3A+3B=3n\pi-3C$.

$\therefore\ \tan(3A+3B)=\tan(3n\pi+3C)=-\tan 3C$.

আবার, $\tan(3A+3B)=\frac{\tan 3A+\tan 3B}{1-\tan 3A\tan 3B}$,

$\therefore\ \frac{\tan 3A+\tan 3B}{1-\tan 3A\tan 3B}=-\tan 3C$,

$\therefore\ \tan 3A+\tan 3B=-\tan 3C+\tan 3A\tan 3B\tan 3C$

$\therefore\ \tan 3A+\tan 3B+\tan 3C=\tan 3A\tan 3B\tan 3C$ ...(2)

এক্ষণে, $\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$ [$\because x=\tan A$].

$\tan 3B=\frac{3\tan B-\tan^3 B}{1-3\tan^2 B}=\frac{3y-y^3}{1-3y^2}$ [$\because y=\tan B$]

অনুরূপে, $\tan 3C=\frac{3z-z^3}{1-3z^2}$. $\therefore$ (2) হইতে পাই

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{3y-y^3}{1-3y^2}+\frac{3z-z^3}{1-3z^2}=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\cdot\frac{3y-y^3}{1-3y^2}\cdot\frac{3z-z^3}{1-3z^2}.$$

Exercise 6

If $A+B+C=\pi$, prove that :

1. $\sin 2A-\sin 2B+\sin 2C=4\cos A\sin B\cos C$.

2. $\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C+4\sin A\sin B\cos C=1$.

3. $\cos A+\cos B-\cos C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1$.

4. $\sin^2 A-\sin^2 B+\sin^2 C=2\sin A\sin C\cos B$.
[Pat. U. '40]

5. $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$.

6. $\dfrac{\sin B+\sin C-\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C}=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$.

7. $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$. [C.U. '55]

8. $\cos^2 A+\cos^2 B+2\cos A\cos B\cos C=\sin^2 C$.
[C. U. '30]

9. $\dfrac{1+\cos A-\cos B+\cos C}{1+\cos A+\cos B-\cos C}=\tan\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$.

10. $1-2\sin B\sin A\cos C+\cos^2 C=\cos^2 A+\cos^2 B$.

11. $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.
[C. U. '48]

12. $\dfrac{\cos A}{\sin B\sin C}+\dfrac{\cos B}{\sin C\sin A}+\dfrac{\cos C}{\sin A\sin B}=2$. [C. U. '49]

13. $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=1+4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}$.
[Pat. '39]

14. $\dfrac{\cot A+\cot B}{\tan A+\tan B}+\dfrac{\cot B+\cot C}{\tan B+\tan C}+\dfrac{\cot C+\cot A}{\tan C+\tan A}=1$.

15. $\sin(B+2C)+\sin(C+2A)+\sin(A+2B)$
$=4\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2}$.

16. $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

[Pat. '42]

17. If $A+B+C=\pi$, and $\cos A=\cos B\cos C$, show that $\tan A=\tan B+\tan C$. [C. U. '42]

If $A+B+C=\frac{\pi}{2}$ prove that :

18. $\cot A+\cot B+\cot C=\cot A\cot B\cot C$.

19. $\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A=1$. [Pat. '39]

20. $\frac{\cos A+\sin B+\sin C}{\sin A+\cos B+\sin C}=\frac{1-\tan\frac{1}{2}A}{1-\tan\frac{1}{2}B}$.

21. If $A+B=C$, prove that $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$
$-2\cos A\cos B\cos C=1$. [Pat. '43]

22. If $A=B+C$, shew that $\sin(A+B+C)+\sin(A+B-C)$
$+\sin(A-B+C)=4\sin A\cos B\cos C$.

23. If $\alpha+\beta+\gamma=0$, prove that $1+2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha+\cos^2\alpha$
$=\cos^2\beta+\cos^2\gamma$.

24. If $A+B+C=2S$, shew that
$\sin(S-A)\sin(S-B)+\sin S\sin(S-C)=\sin A\sin B$.

25. If $A+B+C=180°$, and $\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)=n\sin\frac{C}{2}$,

show that $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{n-1}{n+1}$. [P. U. '45]

26. If $A+B+C+D=2\pi$, prove that
$\frac{\tan A+\tan B+\tan C+\tan D}{\cot A+\cot B+\cot C+\cot D}=\tan A\tan B\tan C\tan D$.

27. If $\cos(A+B)\sin(C+D)=\cos(A-B)\sin(C-D)$,
show that $\cot A\cot B\cot C=\cot D$. [C. U. '30]

28. If α, β and θ be the angles of a triangle, show that
$\cos^2 2\alpha+\cos^2 2\beta+\cos^2 2\theta=1+2\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\theta$.

29. If A, B, C and D be the angles of a quadrilateral, prove that $\cos A+\cos B+\cos C+\cos D$

$$+4\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A+C)\cos\tfrac{1}{2}(A+D)=0.$$

30. If $x+y+z=xyz$, prove that

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}.$$

[U. P. B. '52]

চতুর্থ অধ্যায়

GEOMETRY

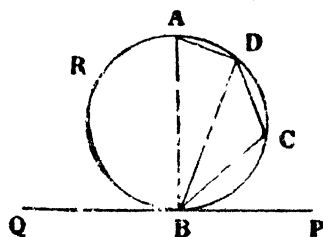
[জ্যামিতি]

উপপাদ্য 1

The angles made by a tangent to a circle with a chord drawn through the point of contact are respectively equal to the angles in the alternate segments of the circle.

[একটি বৃত্তের কোন স্পর্শক ও স্পর্শবিন্দুগামী কোন জ্যা-এর অন্তর্ভূত কোণ দুইটি যথাক্রমে একান্তর বৃত্তাংশস্থিত কোণের সমান হইবে।]

BRD বৃত্তের B বিন্দুতে PQ একটি স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দু B হইতে BD জ্যা টানা হইয়াছে। মনে কর, BRD চাপের অনুবন্ধী চাপের উপর C একটি বিন্দু

(চিত্র নং 1)

প্রমাণ করিতে হইবে যে, (i) ∠PBD = BRD এই একান্তস্থ বৃত্তাংশস্থিত কোণ, এবং (ii) ∠QBD = BCD এই একান্তর বৃত্তাংশস্থিত কোণ।

অঙ্কন : B বিন্দু হইতে বৃত্তের ব্যাস BA টান। AD, DC ও BC যোগ কর।

প্রমাণ : (i) ∵ ∠ADB অর্ধবৃত্তস্থ কোণ, ∴ ∠ADB এক সমকোণ।

∴ ∠ABD + ∠BAD = এক সমকোণ।

আবার, ∵ একই B বিন্দুতে PQ স্পর্শক এবং BA বৃত্তের ব্যাস, ∴ AB⊥PQ.

∴ ∠PBA = এক সমকোণ, অর্থাৎ ∠ABD + ∠PBD = এক সমকোণ।

∴ ∠ABD + ∠PBD = ∠ABD + ∠BAD.

∴ ∠PBD = ∠BAD এবং ইহা BRD এই একান্তর বৃত্তাংশস্থিত কোণ।

(ii) ∵ ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

∴ ∠BCD + ∠BAD = 2 সমকোণ।

আবার, ∠PBD + ∠QBD = 2 সমকোণ।

∴ ∠PBD + ∠QBD = ∠BCD + ∠BAD ;

কিন্তু ∠PBD = ∠BAD (পূর্বে প্রমাণিত),

∴ ∠QBD = ∠BCD এবং ইহা BCD এই একান্তর বৃত্তাংশস্থিত কোণ।

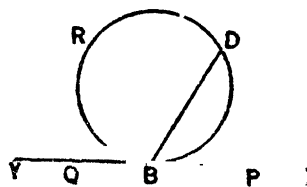
একই বৃত্তাংশস্থ কোণগুলি সমান হয়, সুতরাং PBD-কোণ BRD-বৃত্তাংশস্থ BAD-কোণের সহিত সমান হওয়ায় উহা ঐ বৃত্তাংশস্থ যে কোন কোণের সমান হইল। অনুরূপে QBD-কোণও BCD-বৃত্তাংশস্থ যে-কোন কোণের সমান।

বিপরীত উপপাদ্য

যদি বৃত্তের কোন জ্যাএর একটি প্রান্তবিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা টানায় ঐ রেখা ও জ্যাএর অন্তর্ভূত কোণ একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণের সমান হয়, তবে ঐ সরলরেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

[ইহা উপপাদ্য 1-এর বিপরীত উপপাদ্য]

BRD বৃত্তের BD একটি জ্যা এবং B বিন্দু দিয়া PQ এরূপ একটি সরলরেখা টানা হইয়াছে যে, ∠PBD=BRD এই একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, PQ ঐ বৃত্তটির স্পর্শক।

(চিত্র নং 2)

অঙ্কন : B বিন্দুতে বৃত্তটির একটি স্পর্শক XY টান।

প্রমাণ : ∵ XY বৃত্তের B বিন্দুতে স্পর্শক এবং BD স্পর্শ-বিন্দুগামী জ্যা,
∴ ∠XBD=BRD এই একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ ;
কিন্তু ∠PBD=BRD বৃত্তাংশস্থ কোণ (স্বীকার),
∴ ∠PBD=∠XBD, ∴ PB ও XY একই সরলরেখা,
∴ PQ ঐ বৃত্তের স্পর্শক।

বিবিধ উদাহরণ 1

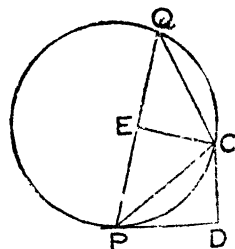
উদা. 1. Show that the perpendiculars dropped on the tangent and the chord through the point of contact, from the middle point of either arc cut off by the chord, are equal. [C. U. 1915]

[কোন বৃত্তে একটি স্পর্শক ও স্পর্শবিন্দু দিয়া একটি জ্যা টানা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, ঐ জ্যা দ্বারা ছিন্ন যে কোন চাপের মধ্যবিন্দু হইতে ঐ স্পর্শকের উপর ও জ্যাএর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় সমান হইবে।]

PD, বৃত্তটির একটি স্পর্শক এবং PQ স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা। PQ চাপের মধ্যবিন্দু C হইতে PD ও PQ-এর উপর যথাক্রমে CD ও CE লম্ব টানা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, CD=CE.

PC ও QC যোগ কর।

(চিত্র নং 3)

প্রমাণ : ∵ চাপ PC=চাপ QC,
∴ ∠PQC=∠QPC. আবার PD স্পর্শক ও PC একটি স্পর্শ-বিন্দুগামী জ্যা বলিয়া ∠CPD=একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠PQC.

∴ $\angle CPD = \angle QPC$. এখন, $\triangle EPC$ ও $\triangle PCD$এর $\angle E = \angle D$ (সমকোণ), $\angle EPC = \angle CPD$ এবং PC বাহু সাধারণ,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ $CD = CE$.

উদা. 2. AB, a diameter of a circle, is produced to meet the tangent at C in D. Show that $\angle BDC + 2\angle BCD$ is a right angle.

[একটি বৃত্তের AB ব্যাসকে বর্ধিত করায় উহা বৃত্তের C বিন্দুস্থ স্পর্শককে D বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, $\angle BDC + 2\angle BCD$ এক সমকোণ।]

ABর মধ্যবিন্দু O লও, উহাই বৃত্তের কেন্দ্র হইল। OC ও BC যোগ কর।

প্রমাণ : ∵ $OB = OC$, ∴ $\angle OCB = \angle OBC$.

$\triangle BCD$র বহিঃস্থ $\angle OBC = \angle BCD + \angle BDC$. ∴ $\angle OCB = \angle BCD + \angle BDC$. উভয়দিকে $\angle BCD$ যোগ করিলে, $\angle OCB + \angle BCD = 2\angle BCD + \angle BDC$; কিন্তু CD স্পর্শক ও CO স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ বলিয়া $\angle OCB + \angle BCD$ অর্থাৎ সমগ্র $\angle OCD$ এক সমকোণ।

∴ $\angle BDC + 2\angle BCD = 1$ সমকোণ।

উদা. 3. Two circles intersect at A and B ; and through P, any point on the circumference of one of them, straight lines PAC, PBD are drawn to cut the other circle at C and D Show that CD is parallel to the tangent at P.

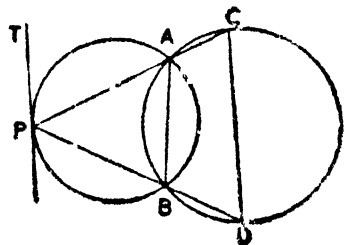
[H. S. '63 ; C. U. '35]

[দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে এবং একটি বৃত্তের পরিধিস্থ যে কোন বিন্দু P হইতে PAC ও PBD সরলরেখা টানিয়া অন্য বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সহিত CD সমান্তরাল।]

P বিন্দুতে APB বৃত্তের PT স্পর্শক টানা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $PT \parallel CD$. CD ও AB যোগ কর।

প্রমাণ : ∵ PT স্পর্শক এবং AP স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা, ∴ $\angle APT$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle ABP$.

আবার, ∵ ABDC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ, ∴ বহিঃস্থ $\angle ABP$ = বিপরীত অন্তঃস্থ $\angle C$.

∴ $\angle TPC = \angle PCD$, কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ, সুতরাং $PT \parallel CD$.

(চিত্র নং 4)

উদা. 4. If two circles intersect, the angles subtended at the points of intersection by a common tangent are supplementary.

[দুইটি পরস্পরচ্ছেদী বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক ছেদ বিন্দু দুইটিতে যে দুইটি সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তাহারা পরস্পর সম্পূরক।]

বৃত্ত দুইটি A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং সাধারণ স্পর্শক PQ উহাদিগকে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$\angle PAQ + \angle PBQ = 2$ সমকোণ।

AP, BP, AQ, BQ, AB যোগ কর।

(চিত্র নং 5)

প্রমাণ : $\because$ PQ স্পর্শক এবং PB ও QB স্পর্শবিন্দুদ্বয়গামী জ্যা,

$\therefore$ $\angle BPQ$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle PAB$,

এবং $\angle BQP$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle BAQ$.

$\therefore$ সমগ্র $\angle PAQ = \angle BPQ + \angle BQP$,

$\therefore$ $\angle PAQ + \angle PBQ = \angle BPQ + \angle BQP + \angle PBQ = 2$ সমকোণ।

উদা. 5. Tangents are drawn at A, B, C to the circle circumscribing an acute-angled $\triangle ABC$ so as to form another triangle. Show that the angles of this triangle are respectively supplements of twice the opposite angles of $\triangle ABC$.

[C. U. 1939]

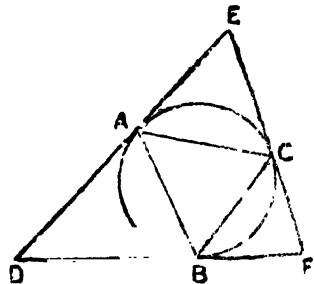
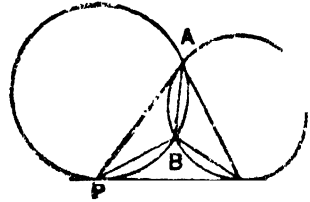
[ABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্তের A, B ও C বিন্দুতে অঙ্কিত তিনটি স্পর্শক একটি ত্রিভুজ উৎপন্ন করিল। প্রমাণ কর যে, এই ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ যথাক্রমে $\triangle ABC$এর বিপরীত কোণের দ্বিগুণের সম্পূরক হইবে।]

ABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্তের A, B, C বিন্দুতে যথাক্রমে DE, DF, EF স্পর্শক অঙ্কন করায় DEF ত্রিভুজ উৎপন্ন হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, D কোণ $2\angle C$র, E কোণ $2\angle B$র এবং F কোণ $2\angle A$র সম্পূরক।

প্রমাণ : $\angle DAB$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle ACB$ এবং $\angle DBA$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle ACB$,

(চিত্র নং 6)

$\therefore$ $\angle DAB + \angle DBA = 2\angle ACB$.

এখন, $\triangle ABD$র $\angle D+\angle DAB+\angle DBA=2$ সমকোণ,

$\therefore\ \angle D+2\angle ACB=2$ সমকোণ।

সুতরাং $\angle D$, $2\angle C$র সম্পূরক হইল।

অনুরূপে $\angle E=2\angle B$র সম্পূরক এবং $\angle F=2\angle A$র সম্পূরক।

উদা. 6. A chord AB of a circle bisects the angle between the diameter through A and the perpendicular from A to the tangent at B. [C. U. '49 Addl. ; cf. D. B. 1926]

[কোন বৃত্তের AB একটি জ্যা। A বিন্দু হইতে বৃত্তের একটি ব্যাস এবং B বিন্দুতে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শকের উপর লম্ব টানা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, AB ঐ ব্যাস ও স্পর্শকের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক।]

মনে কর, AB বৃত্তটির একটি জ্যা এবং AC উহার একটি ব্যাস। বৃত্তের B বিন্দুতে BP একটি স্পর্শক এবং $AP \perp BP$.

(চিত্র নং 7)

প্রমাণ করিতে হইবে, $\angle BAP=\angle BAC$.

প্রমাণ : BC যোগ কর। $\angle ABC$ অর্ধবৃত্তস্থ বলিয়া সমকোণ। $\angle ABP=$ একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle ACB$.

এখন $\triangle ABP$ ও $\triangle ABC$র,

$\angle APB=\angle ABC$ ($\because$ প্রত্যেকে সমকোণ),

$\angle ABP=\angle ACB$. $\therefore$ অবশিষ্ট কোণদ্বয় সমান, অর্থাৎ $\angle BAP=\angle BAC$.

উদা. 7. Two circles touch internally at A ; PQ, a chord of the outer, touches the inner circle at R. Prove that AR bisects the angle PAQ. [P. U. '33]

[দুইটি বৃত্ত A বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শ করিয়াছে এবং বহির্বৃত্তের PQ জ্যা অন্তর্বৃত্তকে R বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, AR সরলরেখা PAQ কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।]

Hints : মনে কর, AQ ভিতরের বৃত্তকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। BR যোগ কর এবং A বিন্দুতে AT উভয় বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত কর।

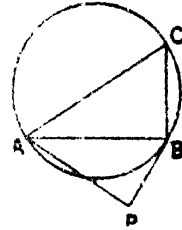
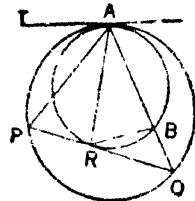
প্রমাণ : AT স্পর্শক এবং AR স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা, $\angle TAR=$ একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle ABR$.

অনুরূপে $\angle TAP=\angle Q$.

$\therefore\ \angle PAR=\angle ABR-\angle Q$

$=\angle BRQ$ ($\because$ বহিঃস্থ $\angle ABR=\angle Q+\angle BRQ$)

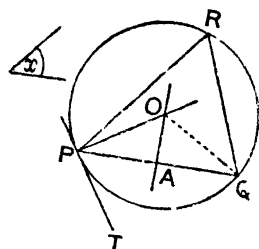
$=$ একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle BAR$ ($\because$ PQ স্পর্শক).

$\therefore$ AR, $\angle PAQ$কে সমদ্বিখণ্ডিত করিল।

চিত্র নং 8

উদা. 8. On a given st. line draw a segment of a circle containing a given angle.

[একটি প্রদত্ত সরলরেখার উপর একটি প্রদত্ত কোণ ধারণক্ষম একটি বৃত্তাংশ অঙ্কন কর।]

মনে কর প্রদত্ত PQ সরলরেখার উপর প্রদত্ত x-কোণ ধারণক্ষম একটি বৃত্তাংশ অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : PQ এর P বিন্দুতে ∠QPT = ∠x আঁক এবং PO⊥PT অঙ্কিত কর। PQ এর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক AO আঁক, উহা যেন PO-কে O বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে O-কে কেন্দ্র করিয়া OP ব্যাসার্ধ লইয়া PRQ বৃত্ত অঙ্কিত কর। PRQP বৃত্তাংশই উদ্দিষ্ট বৃত্তাংশ।

(চিত্র নং 8A)

প্রমাণ : ∵ PQ এর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক AO,

∴ OP = OQ. ∴ O-কে কেন্দ্র করিয়া OP ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তটি P ও Q বিন্দু দিয়া যাইবে।

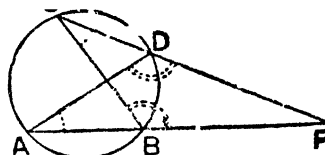
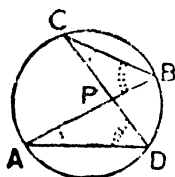
∵ PT রেখা বৃত্তের P বিন্দুতে OP ব্যাসার্ধের উপর লম্ব,

∴ PT ঐ বৃত্তের P বিন্দুতে স্পর্শক এবং PQ ঐ স্পর্শবিন্দুগামী একটি জ্যা।

∴ ∠QPT = বিপরীত বৃত্তাংশস্থ ∠R, সুতরাং ∠R = ∠x.

উপপাদ্য 2

If two chords of a circle intersect, the rectangle contained by the segments of the one is equal to the rectangle contained by the segments of the other.

[কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা কোন বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিলে একটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অন্যটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হইবে।]

(চিত্র নং 9)

মনে কর, কোন বৃত্তের AB ও CD জ্যাদ্বয় বৃত্তের অন্তঃস্থ (প্রথম চিত্রে) কিংবা বহিঃস্থ (দ্বিতীয় চিত্রে) P বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AP.PB=CP.PD.

অঙ্কন : AD ও BC যোগ কর।

প্রমাণ : PAD ও PBC ত্রিভুজের $\angle APD = \angle BPC$,

এবং $\angle PAD = \angle PCB$ (একই চাপের উপর পরিধিস্থ কোণ বলিয়া)

সুতরাং অবশিষ্ট $\angle PDA$ = অবশিষ্ট $\angle PBC$.

∴ ঐ ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী, ∴ উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী,

∴ $\frac{AP}{PC} = \frac{PD}{PB}$, ∴ AP.PB=PC.PD.

অনুসিদ্ধান্ত : (1) যদি কোন বৃত্তের AB জ্যা ও PQ স্পর্শক বহিঃস্থ P বিন্দুতে ছেদ করে, তবে $AP.PB = PQ^2$ হইবে।

প্রমাণ : [এখানে প্রথমে উপরের উপপাদ্যটি প্রমাণ করিয়া পরে লিখিবে।]

এক্ষণে দেখা যায় যে CD জ্যা AB হইতে দূরে পরিধির দিকে ক্রমশঃ যত সরিয়া যাইবে, C ও D বিন্দু ক্রমশঃ তত পরস্পর নিকটবর্তী হইতে থাকিবে। এইরূপে যখন C ও D বিন্দু মিলিয়া যাইবে, তখন PC ও PD অংশদ্বয় সমান হইবে।

মনে কর, CD চাপের উপর Q বিন্দুতে গিয়া C ও D মিলিয়া গেল। অতএব, তখন PQ ঐ বৃত্তের স্পর্শক এবং PQ=PC হইল।

∴ $AP.PB = PC.PD = PC.PC = PC^2 = PQ^2$.

[নিম্নে বিকল্প প্রমাণ দেখ। ইহাই ছাত্রদের পক্ষে সহজ প্রমাণ।]

[বিকল্প সহজ প্রমাণ] (চিত্র আঁকিয়া লও) মনে কর ABC বৃত্তের AB জ্যা ও PQ স্পর্শক বহিঃস্থ P বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে, $AP.PB = PQ^2$.

AQ, BQ যোগ কর।

প্রমাণ : ∵ PQ বৃত্তটির স্পর্শক এবং QB স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা,

∴ $\angle PQB$ = বিপরীত বৃত্তাংশস্থ $\angle QAB = \angle PAQ$.

এক্ষণে, $\triangle APQ$ ও $\triangle BPQ$-এর $\angle P$ সাধারণ কোণ এবং

$\angle PAQ = \angle PQB$, সুতরাং উহাদের অবশিষ্ট কোণ দুইটিও সমান।

∴ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, ∴ উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী,

∴ $\frac{AP}{PQ} = \frac{PQ}{PB}$, ∴ $AP.PB = PQ^2$.

(2) যদি কোন বৃত্তের বহিঃস্থ P বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তে PBA ও PQ এরূপ দুইটি সরলরেখা টানা হয় যাহাতে $AP.PB = PQ^2$, তবে PQ বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

[চিত্র আঁকিয়া যাহা দেওয়া আছে, তাহা এখানে আগে লিখিবে।]

প্রমাণ ঃ যদি PQ বৃত্তের স্পর্শক না হয়, তবে উহাকে বর্ধিত করিলে উহা পরিধিকে আর একটি বিন্দুতে ছেদ করিবে ; মনে কর, R বিন্দুতে ছেদ করিল।

AQ, BR যোগ কর। এক্ষণে, $\triangle PAQ$ ও $\triangle PBR$এর $\angle APQ = \angle BPR$, $\angle PAQ = \angle PRB$ (একই চাপের উপর পরিধিস্থ কোণ বলিয়া), সুতরাং অবশিষ্ট কোণদ্বয় সমান। $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

$\therefore \quad \frac{AP}{PR} = \frac{PQ}{PB}, \quad \therefore \quad AP.PB = PR.PQ.$

কিন্তু $AP.PB = PQ^2$ (স্বীকার), $\therefore$ $PR.PQ = PQ^2$, $\therefore$ $PR = PQ$.

অতএব, R ও Q একই বিন্দু হইল, দুইটি পৃথক্ বিন্দু হইতে পারে না।

$\therefore$ PQ সরলরেখা একটিমাত্র বিন্দুতে বৃত্তের সহিত মিলিত হইতে পারে বলিয়া উহা বৃত্তের স্পর্শক হইল।

[উপপাদ্য 2-এর বিপরীত উপপাদ্য কি হইবে ? ঐ বিপরীত উপপাদ্যটি প্রমাণ কর।]

(3) বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে বৃত্তের দুইটি ছেদক অঙ্কিত করিলে একটি ছেদকের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান। [উপপাদ্য 2এর মত প্রমাণ কর। উহার দ্বিতীয় চিত্র আঁকিবে।]

বিবিধ উদাহরণ 2

উদা. 1. P is any point in AB, a chord of a circle. Show how to draw a line PC from P to the circumference of the circle so that $PC^2 = PA.PB$. [C. U. '40]

[কোন বৃত্তের AB জ্যাএর উপর P যে-কোন একটি বিন্দু। P হইতে পরিধি পর্যন্ত PC এরূপ একটি সরলরেখা টান যেন $PC^2 = PA.PB$ হয়।]

মনে কর, বৃত্তটির কেন্দ্র O এবং উহার AB জ্যার উপর P যে-কোন একটি বিন্দু। OP যোগ কর এবং P বিন্দুতে OPর উপর লম্ব টান, উহা যেন বৃত্তকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। উহাই উদ্দিষ্ট সরলরেখা। CPকে বর্ধিত করিয়া পরিধিকে D বিন্দুতে ছেদ কর।

প্রমাণ : $\because$ $OP \perp CD$, $\therefore$ $PC = PD$.

এক্ষণে, $AP.BP = PC.PD = PC.PC = PC^2$.

উদা. 2. A semi-circle is described on AB as diameter, and any two chords AC and BD are drawn intersecting at P. Show that $AB^2 = AC.AP + BD.BP$. [C. U. '37 ; D. B. '39]

[ABকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত কোন অর্ধবৃত্তের AC ও BD জ্যাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC.AP + BD.BP$.]

[**Hints :** $PM \perp AB$ টান।

ADPM চতুর্ভুজের $\angle D + \angle PMA = 2$ সমকোণ, $\therefore$ উহা বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

এক্ষণে যেহেতু ADPM বৃত্তের DP ও AM জ্যাদ্বয় বহিঃস্থ B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে,

$\therefore \quad AB.BM = BD.BP \quad \cdots(1)$

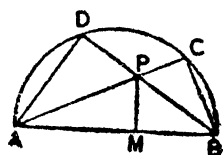
(চিত্র নং 10)

অনুরূপে, PCBM বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ বলিয়া

$AB.AM = AC.AP \cdots (2)$. এখন (1) ও (2) যোগ করিলে, $AB.BM + AB.AM = BD.BP + AC.AP$,

বা $AB(BM + AM) = AC.AP + BD.BP$

অর্থাৎ $AB.AB = AC.AP + BD.BP$,

$\therefore \quad AB^2 = AC.AP + BD.BP$.

উদা. 3. Through any point in the common chord of two intersecting circles two chords are drawn, one in each circle. Show that the four extremities of these chords are concyclic.

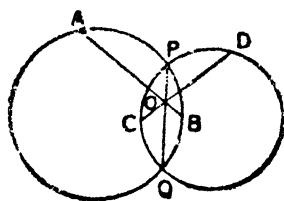
[দুইটি ছেদী বৃত্তের সাধারণ জ্যা-এর উপরিস্থিত কোন বিন্দু দিয়া প্রত্যেক বৃত্তের একটি করিয়া জ্যা টানা হইল। প্রমাণ কর যে ঐ জ্যাদ্বয়ের প্রান্তবিন্দু চারিটি একই বৃত্তস্থ।]

মনে কর, উভয় বৃত্তের সাধারণ জ্যা PQ এর উপর O যে কোন একটি বিন্দু এবং উহার মধ্য দিয়া বৃত্ত দুইটিতে যথাক্রমে AOB ও COD জ্যা টানা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, A, C, B, D একই বৃত্তস্থ।

(চিত্র নং 11)

প্রমাণ : PAQ বৃত্তের AB ও PQ জ্যা O বিন্দুতে ছেদ করায় $AO.BO = PO.QO$.

আবার CPD বৃত্তে $CO.DO = PO.QO$. $\therefore \quad AO.BO = CO.DO$.

$\therefore$ A, C, B ও D বিন্দুগুলি একই বৃত্তস্থ।

উদা. 4. If two circles intersect, show that tangents drawn to them from any point in their common chord produced are equal. [C. U. 1934]

[দুইটি পরস্পর ছেদী বৃত্তের সাধারণ জ্যাএর বর্ধিত অংশস্থিত কোন বিন্দু হইতে বৃত্তদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি পরস্পর সমান।]

মনে কর, বৃত্ত দুইটি A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং সাধারণ জ্যা ABর বর্ধিতাংশের উপর যে-কোন T বিন্দু হইতে বৃত্ত দুইটিতে যথাক্রমে TP ও TR স্পর্শক টানা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, TP=TR.

প্রমাণ ঃ TP স্পর্শক ও TAB ছেদক বলিয়া ABP বৃত্তে $TA.TB=TP^2$. অনুরূপে ABR বৃত্তে $TA.TB=TR^2$, $\therefore$ $TP^2=TR^2$, $\therefore$ TP=TR.

Exercise 1

1. A tangent is drawn parallel to a chord, show that the intercepted arc is bisected at the point of contact. [C. U. '45 ; D. B. '32]

[বৃত্তের কোন জ্যা-এর সমান্তরাল একটি স্পর্শক টানিলে মধ্যবর্তী চাপটি স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।]

2. A, B, C are points on a circle. BC produced and the tangent at A intersect at P. Prove that $\angle ACP = \angle PAB$.

[বৃত্তের পরিধিস্থ A, B, C তিনটি বিন্দু। বর্ধিত BC সরলরেখা এবং A বিন্দুতে স্পর্শকটি পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে $\angle ACP = \angle PAB$.]

3. Two circles touch each other internally at A and chords APQ, AXY are drawn. Show that PX ∥ QY. [C.U. '47]

[A বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শকারী দুইটি বৃত্তে APQ ও AXY দুইটি জ্যা টানা হইল। প্রমাণ কর যে PX ∥ QY.]

4. Two circles touch each other internally and a straight line is drawn to cut them. Prove that the parts of it intercepted between the circles subtend equal angles at the point of contact. [C. U. 1924]

[দুইটি বৃত্ত পরস্পর অন্তঃস্পর্শ করিয়াছে এবং একটি সরলরেখা উহাদিগকে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, বৃত্তদ্বয়ের মধ্যবর্তী ঐ সরলরেখার অংশদ্বয় স্পর্শবিন্দুতে সমান সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিবে।]

5. Divide a circle into two segments so that the angle in one may be double of the angle in the other.

[একটি বৃত্তকে এরূপ দুই বৃত্তাংশে বিভক্ত কর যেন একটি বৃত্তাংশস্থিত কোণ অপর বৃত্তাংশস্থ কোণের দ্বিগুণ হয়।]

6. Two circles touch internally or externally and from the point of contact two straight lines are drawn to cut them. Prove that the lines joining the points of section are parallel.

[দুইটি বৃত্ত পরস্পর অন্তঃস্পর্শ বা বহিঃস্পর্শ করিয়াছে এবং স্পর্শবিন্দু হইতে দুইটি সরলরেখা টানিয়া বৃত্তদ্বয়কে ছেদ করা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে ছেদবিন্দুগুলির সংযোজক সরলরেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল।]

7. ABC is a triangle right-angled at C, from C a perpendicular CD is drawn to the hypotenuse. Show that $CD^2 = AD.BD$. [C. U. '44]

[ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ এবং C হইতে অতিভুজের উপর CD লম্ব। প্রমাণ কর যে $CD^2 = AD.BD$.]

8. Two straight lines AB and CD intersect at O so that $AO.BO = CO.DO$; prove that A, B, C, D are concyclic.

[AB ও CD সরলরেখাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং $AO.BO = CO.DO$; প্রমাণ কর যে A, B, C ও D একই বৃত্তস্থ।]

9. Two circles intersect at A and B; show that AB produced bisects their common tangent. [C. U. '19]

[দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিলে বর্ধিত AB উহাদের সাধারণ স্পর্শককে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।]

10. Two chords AB and CD of a circle intersect at O outside it. If $OB = OD$, show that $AB = CD$.

[কোন বৃত্তের AB ও CD জ্যাদ্বয় বহিঃস্থ O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। OB ও OD সমান হইলে প্রমাণ কর যে, $AB = CD$.]

11. ABC is a triangle in which AX, BY, CZ are the perpendiculars from the vertices to the opposite sides. If the perpendiculars meet at O, prove that $AO.OX = BO.OY = CO.OZ$. [G. U. '48]

[ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর AX, BY ও CZ লম্ব তিনটি পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে $AO.OX = BO.OY = CO.OZ$.]

12. Show that the rectangle contained by the segments of any chord drawn through a given point within a circle is equal to the square on half the shortest chord which may be drawn through that point. [C. U. '49]

[কোন বৃত্তের অন্তঃস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া অঙ্কিত জ্যা-এর অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, ঐ বিন্দুগামী ক্ষুদ্রতম জ্যাএর অর্ধাংশের উপর বর্গক্ষেত্রের সমান হইবে।]

13. If three circles intersect one another, the three common chords are either concurrent or parallel.

[যদি তিনটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করে, তবে তাহাদের সাধারণ জ্যা তিনটি সমবিন্দু অথবা সমান্তরাল হইবে।]

14 A, B, C are three points on a straight line. Find the locus of points of contact of tangents from A to the circles passing through B and C. [C. U. '46]

[A, B ও C কোন সরলরেখার উপরিস্থিত তিনটি বিন্দু। B ও C দিয়া অঙ্কিত বৃত্তগুলিতে A হইতে অঙ্কিত স্পর্শকগুলির স্পর্শবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।]

15. ABC is a triangle inscribed in a circle ; AD, AE are lines drawn to the base BC parallel to the tangents at B, C respectively ; prove that $BD : CE = AB^2 : AC^2$. [H.S. '60]

[ABC একটি বৃত্তস্থ ত্রিভুজ। B ও C বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক দুইটির সমান্তরাল করিয়া ত্রিভুজের ভূমি BC-র উপর যথাক্রমে AD ও AE রেখা টানা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে $BD : CE = AB^2 : AC^2$.]

[**Hints** : (চিত্র আঁক) মনে কর, স্পর্শকদ্বয় P বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল এবং বর্ধিত PB ও PC যেন AEকে Q বিন্দুতে ও ADকে R বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ : $\triangle ABD$ ও $\triangle ACE$এর উচ্চতা একই এবং ভূমিদ্বয় একই রেখায় অবস্থিত।

$\therefore \quad \triangle ABD : \triangle ACE = BD : CE \cdots\cdots(1).$

এক্ষণে ঐ ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle ADB$ = একান্তর $\angle DBP$ ($\because AD \parallel BP$)

= $\angle ECP$ ($\because$ স্পর্শক PB, PC সমান)

= একান্তর $\angle AEC$ ($\because PC \parallel EA$).

আবার, একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle ABD = \angle ACR$ = একান্তর $\angle EAC$.

$\therefore$ $\triangle ABD$ ও $\triangle ACE$ সদৃশকোণী, সুতরাং সদৃশ ;

$\therefore \quad \triangle ABD : \triangle ACE = AB^2 : AC^2 \cdots\cdots(2).$

$\therefore$ (1) ও (2) হইতে $BD : CE = AB^2 : AC^2$.]

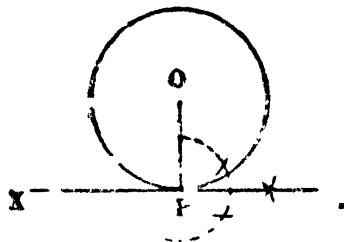
CONSTRUCTION OF TANGENTS

(স্পর্শক অঙ্কন)

সম্পাদ্য 1

Draw a tangent to a circle at a given point on the circumference.

[বৃত্তের পরিধিস্থ কোন বিন্দুতে বৃত্তটির একটি স্পর্শক অঙ্কন করিতে হইবে।]

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র O এবং P উহার পরিধিস্থ একটি বিন্দু। P বিন্দুতে বৃত্তটির একটি স্পর্শক আঁকিতে হইবে।

অঙ্কন : OP যোগ কর এবং P বিন্দুতে XY⊥OP টান।

XY উদ্দিষ্ট স্পর্শক হইল।

(চিত্র নং 12)

প্রমাণ : ∵ XY সরলরেখা OP ব্যাসার্ধের P বিন্দুতে OP-র উপর লম্ব, ∴ XY ঐ বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

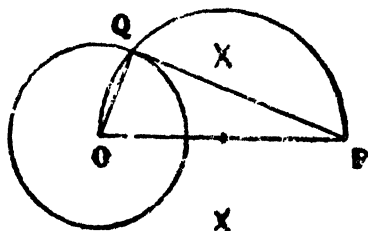
অতএব, XY ঐ বৃত্তের P বিন্দুতে স্পর্শক।

সম্পাদ্য 2

Draw a tangent to a circle from a given external point.

[বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে একটি বৃত্তের একটি স্পর্শক অঙ্কন করিতে হইবে।]

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র O এবং P উহার বহিঃস্থ একটি বিন্দু। P বিন্দু হইতে বৃত্তটির একটি স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : OP যোগ কর এবং OPকে ব্যাস করিয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর, উহা যেন বৃত্তটিকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। PQ যোগ কর। এক্ষণে PQ উদ্দিষ্ট স্পর্শক হইল।

(চিত্র নং 13)

প্রমাণ : OQ যোগ কর।

∴ ∠OQP অর্ধবৃত্তস্থ কোণ, ∴ ∠OQP এক সমকোণ।

অতএব, PQ সরলরেখা OQ ব্যাসার্ধের উপর Q বিন্দুতে লম্ব হওয়ায় PQ বৃত্তটির একটি স্পর্শক।

[দ্রষ্টব্য : উপরের অঙ্কনে OPকে ব্যাস করিয়া যদি একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হয়, তবে উহা প্রদত্ত বৃত্তকে Qএর বিপরীত দিকে আর একটি বিন্দুতে ছেদ করিবে। মনে কর, সেই বিন্দু R. এখন PR যোগ করিলে PR ঐ বৃত্তের আর একটি স্পর্শক হইবে।

অতএব, বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন বৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।]

COMMON TANGENT

সাধারণ স্পর্শক

যদি একটি সরলরেখা দুইটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে তাহাকে ঐ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শক বলে। সাধারণ স্পর্শক **সরল** ও **তির্যক** দুই প্রকার হইতে পারে। যে সাধারণ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু দুইটি বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রসংযোজক সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত তাহাকে **সরল সাধারণ স্পর্শক** (Direct Common Tangent) বলে। আর ঐ স্পর্শবিন্দু দুইটি যদি ঐ সরলরেখার দুই বিপরীত পার্শ্বে থাকে, তবে স্পর্শকটিকে **তির্যক সাধারণ স্পর্শক** (Transverse Common Tangent) বলে।

সম্পাদ্য 3

Draw a direct common tangent to two given circles.

[দুইটি বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত কর।]

A ও B যথাক্রমে বৃহত্তর ও ক্ষুদ্রতর বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র এবং R ও r যথাক্রমে উহাদের ব্যাসার্ধ। এই বৃত্ত দুইটির একটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : AB যোগ কর। A-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধের অন্তরফল ($R-r$) ব্যাসার্ধ লইয়া একটি তৃতীয় বৃত্ত অঙ্কিত কর। B বিন্দু হইতে ঐ তৃতীয় বৃত্তের স্পর্শক BC অঙ্কিত কর। AC যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন বৃহত্তর বৃত্তটিকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। B বিন্দু হইতে AP-র সমান্তরাল করিয়া একই দিকে BQ ব্যাসার্ধ অঙ্কিত কর। PQ যোগ কর।

PQ বৃত্তদ্বয়ের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক হইল।

প্রমাণঃ ∵ $AP=R$ এবং $AC=R-r$, ∴ $CP=r=BQ$.

(চিত্র নং 14)

আবার, CP ‖ BQ. ∴ BCPQ একটি সামান্তরিক, এবং উহার ∠CPQ = অনুরূপ ∠ACB = এক সমকোণ। ∴ BCPQ একটি আয়তক্ষেত্র।

∠CPQ ও ∠PQB প্রত্যেকে এক সমকোণ। ∴ PQ বৃত্তদ্বয়কে P ও Q-বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। ∴ PQ উভয় বৃত্তের সরল সাধারণ স্পর্শক হইল।

[**দ্রষ্টব্যঃ** C-বিন্দুর বিপরীত পার্শ্বে B-বিন্দু হইতে ঐ তৃতীয় বৃত্তটির আর একটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়। অতএব, AB-র অপর পার্শ্বে PQ-এর অনুরূপ আর একটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।]

বিশেষ দ্রষ্টব্যঃ প্রদত্ত বৃত্তদ্বয় সমান হইলে কিরূপে সাধারণ স্পর্শক থাকিবে দেখাও।

সম্পাদ্য 4

Draw a transverse common tangent to two given circles.

[দুইটি বৃত্তের একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত কর।]

A ও B যথাক্রমে বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র এবং R ও r যথাক্রমে উহাদের ব্যাসার্ধ। বৃত্তদ্বয়ের একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কনঃ AB যোগ কর। A-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ দুইটির সমষ্টির ($R+r$-এর) সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি তৃতীয় বৃত্ত অঙ্কিত কর। B হইতে এই বৃত্তের BC স্পর্শক টান। AC যোগ কর, উহা যেন প্রদত্ত A-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে B বিন্দু হইতে AP-র সমান্তরাল করিয়া উহার বিপরীত দিকে BQ ব্যাসার্ধ টান। PQ যোগ কর। PQ উদ্দিষ্ট তির্যক সাধারণ স্পর্শক হইল।

প্রমাণ : ∵ AC=R+r এবং AP=R,

∴ PC=r=BQ, এবং PC ∥ BQ.

(চিত্র নং 15)

∴ PCBQ একটি সামান্তরিক, এবং উহার ∠C সমকোণ হওয়ায় উহা একটি আয়তক্ষেত্র। ∴ ∠APQ = ∠PQB = এক সমকোণ।

∴ PQ উভয় বৃত্তের একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক।

[দ্রষ্টব্য : পূর্বের ন্যায় PQ এর অনুরূপ আর একটি তির্যক স্পর্শক অঙ্কন করা যায়। অতএব, দুইটি বৃত্তের মোট চারিটি সাধারণ স্পর্শক হইতে পারে। বৃত্তদ্বয়ের অবস্থান অনুসারে উহাদের 4টি, 3টি, 2টি বা 1টি সাধারণ স্পর্শক হইতে পারে। বৃত্ত দুইটি সমকেন্দ্রীয় হইলে উহাদের সাধারণ স্পর্শক লুপ্ত হইয়া থাকে। তোমরা চিত্র আঁকিয়া ঐ বিভিন্ন অবস্থানগুলি দেখাও।]

Construction of regular figures in or about a given circle

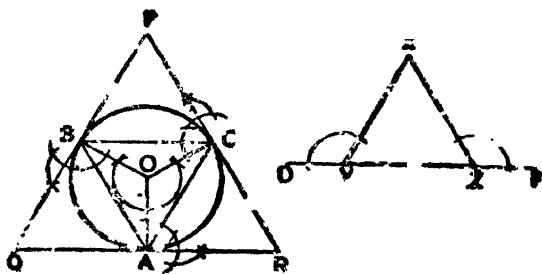
[বৃত্তের অন্তর্লিখিত বা পরিলিখিত সুষম ত্রিভুজ বা বহুভুজ অঙ্কন]

সম্পাদ্য 5

To construct a regular figure of 3 sides (i) in, or (ii) about a given circle.

[একটি বৃত্তের (1) অন্তর্লিখিত ও (2) পরিলিখিত ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।]

(প্রথম প্রণালী) : মনে কর, O প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র। উহার একটি (1) অন্তর্লিখিত এবং (2) একটি পরিলিখিত সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে।

(1) অঙ্কন : XYZ যে-কোন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ আঁক। YZকে উভয় দিকে D ও E বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর। OA যে-কোন একটি ব্যাসার্ধ লও। O বিন্দুতে ∠DYX-এর সমান করিয়া ∠AOB এবং ∠XZE-র সমান করিয়া ∠AOC অঙ্কিত কর। OB ও OC বৃত্তটিকে যেন B ও C বিন্দুতে ছেদ করিল।

(চিত্র নং 16)

AB, BC, AC যোগ কর। এক্ষণে △ABC বৃত্তটির অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : ∵ XYZ সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ 60°,

∴ ∠XYD = ∠XZE = 120°.

অতএব O বিন্দুতে ∠AOB = ∠AOC = 120°,

∴ BOC কোণও 120° [∵ O বিন্দুস্থ কোণগুলির সমষ্টি = 360°].

এক্ষণে O-কেন্দ্রস্থ কোণ তিনটি সমান বলিয়া চাপ AB = চাপ BC = চাপ AC.

∴ জ্যা AB = জ্যা BC = জ্যা AC ; ∴ △ABC সমবাহু।

(2) অঙ্কন : পূর্বের ন্যায় অঙ্কন করিয়া A, B ও C বিন্দুতে বৃত্তটির তিনটি স্পর্শক অঙ্কিত কর। উহারা যেন পরস্পর ছেদ করিয়া △PQR উৎপন্ন করিল। উহাই বৃত্তটির পরিলিখিত সমবাহু ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : QP ও QR স্পর্শক বলিয়া ∠OBQ = ∠OAQ = এক সমকোণ।

∴ ∠AOB + ∠Q = 2 সমকোণ ; কিন্তু ∠AOB = 120°, ∴ ∠Q = 60°.

অনুরূপ ∠P ও ∠R প্রত্যেক 60°. ∴ PQR একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

(দ্বিতীয় প্রণালী) : প্রদত্ত বৃত্তটির একটি ব্যাস AP লও। P-কে কেন্দ্র করিয়া এবং PO ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। মনে কর, ইহা প্রদত্ত বৃত্তকে B ও C বিন্দুতে ছেদ করিল। AB, BC, AC যোগ কর। △ABC অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজ হইল। OB, OC, PB, PC যোগ কর।

প্রমাণ : $\triangle BOP$ ও $\triangle COP$ সমবাহু ত্রিভুজ [$\because$ প্রত্যেক বাহু = ব্যাসার্ধ], $\therefore$ $\angle BOC = 120°$,

$\therefore$ পরিধিস্থ $\angle BAC = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ $\angle BOC = 60°$.

আবার $\angle BCA = \angle BPA$ ($\because$ একই বৃত্তাংশস্থ) $= 60°$. $\therefore$ $\triangle ABC$ সমবাহু।

এক্ষণে, A, B ও C বিন্দুতে বৃত্তের তিনটি স্পর্শক আঁকিলে পূর্বের ন্যায় পরিলিখিত সমবাহু ত্রিভুজটি পাওয়া যাইবে।]

(তৃতীয় প্রণালী) : বৃত্তের যে-কোন ব্যাসার্ধ OA লও। AO-র সমান AX, XC জ্যা আঁক। AC যোগ কর এবং AC-র সমান CB জ্যা আঁক। এক্ষণে $\triangle ABC$ সমবাহু হইবে। [প্রমাণ সহজ]

সম্পাদ্য 6

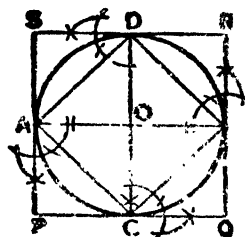
To construct a regular figure of 4 sides (i) in or (ii) about a given circle.

[একটি বৃত্তের (1) একটি অন্তর্লিখিত ও (2) একটি পরিলিখিত সুষম চতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।]

[সুষম চতুর্ভুজ বলিলে একটি বর্গক্ষেত্র বুঝায় তাহা তোমরা জান]

O, প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র। বৃত্তটির (1) একটি অন্তর্লিখিত এবং (2) একটি পরিলিখিত সুষম চতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

(চিত্র নং 17)

অঙ্কন : বৃত্তের যে-কোন একটি ব্যাস AB লও এবং ইহার উপর লম্ব আর একটি CD ব্যাস অঙ্কিত কর।

(1) A, C, B, D, A পর পর যোগ কর এক্ষণে ACBD অন্তর্লিখিত সুষম চতুর্ভুজ হইল।

প্রমাণ : $\because$ O-কেন্দ্রস্থ কোণগুলি সমকোণ বলিয়া সমান,

$\therefore$ AD, AC, CB ও BD জ্যাগুলিও সমান।

আবার, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ প্রত্যেকে সমকোণ, সুতরাং উহারা সমান।

$\therefore$ ACBD একটি বৃত্তস্থ সুষম চতুর্ভুজ বা বর্গক্ষেত্র।

(2) A, C, B ও D বিন্দুতে বৃত্তের চারিটি স্পর্শক অঙ্কিত কর। মনে কর উহারা P, Q, R, S বিন্দুতে ছেদ করিল। PQRS ঐ বৃত্তের পরিলিখিত সুষম চতুর্ভুজ হইল।

প্রমাণ : OD-র উপর SR ও AB লম্ব হওয়ায় SR ∥ AB ; অনুরূপে AS ∥ BR. ∴ ABRS একটি সামান্তরিক ; কিন্তু ইহার ∠BAS সমকোণ ; ∴ ABRS একটি আয়তক্ষেত্র। অনুরূপে AEQP একটি আয়তক্ষেত্র। ∴ SR = AB = PQ. অনুরূপে PS = CD = RQ ; কিন্তু AB = CD, ∴ PS = PQ. ∴ PQRS একটি সুষম চতুর্ভুজ বা বর্গক্ষেত্র।

অনুসিদ্ধান্ত : বৃত্তের অন্তর্লিখিত ও পরিলিখিত অষ্টভুজ অঙ্কন করিতে হইলে উপরের লম্ব-ব্যাসদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ চারিটিকে সমদ্বিখণ্ডিত কর। ঐ দ্বিখণ্ডকগুলি বৃত্তকে যেন E, F, G, H বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে, A হইতে আরম্ভ করিয়া পরিধিস্থ পর পর বিন্দুগুলি যোগ করিলেই বৃত্তের অন্তর্লিখিত সুষম অষ্টভুজ পাওয়া যাইবে। [প্রমাণ সহজ]

আবার, ঐ বিন্দুগুলিতে বৃত্তের স্পর্শকগুলি অঙ্কিত করিলে পরিলিখিত সুষম অষ্টভুজ পাওয়া যাইবে।

সম্পাদ্য 7

To construct a regular polygon in a circle.

[একটি বৃত্তে একটি সুষম বহুভুজ অঙ্কন করিতে হইবে।]

মনে কর, বহুভুজের বাহুসংখ্যা n. এক্ষণে বৃত্তের কেন্দ্র O বিন্দুতে $\frac{360^\circ}{n}$ এর সমান ∠AOB অঙ্কিত কর। মনে কর, A, B বৃত্তের ছেদবিন্দু। AB যোগ কর। AB জ্যার সমান করিয়া পরপর BC, CD প্রভৃতি জ্যাগুলি অঙ্কিত কর। এইরূপে অন্তর্লিখিত সুষম n-ভুজ উৎপন্ন হইবে।

আবার, ঐ ছেদবিন্দুগুলিতে বৃত্তের স্পর্শকগুলি অঙ্কিত করিলে বৃত্তের পরিলিখিত সুষম n-ভুজ উৎপন্ন হইবে।

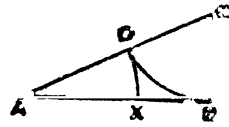
এই প্রণালীতে বৃত্তে 3, 4 প্রভৃতি যে-কোন সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট সুষম ক্ষেত্র অঙ্কিত করা যায়।

মাধ্যমিক ছেদ (Medial Section)

যদি একটি সরলরেখা কোন বিন্দুতে এইরূপ দুই অংশে বিভক্ত হয় যে, একটি অংশ ও সমগ্র রেখার অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপর অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান, তাহা হইলে ঐ সরল রেখাকে ঐ বিন্দুতে **মাধ্যমিক ছেদে** বিভক্ত বলা হয়। ঐ ছেদবিন্দুকে **মাধ্যমিক ছেদবিন্দু** (point of medial section) বলে।

(a) To divide a given straight line in medial section.
[একটি সরলরেখাকে মাধ্যমিক ছেদে অন্তর্বিভক্ত কর।]

মনে কর, AB সরলরেখাকে মাধ্যমিক ছেদে অন্তর্বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন : AB র উপর BC লম্ব টান এবং $BC=\frac{1}{2}AB$ কর। AC যোগ করিয়া উহা হইতে BC-র সমান CD অংশ কাটিয়া লও। AB হইতে AD-র সমান AX অংশ কাটিয়া লও। এক্ষণে, X বিন্দুতে AB মাধ্যমিক ছেদে বিভক্ত হইল।

(চিত্র নং 18)

প্রমাণ : $\angle B$ সমকোণ বলিয়া,

$$AB^2=AC^2-BC^2=AC^2-CD^2=(AC+CD)(AC-CD)$$
$$=(AD+CD+CD).AD=(AD+AB).AD$$
$$[\because \quad CD=BC=\tfrac{1}{2}AB, \quad \therefore \quad CD+CD=AB]$$
$$=AD^2+AB.AD,$$

$\therefore \quad AB^2-AB.AD=AD^2$, বা, $AB(AB-AD)=AD^2$,

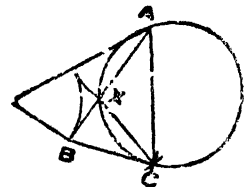
বা, $AB(AB-AX)=AX^2 \quad [\because \quad AD=AX]$

বা, $AB.BX=AX^2$, সুতরাং X বিন্দুতে AB মাধ্যমিক ছেদে বিভক্ত হইয়াছে।

[**দ্রষ্টব্য :** যদি AB-কে মাধ্যমিক ছেদে বহির্বিভক্ত করিতে হয়, তবে AC-র বর্দ্ধিতাংশ হইতে BC-র সমান CD অংশ কাটিয়া লইবে। তারপর BA-কে E পর্যন্ত এরূপে বর্দ্ধিত করিবে যেন $AE=AD$ হয়। E বিন্দুতে AB মাধ্যমিক ছেদে বহির্বিভক্ত হইবে।]

(*b*) To construct an isosceles triangle having each of the angles at the base double of the veritcal angle. [C.U.'20, '37]

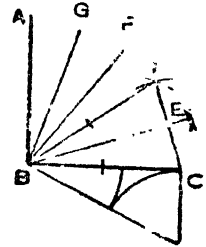
[এরূপ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যেন তাহার প্রত্যেক ভূমিসংলগ্ন কোণ শীর্ষকোণের দ্বিগুণ হয়।]

অঙ্কন : যে-কোন সরল রেখা AB লও। উহাকে X বিন্দুতে মাধ্যমিক ছেদে বিভক্ত কর, যেন $AB.BX=AX^2$ হয়। B ও X বিন্দু দুইটিকে কেন্দ্র করিয়া AX-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্ত চাপ আঁক। উহারা যেন C বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। AC, BC ও CX যোগ কর। $\triangle ABC$ নির্ণেয় ত্রিভুজ হইল।

(চিত্র নং 19)

প্রমাণ : $\triangle AXC$র পরিবৃত্ত অঙ্কিত কর। এক্ষণে, $AB.BX = AX^2 = BC^2$ ($\because BC = AX$), সুতরাং AXC বৃত্তের C বিন্দুতে EC স্পর্শক। ∴ স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা। ∴ $\angle ECX$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle CAX$. $AX = CX$ (অঙ্কন), ∴ $\angle ACX = \angle CAX$. ∴ সমগ্র কোণ $\angle ACB = 2\angle CAX = 2\angle A$. আবার, $\angle BXC = \angle CAX + \angle ACX = 2\angle A$; কিন্তু $\angle B = \angle BXC$ ($\because BC = AX = CX$), ∴ $\angle B = 2\angle A$; ∴ $\angle B = \angle ACB$. ∴ $AB = AC$. ∴ $\triangle ABC$ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং ইহার $\angle B = \angle C = 2\angle A$.

(c) Divide a right angle into five equal parts.

[একটি সমকোণকে পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত কর।]

$\angle ABC$ সমকোণ, ইহাকে সমান পাঁচ অংশে বিভক্ত করিতে হইবে। BC বাহুকে লইয়া এমন একটি BCD সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ আঁক যেন উহার $\angle C$ ও $\angle D$ প্রত্যেকে শীর্ষকোণ $\angle CBD$র দ্বিগুণ হয়। এক্ষণে $\angle CBD$কে BE দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর। এখন এই $\angle CBE$র সমান করিয়া B বিন্দুতে $\angle DBF$ ও $\angle FBG$ অঙ্কিত কর। এক্ষণে সমকোণটি BE, BD, BF ও BG দ্বারা সমান পাঁচ অংশে বিভক্ত হইল।

প্রমাণ : $\because \angle C = \angle D = 2\angle CBD$,
∴ $\angle C = 72°$, ∴ $\angle CBD = 36°$,
∴ $\angle CBE = \angle DBE = 18°$.

সুতরাং $\angle DBF = \angle FBG = \angle CBE = 18°$.

অতএব, অবশিষ্ট $\angle ABG = 90° - 18° \times 4 = 18°$.

অতএব, সমকোণটি পাঁচটি সমান ভাগে বিভক্ত হইয়াছে।

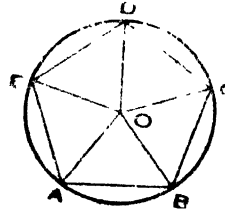
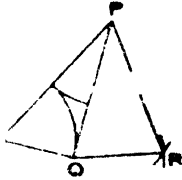
(চিত্র নং 20)

সম্পাদ্য 8

To construct a regular pentagon (পঞ্চভুজ) (i) in, or (ii) about a given circle. [C. U. '15, '34, '37, '47]

[একটি বৃত্তের (1) অন্তর্লিখিত ও (2) পরিলিখিত এক একটি সুষম পঞ্চভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।]

মনে কর, প্রদত্ত O-কেন্দ্রীয় বৃত্তে একটি সুষম পঞ্চভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

(1) **অঙ্কন ঃ** PQR এমন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ আঁক যেন উহার Q ও R কোণের প্রত্যেকটি P কোণের দ্বিগুণ হয়। OA যে-কোন ব্যাসার্ধ আঁক এবং O বিন্দুতে $\angle AOB = \angle Q$ আঁক, উহার OB বাহু যেন পরিধিকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। AB যোগ কর। AB-র সমান করিয়া

(চিত্র নং 21)

BC, CD, DE জ্যা আঁক এবং AE যোগ কর। এক্ষণে ABCDE প্রদত্ত বৃত্তের অন্তর্লিখিত সুষম পঞ্চভুজ হইল।

প্রমাণ ঃ $\because$ $\angle Q = 2\angle P$ এবং $\angle R = 2\angle P$, $\therefore$ $\angle P + \angle Q + \angle R = 5\angle P$, $\therefore$ $5\angle P = 180°$, $\therefore$ $\angle P = 36°$, $\therefore$ $\angle Q = 72°$.

এক্ষণে, $\because$ AB, BC, CD ও DE চারিটি সমান জ্যা,

$\therefore$ কেন্দ্রস্থ $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = 72°$.

$\therefore$ ঐ কোণগুলির সমষ্টি $= 72° \times 4 = 288°$; কিন্তু O বিন্দুস্থ কোণগুলির সমষ্টি 360°, $\therefore$ $\angle EOA = 360° - 288° = 72°$.

$\therefore$ AE জ্যাও অপর জ্যাগুলির সমান।

আবার $\because$ $\triangle OAB$ সমদ্বিবাহু, $\therefore$ $\angle OAB = \angle OBA$; এবং $\because$ $\angle AOB = 72°$, $\therefore$ $\angle OAB + \angle OBA = 180° - 72° = 108°$. $\therefore$ $\angle OAB = \angle OBA = 54°$. এইরূপে চিত্রের প্রত্যেক ত্রিভুজের ভূমিকোণ $= 54°$. $\therefore$ পঞ্চভুজটির প্রত্যেক কোণ $= 2 \times 54° = 108°$. অতএব, ABCDE ঐ বৃত্তে একটি অন্তর্লিখিত সুষম পঞ্চভুজ।

(2) A, B, C, D, E বিন্দুতে যথাক্রমে বৃত্তের পাঁচটি স্পর্শক PQ, QR, RS, ST ও PT অঙ্কিত কর। ইহাতে যে PQRST পঞ্চভুজটি উৎপন্ন হইল তাহাই বৃত্তটির পরিলিখিত সুষম পঞ্চভুজ।

প্রমাণ ঃ $\angle OAQ + \angle OBQ = 2$ সমকোণ, $\therefore$ $\angle Q = \angle AOB$-র সম্পূরক। অনুরূপে $\angle P$, $\angle R$, $\angle S$, $\angle T$ কোণগুলিও তাহাদের বিপরীত

O বিন্দুস্থ কোণের সম্পূরক। কিন্তু O বিন্দুস্থ পাঁচটি কোণ সমান হওয়ায়, ∠P, ∠Q, ∠R প্রভৃতি কোণ পাঁচটিও সমান।

আবার, PO ও QO যোগ করিলে △AOQ ও △BOQ সর্বসম হইবে;
∴ ∠AOQ = ∠BOQ = $\frac{1}{2}$∠AOB. অনুরূপে ∠AOP = $\frac{1}{2}$∠AOE.
∴ ∠AOQ = ∠AOP. ∴ △AOP ও △AOQ সর্বসম, ∴ AQ = AP.
∴ PQ = 2AQ. অনুরূপে QR = 2BQ, কিন্তু AQ = BQ, ∴ PQ = QR.
অনুরূপে PQRST-র সব বাহু সমান। ∴ উহাই পরিলিখিত সুষম পঞ্চভুজ হইল।

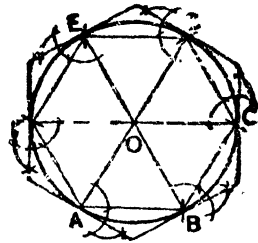
সম্পাদ্য 9

To construct a regular figure of 6 sides (i) in, or (ii) about a given circle.

[একটি বৃত্তের (1) অন্তর্লিখিত ও (2) পরিলিখিত একটি করিয়া সুষম ষড়্‌ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।]

O প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র। বৃত্তটির একটি অন্তর্লিখিত ও একটি পরিলিখিত সুষম ষড়্‌ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

(1) **অঙ্কন:** OA যে-কোন ব্যাসার্ধ লও এবং AO-র সমান করিয়া AB, BC, CD, DE ও EF জ্যাগুলি অঙ্কিত কর। AF যোগ কর। এক্ষণে ABCDEF ঐ বৃত্তটির অন্তর্লিখিত সুষম ষড়্‌ভুজ হইল।

(চিত্র নং 22)

প্রমাণ: AO, BO, CO প্রভৃতি যোগ কর।

এক্ষণে AB, BC, CD, DE ও EF পাঁচটি জ্যা সমান বলিয়া উহাদের কেন্দ্রস্থ সম্মুখ কোণগুলিও সমান। আবার, △AOB, △BOC প্রভৃতি সমবাহু বলিয়া AOB, BOC প্রভৃতি পাঁচটি কোণের প্রত্যেকটি 60°; সুতরাং অবশিষ্ট AOF কোণের পরিমাণও 60° হইবে (∵ O বিন্দুস্থ কোণগুলির সমষ্টি = 360°)।
∴ AOF ত্রিভুজও সমবাহু। ∴ ষড়্‌ভুজটি সমবাহু হইল এবং ∠ABC, ∠BCD প্রভৃতি কোণগুলির প্রত্যেকটি 60 ডিগ্রীর দ্বিগুণ বা 120° বলিয়া ষড়্‌ভুজটির কোণগুলিও সমান।

অতএব, ABCDEF হইল বৃত্তটির অন্তর্লিখিত সুষম ষড়্‌ভুজ।

(2) **অঙ্কন :** A, B, C, D, E, F বিন্দুতে প্রদত্ত বৃত্তের 6টি স্পর্শক আঁক। উহারা পরস্পর ছেদ করিয়া যে ষড়ভুজটি উৎপন্ন করিবে তাহাই বৃত্তের পরিলিখিত সুষম ষড়ভুজ হইবে।

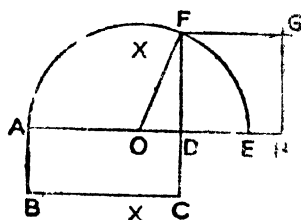
[সম্পাদ্য 8এর ন্যায় প্রমাণ দাও]

সম্পাদ্য 10

To construct a square equal in area to a given rectangle.

[একটি আয়তক্ষেত্রের সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।]

ABCD একটি আয়তক্ষেত্র। ইহার সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : ADকে E বিন্দু পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত কর যেন DE=DC হয়। AEকে ব্যাস করিয়া একটি অর্ধবৃত্ত আঁক এবং CDকে বর্ধিত করিয়া অর্ধবৃত্তকে F বিন্দুতে ছেদ কর। DEকে H বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন DH=DF হয়। F ও H বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং DF ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ আঁক, উহারা যেন পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করিল। FG ও HG যোগ কর। DFGH উদ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র হইল।

(চিত্র নং 23)

প্রমাণ : ∵ DFGHএর সব বাহু সমান ও ∠D সমকোণ, ∴ উহা একটি বর্গক্ষেত্র। AEর মধ্যবিন্দু O বৃত্তের কেন্দ্র। FO যোগ কর। OA=OF=OE.

∵ ∠D সমকোণ, ∴ $DF^2=OF^2-OD^2=OE^2-OD^2$

$$=(OE+OD)(OE-OD)=(AO+OD).DE=AD.DE=AD.DC.$$

∴ DFGH বর্গক্ষেত্র=ABCD আয়তক্ষেত্র।

অনুসিদ্ধান্ত : (1) To construct a rectangle equal to a given square.

[(1) একটি বর্গক্ষেত্রের সমান একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করিতে হইবে।]

Hints : [চিত্র আঁকিয়া লও] মনে কর, প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু a. $2a$ অপেক্ষা বৃহত্তর একটি সরল রেখা AB লও এবং ABকে ব্যাস করিয়া অর্ধবৃত্ত আঁক। A বিন্দুতে aর সমান AC লম্ব টান এবং ABর সমান্তরাল CE টান,

উহা যেন অর্ধবৃত্তের পরিধিকে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল। DF⊥AB টান। AF ও BF বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রই উদ্দিষ্ট আয়তক্ষেত্র।

অর্ধবৃত্তস্থ ∠ADB সমকোণ এবং D হইতে অতিভুজ ABর উপর DF লম্ব,

∴ $a^2 = AC^2 = DF^2 = AF.BF.$

(2) To divide a given st. line so that the rectangle contained by the segments may be equal to a given square.

[একটি সরলরেখাকে এরূপভাবে অন্তর্বিভক্ত কর যেন উহার অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।]

[Hints : AB প্রদত্ত সরলরেখা ও P প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু লইয়া অনুসিদ্ধান্ত (1)-এর মত কর।] **পরিশিষ্টে সম্পাদ্যগুলি দেখ।**

সম্পাদ্য 11

To construct a square equal in area to a given rectilineal figure (or a given polygon).

[একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বা বহুভুজের সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করিতে হইবে।]

মনে কর, ABCDE একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্র। ইহার সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করিতে হইবে।

(চিত্র নং 23A)

অঙ্কন : AC ও AD যোগ কর। BF ∥ AC এবং EH ∥ AD টান, উহারা যেন CD-র বর্ধিতাংশকে যথাক্রমে F ও H বিন্দুতে ছেদ করিল। AF ও AH যোগ কর এবং AK⊥FH টান। AK হইল △AFH-এর উচ্চতা। FHকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। XY সরলরেখা হইতে XP = FO এবং PN = AK কাটিয়া লও। XNকে ব্যাস করিয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর, XN এর মধ্যবিন্দু M লও। PQ⊥XY টান, PQ যেন অর্ধবৃত্তের পরিধিকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। PQএর উপর একটি বর্গক্ষেত্র PQRS অঙ্কিত কর। উহাই উদ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র।

প্রমাণঃ ∵ $\triangle ACF$ ও $\triangle ABC$ একই ভূমি ACর উপর এবং AC ও BF সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত, ∴ $\triangle ABC = \triangle ACF$.

অনুরূপে, $\triangle ADE = \triangle ADH$.

∴ $\triangle ABC + \triangle ADC + \triangle ADE = \triangle ACF + \triangle ADC + \triangle ADH$

∴ ক্ষেত্র $ABCDE = \triangle AFH = \frac{1}{2}FH.AK = FO.AK$.

আবার, $PQ^2 = QM^2 - PM^2$ (∵ $\angle P$ সমকোণ)

$= MX^2 - PM^2$ (∵ $MX = QM =$ ব্যাসার্ধ)

$= (MX + PM)(MX - PM) = (MX + PM)(MN - PM)$

$= PX.PN = FO.AK =$ ক্ষেত্র ABCDE.

∴ PQRS বর্গক্ষেত্র = ABCDE ঋজুরেখ ক্ষেত্র।

[**দ্রষ্টব্যঃ** চতুর্ভুজের সমান বর্গক্ষেত্র অঙ্কনেরও এই প্রণালী]

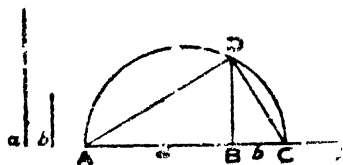
সম্পাদ্য 12

To find the mean proportional between two given straight lines.

[দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইবে।]

মনে কর, a ও b দুইটি প্রদত্ত সরল রেখা। ইহাদের মধ্য-সমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইবে।

(চিত্র নং 24)

অঙ্কনঃ যে কোন সরল রেখা AX লও। ইহা হইতে $AB = a$ এবং $BC = b$ কাটিয়া লও। ACকে ব্যাস করিয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর এবং $BD \perp AC$ টান। BD যেন অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। এই BD রেখা AB ও BCর মধ্য-সমানুপাতী।

প্রমাণঃ AD ও DC যোগ কর। $\angle ADC$ অর্ধবৃত্তস্থ বলিয়া সমকোণ। ∵ সমকৌণিক বিন্দু D হইতে অতিভুজ ACর উপর DB লম্ব,

∴ $\triangle ABD$ ও $\triangle DBC$ সদৃশ,

∴ $\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC}$, ∴ $\frac{a}{BD} = \frac{BD}{b}$, ∴ BD, a ও bএর মধ্য-সমানুপাতী।

[**দ্রষ্টব্যঃ** চিত্র নং 24 দেখ। মনে কর, AC ও AB প্রদত্ত রেখা এবং উহারা একটির উপর অপরটি এরূপে সমাপতিত যে উভয়ের A প্রান্ত মিলিত

হইয়াছে। এরূপ ক্ষেত্রে AD রেখা AC ও AB-র মধ্য-সমানুপাতী হইবে। আবার, CD রেখা CB ও CA-র মধ্য-সমানুপাতী।]

12. (a) Find geometrically the value of $\sqrt{5}$.

[জ্যামিতিক প্রণালীতে $\sqrt{5}$এর মান নির্ণয় কর।]

[চিত্র নং 24 দেখ] AC=5 দৈর্ঘ্য একক লও। উহা হইতে AB=1 দৈর্ঘ্য একক কাটিয়া লও। AB ও ACর মধ্য-সমানুপাতী AD অঙ্কন কর।

এক্ষণে, ∵ AD রেখা AB ও ACর মধ্য-সমানুপাতী,

∴ $AD^2 = AB.AC = 5.1$ বা 5 বর্গ একক।

∴ $AD = \sqrt{5}$ দৈর্ঘ্য একক। অতএব AD দৈর্ঘ্যই $\sqrt{5}$-এর জ্যামিতিক মান।

[দ্রষ্টব্য : $\sqrt{15} = \sqrt{5 \times 3}$. সুতরাং 5 ও 3 এককের মধ্য-সমানুপাতীই $\sqrt{15}$এর মান হইবে। $\sqrt{34}$ থাকিলে, $\sqrt{34} = \sqrt{6.8 \times 5}$ ধরিতে হয়।]

Exercise 2

1. Find the mean proportional between 3 cm. and 4 cm.

[3 ও 4 সেন্টিমিটারের মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় কর।]

2. Find geometrically the values of $\sqrt{35}$ and $\sqrt{26}$.

[জ্যামিতির সাহায্যে $\sqrt{35}$ ও $\sqrt{26}$এর মান নির্ণয় কর।]

3. Draw a regular decagon in a given circle.

[একটি বৃত্তে একটি সুষম দশভুজ অঙ্কিত কর।]

4. Draw a regular polygon of 12 sides in or about a given circle.

[একটি বৃত্তের অন্তর্লিখিত বা পরিলিখিত একটি সুষম দ্বাদশভুজ অঙ্কিত কর।]

5. Describe a circle in, or about, a regular polygon.

[একটি সুষম বহুভুজের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত অঙ্কন কর।]

6. Inscribe a square in a given circle.

[একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।]

7. Inscribe a regular octagon in a circle of radius 5 cm. [C. U. '35]

[5 সেন্টিমিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে একটি সুষম অষ্টভুজ অঙ্কিত কর।]

8. Inscribe in a circle of radius 2 cm. a square and find its side by measurement and calculation. [C. U. '51]

[দুই সেন্টিমিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর এবং উহার বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।] [উঃ 2·82 সে. মি.]

9. Construct a regular hexagon circumscribing a circle of radius 1·5 inches. Measure a side of this hexagon. [Pat. U. '51]

[একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 1·5 ইঞ্চি। উহার একটি পরিলিখিত সুষম ষড়্‌ভুজ অঙ্কন কর এবং উহার একটি বাহু মাপ।]

10. About a circle of radius 1" describe an equilateral triangle. Draw a square whose area is equal to that of the triangle. Measure the sides of the square and the triangle. [U. U. '51]

[একটি 1" ব্যাসার্ধের বৃত্তের পরিলিখিত সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। উহার ক্ষেত্রফলের সমান একটি বর্গক্ষেত্র আঁক এবং ঐ বর্গক্ষেত্র ও ত্রিভুজের বাহু মাপ।]

11. In a given circle inscribe a triangle equiangular to a given triangle.

[একটি প্রদত্ত বৃত্তে একটি প্রদত্ত ত্রিভুজের সদৃশকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।]

12. About a given circle circumscribe a triangle equiangular to a given triangle.

[একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সদৃশকোণী করিয়া একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের পরিলিখিত ত্রিভুজ অঙ্কন কর।]

[পরিশিষ্ট শেষ]

Solid Geometry (ঘন জ্যামিতি)

কতিপয় সংজ্ঞা

1. **তল** বা পৃষ্ঠের (surface) দৈর্ঘ্য এবং **প্রস্থ** আছে কিন্তু বেধ নাই। ... এর তল **দ্বিমাত্রিক**।

2. তল দ্বারা বেষ্টিত দেশকে **ঘন** (solid) বলে। ইহার দৈর্ঘ্য, **প্রস্থ** ... এবং আছে, স্থতরাং **ইহা** ত্রিমাত্রিক।

3. তলের উপরিস্থিত যে কোন তুইটি বিন্দু যোগ করিলে যে সরলরেখা ... যায় তাহা যদি তলের সহিত সম্পূর্ণ মিলিয়া যায়, তবে ঐ তলকে **সমতল** plane বা plane surface বলে।

যে তল সমতল নহে, তাহাকে **বক্রতল** (curved surface) বলে।

দ্রষ্টব্য : তোমরা জান যে, একটি বিন্দুর গতি দ্বারা একটি রেখা উৎপন্ন ... অতএব তুইটি বিভিন্ন রেখার মিলন বা ছেদ একটি বিন্দুতে হইবে। সেইরূপ, রেখার গতি দ্বারা তল উৎপন্ন হয়, স্থতরাং তুইটি তল **একটি** রেখায় মিলিত হয়। আবার, একটি তলের গতি দ্বারা একটি ঘন (solid) উৎপন্ন হয়।

4. যে সমস্ত সরলরেখা একই সমতলের উপর অবস্থিত তাহাদিগকে **সামতলিক** বা **একতলীয়** (co-planar) বলে।

5. তুইটি সরলরেখা দিয়া যদি কোন সমতল আঁকা না যায়, তবে ঐ রেখা দুইটিকে **অসামতলিক** (skew বা non-coplanar) বলে। এরূপ সরলরেখাদ্বয় ... হইলেও কখনও মিলিত হইবে না, অথচ উহারা সমান্তরাল নহে।

উদাহরণ : তুইটি পেন্‌সিল আড়াআড়িভাবে একটার উপর আর একটা ... অসামতলিক রেখা হয়।

6. তুইটি **অসামতলিক সরলরেখার** (skew straight lines) **অন্তর্ভুক্ত কোণ :** তুইটি অসামতলিক (skew) সরলরেখার মধ্যে একটি সরলরেখা তাহারই উপরিস্থিত কোন বিন্দু হইতে অপরটির সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত সরলরেখার সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণকে ঐ তুইটি skew সরলরেখার **অন্তর্ভুক্ত কোণ বলা** হয়।

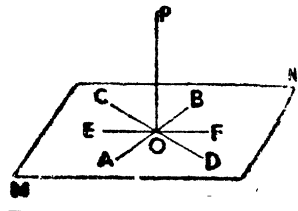
মনে কর, AB ও CD তুইটি skew সরলরেখা এবং AB-র উপরিস্থিত যে কোন P বিন্দু হইতে PQ ∥ CD টানা হইল। এক্ষণে AB ও PQ-এর মধ্যস্থিত কোণ AB ও CD skew রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ হইবে।

7. সামতলিক দুইটি সরলরেখা হয় পরস্পর মিলিত হইবে, না হয় সমান্তরাল হইবে।

8. যদি দুইটি সরলরেখা একই সমতলে অবস্থিত থাকে এবং উহাদিগকে দুই দিকেই বর্ধিত করিলে মিলিত না হয়, তবে উহাদিগকে সমান্তরাল বলা হয়।

9. একটি সরলরেখা ও একটি সমতল সমান্তরাল হয় যদি তাহাদিগকে যে কোন দিকে যত দূর ইচ্ছা বর্ধিত করিলেও কখনও মিলিত না হয়।

10. দুইটি সমতল সমান্তরাল হয় যদি তাহাদিগকে চারিদিকেই অনন্তভাবে বর্ধিত করিলেও তাহারা কখনও মিলিত না হয়।

11. একটি সরলরেখা যদি একটি সমতলের সহিত এমনভাবে মিলিত হয় যে, ঐ ছেদবিন্দু দিয়া অঙ্কিত ঐ সমতলস্থ প্রত্যেক সরলরেখার উপরেই ঐ সরলরেখাটি লম্ব, তবে ঐ সরলরেখাকে ঐ সমতলের উপরে লম্ব (perpendicular বা normal) বলে। PO সরলরেখা MN সমতলের উপর O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। PO যদি O বিন্দু দিয়া অঙ্কিত ঐ সমতলের উপরিস্থিত AO, BO, CO প্রভৃতি সমুদয় সরলরেখার উপর লম্ব হয়, তবে PO ঐ MN সমতলের উপর লম্ব হইবে। যে সরলরেখা বা সমতল ওলন দড়ির সমান্তরাল তাহাকে **উল্লম্ব** (vertical) বলা হয়।

(চিত্র নং 25)

উল্লম্বের সহিত লম্ব সমতলকে অনুভূমিক (horizontal) বলে।

12. যে চতুর্ভুজের দুইটি সংলগ্ন বাহু এক সমতলে এবং অন্য সংলগ্ন বাহুদ্বয় অন্য এক সমতলে অবস্থিত তাহাকে skew চতুর্ভুজ বলে।

13. নিম্নের সিদ্ধান্তগুলি **স্বতঃসিদ্ধ** (Axioms) বলিয়া গণ্য করা হয়:—

(*a*) দুইটি সরলরেখা একটিমাত্র বিন্দুতে মিলিত হইতে (ছেদ করিতে) পারে।

(*b*) একটি সরলরেখা কোন একটি সমতলের সহিত একটি বিন্দুতে মিলিত হইতে (অর্থাৎ ছেদ করিতে) পারে।

(*c*) দুইটি বিন্দু দিয়া একটিমাত্র সরলরেখা টানা যায়।

(*d*) একটি সমতলস্থ দুইটি বিন্দু যোগ করিলে যে রেখা পাওয়া যায় তাহা অনন্ত পর্যন্ত বর্ধিত করিলেও ঐ সমতলের উপর অবস্থিত থাকে।

(*e*) একটি সমতলকে তাহার উপরিস্থ কোন সরলরেখাকে অক্ষ ধরিয়া ঘুরাইলে বিশ্বের সমস্ত বিন্দু দিয়াই এই সমতল যাইবে।

(সমতল বলিলে অনন্ত পর্যন্ত বর্ধিত সমতল বুঝিতে হইবে।)

(*f*) একটি সরলরেখা দিয়া অসংখ্য সমতল আঁকা যায়।

(*g*) একটি সরলরেখা এবং ইহার বহিঃস্থ একটি বিন্দু দিয়া একটিমাত্র সমতল আঁকা যায়।

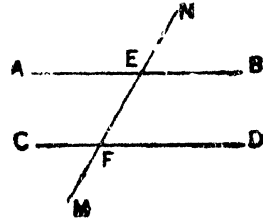
(*h*) তুইটি ছেদী সরলরেখা দিয়া একটি এবং কেবল একটিমাত্র সমতল আঁকা যায়।

(*i*) তুইটি পরস্পরছেদী সমতল একটি সরলরেখায় পরস্পরকে ছেদ করে এবং তাহার বাহিরে কোন বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিতে পারে না।

বিবিধ উদাহরণ 3

উদা. 1. If a straight line intersects two parallel straight lines, then the three st. lines are co-planar.

[যদি একটি সরলরেখা তুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করে, তবে সরলরেখা তিনটি সামতলিক হইবে।]

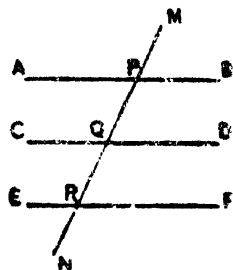
মনে করা যাক, AB এবং CD এই তুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে MN সরলরেখা E এবং F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে AB, CD, MN সামতলিক।

(চিত্র নং 26)

প্রমাণ ঃ যেহেতু AB এবং CD সমান্তরাল, অতএব তাহারা সামতলিক। এখন E এবং F যথাক্রমে AB এবং CD-র উপরে অবস্থিত বিন্দু; অতএব উহারা ঐ সমতলের উপরিস্থিত বিন্দু।

অতএব, EF সরলরেখা অর্থাৎ MN সরলরেখা ঐ সমতলের উপর অবস্থিত [স্বতঃসিদ্ধ (*d*)]. $\therefore$ AB, CD, MN সামতলিক।

উদা. 2. Show that if three or more parallel straight lines intersect a given straight line, they are co-planar.
[C. U. '21, '51]

[যদি তিনটি বা ততোধিক সমান্তরাল সরলরেখা অন্য একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে ছেদ করে, তবে উহারা একতলীয় হইবে।]

মনে করা যাক AB, CD, EF সমান্তরাল সরলরেখা তিনটি MN সরলরেখাকে যথাক্রমে P, Q, R বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB, CD, EF একতলীয়।

(চিত্র নং 27)

প্রমাণঃ AB এবং CD সমান্তরাল বলিয়া ইহাদের মধ্য দিয়া একটি সমতল আঁকা যায়। মনে কর, এই সমতল 'p'. এখন P এবং Q বিন্দু দুইটি p-সমতলের উপর অবস্থিত, সুতরাং PQ সরলরেখা অর্থাৎ MN সরলরেখা ঐ p-সমতলের উপর অবস্থিত। অতএব, R বিন্দু p-সমতলে অবস্থিত।

এখন AB এবং EF সমান্তরাল বলিয়া সামতলিক। মনে করা যাক, ইহারা আর একটি সমতল 'q'-এর উপর অবস্থিত। অতএব R বিন্দু q সমতলের উপর অবস্থিত। কিন্তু AB সরলরেখা এবং ইহার বহিঃস্থ R বিন্দু দিয়া দুইটি সমতল p এবং q আঁকা যায় না। [স্বতঃসিদ্ধ (g)]।

∴ p এবং q একই সমতল।

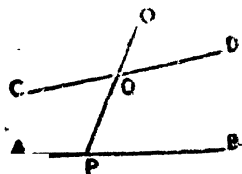
∴ EF সরলরেখা p-সমতলের উপর অবস্থিত হইবে।

∴ AB, CD, EF সামতলিক।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে যদি AB, CD, EF-এর সমান্তরাল আরও সরলরেখা MN-সরলরেখাকে ছেদ করে, তবে তাহারাও AB, CD, EF-এর সহিত সামতলিক হইবে।

উদা. 3. Through a given point draw a straight line which intersects two given straight lines not lying in one and the same plane with the given point. [C. U. '12]

[কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর সহিত একই সমতলে অবস্থিত নহে এরূপ দুইটি প্রদত্ত সরলরেখাকে ছেদ করিয়া ঐ বিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা অঙ্কিত কর।]

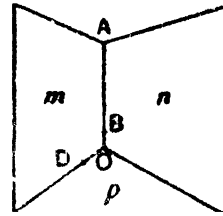
মনে করা যাক, O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং AB ও CD দুইটি প্রদত্ত সরলরেখা। O এবং AB দিয়া একটি সমতল 'm' আঁকা হইল। মনে করা যাক, এই সমতল CDকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন OQ সরলরেখা m-সমতলের উপর অবস্থিত হইবে, অর্থাৎ OQ এবং AB সরলরেখা একতলীয়। অতএব, ইহারা P বিন্দুতে ছেদ করিবে। অতএব OQ সরলরেখাই নির্ণেয় সরলরেখা।

(চিত্র নং 28)

মন্তব্য ঃ OQ সরলরেখা AB-র সহিত সমান্তরাল হইলে ইহারা ছেদ করিবে না। সেক্ষেত্রে উক্তপ্রকার কোন সরলরেখাই পাওয়া যাইবে না।

উদা. 4. Prove that the common sections of any three planes (non-collinear) meet at a point. [C. U. '11]

[সমরেখ নহে এরূপ তিনটি সমতলের সাধারণ ছেদরেখা তিনটি সমবিন্দু।]

মনে করা যাক m, n, p তিনটি সমতল। প্রমাণ করিতে হইবে যে ইহারা একটি বিন্দুতে ছেদ করিবে।

প্রমাণ ঃ m এবং n সমতলদ্বয় একটি **রেখা** ABতে ছেদ করিল এবং m ও p সমতল CD রেখায় ছেদ করিল [স্বতঃসিদ্ধ (i)]। AB যদি p সমতলের সমান্তরাল না হয়, তবে AB এবং CD সরলরেখাদ্বয় একটি বিন্দুতে ছেদ করিবে। মনে করা যাক এই বিন্দু O. অতএব, তিনটি সমতল O বিন্দুতে ছেদ করিল।

(চিত্র নং 29)

[**দৃষ্টান্ত ঃ** ঘরের দুইটি দেওয়াল এবং মেঝে একটি বিন্দুতে মিলিত হয়।]

উদা. 5. Any three straight lines forming a triangle are co-planar.

[যে-কোন তিনটি সরলরেখা একটি ত্রিভুজ গঠন করিলে উহারা একতলীয় হইবে।]

মনে কর, AB, BC ও AC সরলরেখাত্রয় △ABC উৎপন্ন করিয়াছে। ∵ AB ও BC দুইটি ছেদী সরলরেখা দিয়া কেবল একটিমাত্র সমতল আঁকা যায়, ∴ AB ও BC একতলীয়। অতএব, A ও C বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাও ঐ সমতলেই অবস্থিত থাকিবে।

∴ △ABCর AB, BC, CA বাহু তিনটি একতলীয়।

উদা. 6. Draw a straight line to cut three given non-coplanar straight lines. [C. U. '13]

[একতলীয় নহে এরূপ তিনটি সরলরেখাকে ছেদ করিয়া একটি সরলরেখা অঙ্কন কর।]

মনে কর, AB, CD ও PQ তিনটি অসামতলিক সরলরেখা। উহাদিগকে ছেদ করে এমন একটি সরলরেখা টানিতে হইবে। AB সরলরেখা দিয়া

একটি সমতল আঁক। ABকে অক্ষ করিয়া ঐ সমতলকে এরূপে ঘুরাও যেন উহা CD ও PQকে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে এবং XY যেন ABর সমান্তরাল না হয়। এক্ষণে, ∵ X, Y এবং AB একই সমতলে অবস্থিত,

∴ XY সরলরেখা ABকে কোন এক বিন্দুতে ছেদ করিবে।

অতএব, XY সরলরেখাই উদ্দিষ্ট সরলরেখা হইল।

উদা. 7. If a st. line outside a given plane is parallel to any st. line drawn in the plane, it is parallel to the plane itself. [C. U. '31]

[কোন সমতলের বহিঃস্থ কোন সরলরেখা যদি ঐ সমতলস্থ কোন সরলরেখার সমান্তরাল হয়, তবে উহা ঐ সমতলের সমান্তরাল হইবে।]

মনে কর, PQ সমতলের উপর AB একটি সরলরেখা, এবং ঐ সমতলের বহিঃস্থ একটি CD সরলরেখা ABর সমান্তরাল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, CD সরলরেখা PQ সমতলের সমান্তরাল।

প্রমাণ : ∵ CD ও AB সমান্তরাল, ∴ উহারা একতলীয় এবং PQ সমতলের সহিত ঐ দ্বিতীয় সমতলটির ছেদরেখা হইল AB. অতএব, CDকে বর্ধিত করিলে উহা কখনও PQ-সমতলকে ছেদ করিতে পারে না ; কারণ, CD যদি PQ-সমতলকে ছেদ করে, তবে সেই ছেদবিন্দু ABর উপর অবস্থিত হইবে, কিন্তু তাহা অসম্ভব (∵ AB ∥ CD).

∴ PQ সমতলের সহিত CD সমান্তরাল।

উদা. 8. If a st. line is parallel to each of two planes, prove that it is parallel to their line of intersection. [C. U. 1934]

[যদি কোন সরলরেখা দুইটি সমতলের প্রত্যেকটির সমান্তরাল হয়, তবে উহা ঐ তলদ্বয়ের ছেদরেখারও সমান্তরাল হইবে।]

মনে কর, M ও N দুইটি সমতল, XY উহাদের ছেদরেখা এবং PQ সরলরেখা M ও N সমতলের প্রত্যেকটির সমান্তরাল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে PQ ∥ XY.

মনে কর, PQ সরলরেখা দিয়া M-সমতলের সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত সমতলটি N-সমতলকে AB সরলরেখায় ছেদ করিল। অতএব, AB ও PQ সমান্তরাল হইল। ∴ M-সমতল ও PA-সমতল দুইটি সমান্তরাল এবং

প্রমাণ : যেহেতু PO ঐ সমতলস্থ সরলরেখা এবং OB ঐ সমতলের উপর লম্ব, ∴ OB, PO-রেখার উপরে লম্ব।

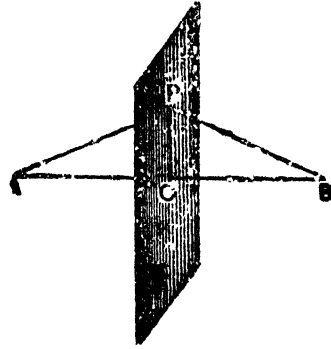
এখন OAP এবং OBP ত্রিভুজদ্বয়ের AO=BO, PO সাধারণ বাহু এবং ∠AOP=∠BOP=1 সমকোণ।

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ AP=BP.

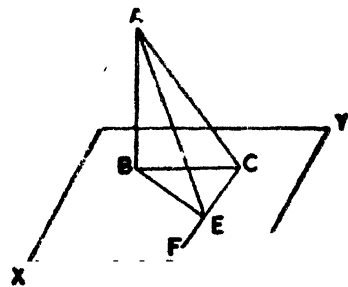
এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, ঐ সমতলস্থ যে কোন বিন্দু A এবং B হইতে সমদূরবর্তী।

∴ ঐ সমতলই উদ্দিষ্ট সঞ্চারপথ।

(চিত্র নং 32)

উদা. 3. AB is perpendicular to a plane and if from B, the foot of the perp., the line BE is drawn perpendicular to a line CF in the plane, show that CE is perp. to the plane of AE, BE. [C. U. '50]

[AB কোন সমতলের উপর লম্ব। লম্বের পাদবিন্দু B হইতে ঐ সমতলস্থ যে-কোন সরলরেখা CF-এর উপর BE লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কর যে, AE ও BE ধারক সমতলের উপর CE লম্ব।]

AB সরলরেখা XY সমতলের উপরে B বিন্দুতে লম্ব। XY সমতলের উপর CF যে-কোন একটি সরলরেখা। CF-এর উপরে BE লম্ব টানা হইল। AE যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, CE সরলরেখা BE এবং AE সরলরেখা-ধারক সমতলের উপরে লম্ব।

AC যুক্ত করা হইল।

(চিত্র নং 33)

প্রমাণ : AB সরলরেখা BE এবং BC-র উপর লম্ব। এখন ABE সমকোণী ত্রিভুজের $AE^2=AB^2+BE^2$ এবং BEC সমকোণী ত্রিভুজের $EC^2=BC^2-BE^2$, ∴ $AE^2+EC^2=AB^2+BE^2+BC^2-BE^2$ $=AB^2+BC^2=AC^2$ [∵ ∠ABC=1 সমকোণ], ∴ ∠AEC সমকোণ।

∴ CE সরলরেখা AE সরলরেখার উপরে লম্ব। কিন্তু CE, BE-র উপর লম্ব ∴ CE সরলরেখা AE ও BE সরলরেখাধারক সমতলের উপর লম্ব।

উদা. 4. One and only one perpendicular can be drawn to a plane through a given point outside the plane.

[কোন সমতলের বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া সমতলটির উপর কেবল একটিমাত্র লম্ব আঁকা যায়।]

মনে কর, M সমতলের বহিঃস্থ একটি বিন্দু O. প্রমাণ করিতে হইবে যে O বিন্দু দিয়া M-সমতলের উপর কেবল একটি মাত্র লম্ব আঁকা যায়।

প্রমাণঃ যদি সম্ভব হয়, মনে কর, O হইতে ঐ সমতলের উপর OA, OB দুইটি লম্ব টানা হইল। এক্ষণে, মনে কর OA, OB দিয়া N-সমতল আঁকা হইল এবং উহা যেন M-সমতলকে CD-রেখায় ছেদ করিল।

∵ OA, OB উভয়েই M-সমতলের উপর লম্ব, এবং CD উহাদের সহিত ঐ সমতলে মিলিত হইয়াছে, ∴ OA, OB উভয়েই CD-র উপর লম্ব, কিন্তু CD-র সহিত OA, OB একই সমতলে অবস্থিত হইয়া উভয়েই CD-র উপর লম্ব হইতে পারে না।

অতএব, O হইতে M-সমতলের উপর কেবল একটিমাত্র লম্ব টানা যায়।

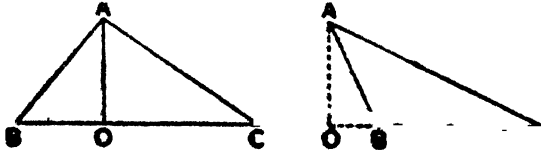
উদা. 5. Prove that a point can be found in a plane equidistant from three given points outside the plane. State the exceptional case, if any. [C. U. '36]

[প্রমাণ কর যে, কোন সমতলের উপর এরূপ একটি বিন্দু নির্ণয় করা যায় যাহা ঐ সমতলবহির্ভূত অন্য তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী। কোন ক্ষেত্রে ইহা অসম্ভব হইবে?]

মনে কর, m একটি প্রদত্ত সমতল এবং A, B ও C ইহার বহিঃস্থ তিনটি বিন্দু। AB-এর মধ্যবিন্দু দিয়া AB-র সহিত লম্ব করিয়া একটি সমতল p আঁকা হইল। অতএব, এই সমতলের প্রত্যেক বিন্দুই A, B হইতে সমদূরবর্তী। এই সমতলটি m সমতলকে যেন ab রেখায় ছেদ করিল, ∴ ab-স্থিত প্রত্যেক বিন্দু A ও B হইতে সমদূরবর্তী। আবার, BC-র মধ্যবিন্দু দিয়া BC-র সহিত লম্ব করিয়া n-সমতল আঁকা হইল। n-এর উপর অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দু B, C হইতে সমদূরবর্তী। এই তলটি m-সমতলকে যেন cd রেখায় ছেদ করিল, ∴ cd-স্থিত যে কোন বিন্দু B ও C হইতে সমদূরবর্তী।

বিবিধ উদাহরণ 5

উদা. 1. If a triangle revolves about its base, show that the vertex describes a circle. [C. U. '19]

[প্রমাণ কর যে ভূমিকে অক্ষ করিয়া যদি একটি ত্রিভুজকে ঘোরান যায় তবে শীর্ষবিন্দুটি একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিবে।]

(চিত্র নং 35)

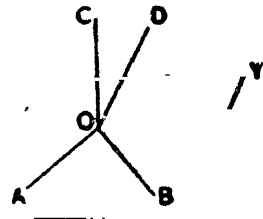
মনে করা যাক, ABC একটি ত্রিভুজ। প্রমাণ করিতে হইবে যে, BCকে অক্ষ করিয়া $\triangle ABC$কে ঘোরান হইলে A বিন্দু একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিবে। BC-র উপর AO লম্ব অঙ্কিত করা হইল।

প্রমাণ : $\because$ $AO \perp BC$, $\therefore$ O, BC-এর উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। যখন ত্রিভুজটিকে ঘোরান হইবে তখন AO, BC-র উপর সর্বদা O বিন্দুতে লম্ব থাকিবে।

$\therefore$ OA রেখা ঘুরিয়া একটি সমতল অঙ্কিত করিবে। আবার, যেহেতু A বিন্দু O হইতে সমদূরবর্তী থাকিবে, অতএব A একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিবে যাহার O কেন্দ্র এবং OA ব্যাসার্ধ হইবে।

উদা. 2. Prove that there cannot be more than three mutually perpendicular straight lines in space meeting at a point. [C. U. '32, '36, '48]

[প্রমাণ কর যে শূন্যস্থ তিনটির অধিক সরলরেখা পরস্পরের উপর একই বিন্দুতে লম্ব হইতে পারে না।]

মনে কর, OA, OB, OC সরলরেখাত্রয় O বিন্দুতে পরস্পরের উপর লম্ব। যদি সম্ভব হয়, মনে কর OD আর একটি সরলরেখা আঁকা হইল যেন OA, OB, OD পরস্পরের উপর O বিন্দুতে লম্ব হয়। OA এবং OB ধারক XY-সমতল আঁক।

(চিত্র নং 36)

যেহেতু OC রেখা, OA এবং OB-র উপর O বিন্দুতে লম্ব, $\therefore$ OC রেখা সমতল XY-এর উপর লম্ব। আবার যেহেতু OD রেখা, OA এবং OB-র উপর লম্ব, $\therefore$ OD রেখা XY-সমতলের উপর লম্ব।

$\therefore$ OC এবং OD সরলরেখা XY-সমতলের উপর একই বিন্দুতে লম্ব, কিন্তু ইহা অসম্ভব। $\therefore$ OC এবং OD একই সরলরেখায় অবস্থিত।

$\therefore$ তিনটির অধিক সরলরেখা পরস্পরের উপর একই বিন্দুতে লম্ব হইতে পারে না।

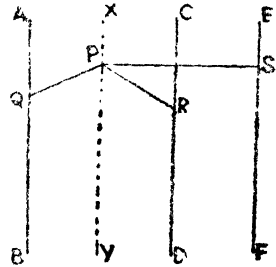
উদা. 3. Prove that all straight lines drawn perpendicular from a given point to a system of parallel straight lines in space are co-planar. [C. U. '27 ; B. U. E. '64]

[প্রমাণ কর যে কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে শূন্যস্থ সমান্তরাল সরলরেখা শ্রেণীর উপর অঙ্কিত লম্বগুলি একতলীয়।]

মনে কর, AB, CD, EF প্রভৃতি কতিপয় শূন্যস্থ সমান্তরাল সরলরেখা এবং P বিন্দু হইতে PQ, PR, PS...যথাক্রমে AB, CD, EF...এর উপর লম্ব টানা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে এই লম্বগুলি একতলীয়।

এক্ষণে, মনে কর, P বিন্দু দিয়া প্রদত্ত সরলরেখাগুলির সহিত সমান্তরাল করিয়া XY সরলরেখা টানা হইল।

$\because$ XY $\parallel$ AB, এবং PQ$\perp$AB, $\therefore$ PQ$\perp$XY.

অনুরূপে PR, PS...প্রত্যেকে XY-এর উপর P বিন্দুতে লম্ব। অতএব, PQ, PR, PS...একই সরলরেখা XYএর P বিন্দুতে XYএর উপর লম্ব হওয়ায় ঐ লম্বগুলি একই সমতলে অবস্থিত।

(চিত্র নং 37)

উদা. 4. Show that there is one and only one point equidistant from four given points which do not lie in one plane and no three of which are in one straight line. [N. U. '48]

[চারিটি নির্দিষ্ট বিন্দু একতলীয় নহে এবং উহাদের কোন তিনটি সমরেখ নহে। প্রমাণ কর যে ঐ বিন্দুগুলি হইতে সমদূরবর্তী একটি মাত্র বিন্দু হইতে পারে।]

মনে কর, A, B, C ও D চারিটি অসামতলিক প্রদত্ত বিন্দু এবং উহাদের কোন তিনটি এক সরলরেখায় অবস্থিত নহে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ঐ বিন্দুগুলি হইতে সমদূরবর্তী একটিমাত্র বিন্দু হইতে পারে।

আবার, যেহেতু $AB \parallel CD$ এবং BD ইহাদের ছেদক এবং
$\angle ABD = 1$ সমকোণ,

$\therefore$ $\angle CDB = 1$ সমকোণ। $\therefore$ $CD \perp BD$.

$\therefore$ CD-রেখা BD এবং DE রেখার উপরে লম্ব। কিন্তু BD এবং DE, XY-সমতলের উপর অবস্থিত,

$\therefore$ CD রেখা XY-সমতলের উপর লম্ব।

বিপরীত উপপাদ্য

If two straight lines are perpendicular to the same plane, they are parallel to one another.

[যদি দুইটি সরলরেখা একই সমতলের উপর লম্ব হয়, তবে তাহারা পরস্পর সমান্তরাল হইবে।]

পূর্বের উপপাদ্য 3-এর মত প্রমাণ করা যায় যে, DE, AD-র উপর লম্ব।

আবার, যেহেতু কল্পনানুসারে CD, XY-সমতলের উপর লম্ব,

$\therefore$ ইহা DE-র উপর লম্ব।

$\because$ CD, AD, BD সামতলিক ; কিন্তু AB, AD, BD সামতলিক।

$\therefore$ AB এবং CD সামতলিক।

আবার, যেহেতু $\angle ABD + \angle CDB = 1$ সমকোণ $+ 1$ সমকোণ $= 2$ সমকোণ,
AB ও CD সমান্তরাল।

অনুসিদ্ধান্ত : যদি XY সমতলের উপর AB লম্ব হয় এবং লম্বের পাদবিন্দু হইতে ঐ সমতলস্থ যে-কোন সরলরেখা DE-র উপর BD লম্ব হয়, তবে AD রেখাও DE-র উপর লম্ব হয়।

37 নং চিত্রে ED-কে F পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন FD = ED হয় এবং AF যোগ কর। $\triangle BED$ ও $\triangle BFD$ সর্বসম, $\therefore$ $BE = BF$.

আবার, $\triangle ABE$ ও $\triangle ABF$ সর্বসম, $\therefore$ $AE = AF$.

এক্ষণে, $\triangle ADE$ ও $\triangle ADF$-এর AD সাধারণ বাহু, $DE = DF$ এবং $AE = AF$

$\therefore$ $\angle ADE = \angle ADF = 1$ সমকোণ।]

[**দ্রষ্টব্য :** এই উপপাদ্যকে "The Theorem of the Three Perpendiculars" বলে।]

বিবিধ উদাহরণ 6

উদা. 1. Straight lines in space which are parallel to a given straight line are parallel to one another.

[C. U. '14, '19, '29, '35]

[শূন্যস্থ সরলরেখাসমূহ যদি একই নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল হয়, তবে তাহারা পরস্পর সমান্তরাল।]

[সংকেত : মনে করা যাক, AB এবং CD সরলরেখা উভয়ই PQ সরল-রেখার সমান্তরাল। প্রমাণ করিতে হইবে AB ও CD সমান্তরাল।

PQ রেখার যে-কোন বিন্দু Q হইতে PQএর উপর লম্ব করিয়া XY সমতল আঁকা হইল, ইহা যেন AB ও CDকে B এবং D বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ : যেহেতু AB ∥ PQ এবং PQ, XY-সমতলের উপর লম্ব, ∴ AB XY-সমতলের উপর লম্ব। তদ্রূপ CD সরলরেখাও XY-সমতলের উপর লম্ব।

এখন যেহেতু AB এবং CD রেখা একই সমতল XY-এর উপর লম্ব,

∴ উহারা পরস্পর সমান্তরাল।

উদা. 2. AB, AC are two straight lines intersecting at right angles, and from B a perpendicular BD is drawn to the plane of AB, AC. Show that AD is perpendicular to the line AC.
[C. U. '38]

[AB ও AC সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমকোণে ছেদ করিয়াছে এবং B হইতে AB ও AC ধারক সমতলের উপর BD লম্ব টানা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে AC রেখার উপর AD লম্ব।]

মনে কর, AB ও AC সরলরেখা দিয়া m-সমতল আঁকা হইল। BE⊥AB টান, সুতরাং BE ∥ AC হইল। ∵ BD m-সমতলের উপর লম্ব (স্বীকার)

∴ BD⊥BE. অতএব, BD ও AB উভয়ের সহিত BE লম্ব হইল।

∴ AB ও BD ধারক সমতলের উপর BE লম্ব। ∴ AC সরলরেখাও ঐ সমতলের উপর লম্ব। এক্ষণে, ঐ সমতলস্থ AD-র সহিত AC সরলরেখা A বিন্দুতে মিলিত হওয়ায় AC⊥AD হইল।

উদা. 3. If perpendiculars are drawn from an external point to a system of parallel straight lines in a plane, show that their feet lie in a straight line perpendicular to the parallel lines. [C. U. '27 ; D. U. '41]

[প্রমাণ কর যে, বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন সমতলস্থিত সমান্তরাল সরলরেখাশ্রেণীর উপর অঙ্কিত লম্বসমূহের পাদবিন্দুগুলি একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং ঐ রেখাটি ঐ সমান্তরাল রেখাগুলির উপর লম্ব।]

মনে কর, m-সমতলের উপর অবস্থিত AB, CD, EF প্রভৃতি কতকগুলি সমান্তরাল সরলরেখা এবং বহিঃস্থ O বিন্দু হইতে উহাদের উপর যথাক্রমে OP, OQ, OR প্রভৃতি লম্ব টানা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে ঐ লম্বসমূহের পাদবিন্দুগুলি সমরেখ এবং ঐ রেখাটি প্রদত্ত সমান্তরাল সরলরেখাগুলির উপর লম্ব।

প্রমাণ : মনে কর, O বিন্দু দিয়া AB, CD, EF প্রভৃতির সমান্তরাল রেখা XY সরলরেখা টানা হইল। ∵ AB ∥ XY এবং OP⊥AB, ∴ OP⊥XY. অনুরূপে OQ, OR প্রভৃতি লম্বগুলি XY-এর উপর O বিন্দুতে লম্ব হইবে। অতএব, OP, OQ, OR প্রভৃতি লম্বগুলি একই সমতলে থাকিবে এবং ঐ সমতল XY-এর উপর লম্ব হইবে। মনে কর ঐ সমতল n.

এক্ষণে n-সমতল প্রদত্ত m-সমতলকে একটি সরলরেখায় ছেদ করিবে।

∵ OP, OQ, OR প্রভৃতি লম্বগুলি n-সমতলে অবস্থিত,

উহাদের পাদবিন্দুগুলি m ও n সমতলের ছেদরেখার উপর অবস্থিত হইবে;

∴ P, Q, R প্রভৃতি পাদবিন্দুগুলি সমরেখ হইল।

∵ AB, CD, EF প্রভৃতির সহিত XY সমান্তরাল এবং XY রেখা n-সমতলের উপর লম্ব, ∴ AB, CD, EF প্রভৃতি রেখাগুলির প্রত্যেকে n-সমতলের উপর লম্ব এবং PQR......রেখাটি ঐ সমতলে অবস্থিত। অতএব, পাদবিন্দুগুলি সমরেখ এবং রেখাটি AB, CD, EF প্রভৃতির উপর লম্ব হইল।

Exercise 6

1. Draw a straight line perpendicular to a given plane from an external point.

[বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে একটি প্রদত্ত সমতলের উপর লম্ব অঙ্কিত কর।]

[**Hints :** বহিঃস্থ O বিন্দু হইতে m-সমতলের উপরিস্থিত AB সরলরেখার উপর OP লম্ব টান। P বিন্দুতে AB-র উপর m-সমতলে PQ লম্ব টান। এক্ষণে O হইতে PQ এর উপর লম্ব টান। উহাই উদ্দিষ্ট লম্ব।]

2. From an external point P, PO is drawn perpendicular to the plane XY and LM is any straight line in the plane XY. If PQ be drawn perpendicular to LM, show that OQ is perpendicular to LM. [C. U. '43]

[বহিঃস্থ P বিন্দু হইতে XY-সমতলের উপর PO লম্ব টানা হইল এবং LM ঐ সমতলস্থ একটি যে-কোন সরলরেখা, LM-এর উপর PQ লম্ব টানা হইলে প্রমাণ কর যে LM-এর উপর OQ লম্ব হইবে।]

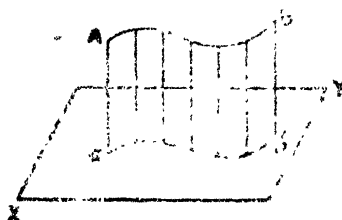
3. Find the locus of the foot of the perpendicular drawn from a given point upon any plane passing through a given straight line. [D. B. '24]

[একটি প্রদত্ত বিন্দু হইতে একটি প্রদত্ত সরলরেখাগামী যে-কোন সমতলের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।]

4. If perpendiculars are drawn from any point to a system of parallel straight lines in space, then all the perpendiculars lie in a plane perpendicular to the parallel lines. [C. U. '26]

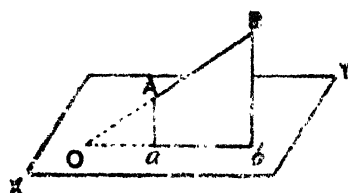
[প্রমাণ কর যে, শূন্যস্থ সমান্তরাল সরলরেখাসমূহের উপর যে-কোন বিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বসমূহ একই সমতলে অবস্থিত এবং সেই তলটি সমান্তরাল রেখাগুলির উপর লম্ব।]

অভিক্ষেপ (Projection)

সংজ্ঞা : (1) কোন রেখার উপরিস্থিত বিন্দুগুলি হইতে কোন সমতলের উপর লম্ব আঁকিলে, পাদবিন্দুর সঞ্চারপথকে ঐ সমতলের উপর সেই রেখার **অভিক্ষেপ** (Projection) বলে।

(চিত্র নং 38)

চিত্রে ab রেখাটি XY সমতলের উপর AB রেখার লম্ব অভিক্ষেপ।

(2) কোন সরলরেখা ও সমতলের উপর তাহার অভিক্ষেপের মধ্যস্থিত কোণকে ঐ সরলরেখার নতি (angle between a st. line and a plane) বলে।

মনে কর, XY সমতলের উপর AB সরলরেখার অভিক্ষেপ ab, সুতরাং AB ও ab সামতলিক। মনে কর,

(চিত্র নং 36)

AB ও ab (অথবা বর্ধিত AB ও ab) পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। অতএব BOb কোণই XY সমতলের উপর AB-র নতি।

[**দ্রষ্টব্য :** "সমতলের উপর সরলরেখার অভিক্ষেপ সরলরেখা হয়।" ইহা একটি উপপাদ্য, ইহা পাঠ্য নহে বলিয়া ইহার প্রমাণ দেওয়া হইল না।]

বিবিধ উদাহরণ 7

উদা. 1. Find the length of the projection of a straight line AB on a plane XY in terms of AB and the angle which AB makes with XY. [C. U. '34]

[AB সরলরেখা এবং উহা XY সমতলের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তাহা দ্বারা ঐ সমতলের উপর AB-র অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।]

মনে কর, XY-সমতলের উপর AB সরলরেখার অভিক্ষেপ ab. ab-র দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে। মনে কর, AB রেখা XY-সমতলের সহিত θ কোণ উৎপন্ন করিল। এক্ষণে, AP || ab টান, AP যেন Bbকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। অতএব, AP=ab এবং ∠BAP=θ হইল।

∴ ab= AP= AB cos θ.

উদা. 2. If a straight line outside a given plane is parallel to any straight line drawn in the plane, it is parallel to the plane itself. [C. U. '31, '33]

[কোন সমতলের বহিঃস্থ কোন সরলরেখা যদি ঐ সমতলের কোন সরলরেখার সমান্তরাল হয়, তবে উহা সমতলটিরও সমান্তরাল হইবে।]

মনে কর, m-সমতলের বহিঃস্থ AB সরলরেখা ঐ সমতলস্থ PQ সরলরেখার সমান্তরাল। প্রমাণ করিতে হইবে যে AB, m-সমতলের সমান্তরাল.

∵ AB || PQ, ∴ AB ও PQ একই সমতলে অবস্থিত। মনে কর, ঐ সমতল n, সুতরাং n ও m সমতলদ্বয়ের ছেদরেখা হইবে PQ. অতএব ABকে বর্ধিত করিলে উহা m-সমতলকে কখনও ছেদ করিতে পারে না; কারণ, AB ঐ সমতলে যদি মিলিত হয়, তবে অবশ্যই PQ রেখায় মিলিত হইবে, কিন্তু AB || PQ বলিয়া তাহা সম্ভব নহে। ∴ AB সরলরেখা m-সমতলের সমান্তরাল হইল।

উদা. 3. If a straight line is parallel to a plane, show that it is parallel to its projection on that plane. [C. U. '44]

[যদি একটি সরলরেখা কোন সমতলের সমান্তরাল হয়, তবে দেখাও যে উহা ঐ সমতলের উপর তাহার অভিক্ষেপেরও সমান্তরাল হইবে।]

মনে কর, AB সরলরেখা m-সমতলের সমান্তরাল এবং ঐ সমতলের উপর উহার অভিক্ষেপ PQ. AP, BQ যোগ কর।

∵ ABর অভিক্ষেপ PQ, ∴ ∠APQ ও ∠BQP প্রত্যেকে সমকোণ।

আবার, ∵ AB, m-সমতলের সমান্তরাল এবং AP ও BQ ঐ সমতলের উপর লম্ব, ∴ ∠PAB ও ∠ABQ প্রত্যেকে সমকোণ।

∴ ABQP একটি আয়তক্ষেত্র, ∴ AB ∥ PQ.

উদা. 4. If a st. line AB is parallel to a plane, then any st line CD parallel to AB is either parallel to the plane or lies in it.

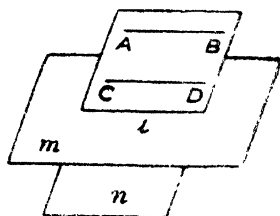
[যদি কোন সরলরেখা AB কোন সমতলের সমান্তরাল হয়, তবে AB-র সমান্তরাল যে-কোন সরলরেখা CD ঐ সমতলের সমান্তরাল অথবা উহার উপর অবস্থিত হইবে।]

[**Hints :** মনে কর, AB সরলরেখা m-সমতলের সমান্তরাল।

∵ AB ∥ CD, ∴ AB ও CD দিয়া একটিমাত্র সমতল হইতে পারে মনে কর, উহা n-সমতল। ঐ n-সমতলটি m-সমতলের সমান্তরাল হইবে অথবা উহাকে একটি সরলরেখায় (মনে কর l রেখায়) ছেদ করিবে।

এখন, যদি n-সমতল m-সমতলের সমান্তরাল হয়, তবে n-সমতলস্থিত CD সরলরেখা m-এর সমান্তরাল হইবে।

(চিত্র নং 39A)

আর, যদি n-সমতলটি m-এর সহিত l সরলরেখায় মিলিত হয়, তবে AB রেখা m-সমতলের সমান্তরাল বলিয়া উহা ঐ তলস্থিত l-রেখার সমান্তরাল হইবে। এখন,

∵ AB ∥ CD এবং AB, CD ও l একতলীয়,

∴ CD হয় l-এর সমান্তরাল অথবা l-এর সহিত সমাপতিত হইবে

∴ CD হয় m-সমতলের সমান্তরাল অথবা ঐ তলে অবস্থিত।]

উদা. 5. Show that through a given point a plane may be constructed parallel to each of two skew lines. [C. U. '31.]

[প্রমাণ কর যে কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া দুইটি অসামতলিক সরলরেখার প্রত্যেকটির সমান্তরাল একটি সমতল অঙ্কন করা যায়।]

মনে কর, AB ও CD দুইটি প্রদত্ত অসামতলিক সরলরেখা (skew lines) এবং O প্রদত্ত বিন্দু।

O বিন্দু দিয়া যথাক্রমে AB ও CD-র সমান্তরাল করিয়া OP ও OQ সরলরেখা টান। এখন OP ও OQ দিয়া অঙ্কিত সমতলই উদ্দিষ্ট সমতল।

প্রমাণ : ∵ AB ও CD যথাক্রমে OP ও OQ-এর সমান্তরাল,

∴ AB ও CD প্রত্যেকে OP ও OQ ধারক সমতলেরও সমান্তরাল।

উদা. 6. The angle which a straight line makes with its projection on a plane is less than that which it makes with any other straight line which meets it in that plane.

[C. U. '18, '30, '31]

[কোন সরলরেখা একটি সমতলের উপর তাহার অভিক্ষেপের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তাহা ঐ সরলরেখার সহিত ঐ সমতলে মিলিত অন্য যে-কোন সরলরেখার মধ্যে উৎপন্ন কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ।]

মনে কর, m-সমতলের উপর AB সরলরেখার অভিক্ষেপ ab এবং BA যেন ba-র সহিত ঐ সমতলে O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। m-সমতলের উপর Ob-র সমান OP সরলরেখা টান এবং BP ও Pb যোগ কর।

প্রমাণ : $\because$ m-সমতলের উপর Bb লম্ব, $\therefore$ $\angle$BbP সমকোণ।

$\therefore$ Bb < BP (অতিভুজ) ; এক্ষণে, ΔBOb ও ΔBOP-র Ob = OP, OB বাহু সাধারণ, কিন্তু Bb < BP, $\therefore$ $\angle$BOb < $\angle$BOP.

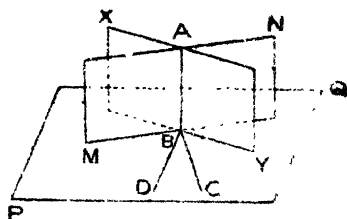
উদা 7. If two intersecting planes are each perpendicular to a third plane, their line of section is also perpendicular to that plane.

[B. U. E. '64]

[দুইটি ছেদী সমতলের প্রত্যেকটি যদি কোন তৃতীয় সমতলের উপর লম্ব হয়, তবে ঐ তলদ্বয়ের ছেদরেখাও ঐ তৃতীয় তলের উপর লম্ব হইবে।]

মনে কর, MN ও XY দুইটি সমতল পরস্পর AB সরলরেখায় ছেদ করিয়াছে এবং উহারা PQ-সমতলের উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AB ছেদরেখা PQ সমতলের উপর লম্ব

মনে কর, MN ও XY সমতলদ্বয় PQ-সমতলকে যথাক্রমে BM ও BY রেখায় ছেদ করিল। PQ-সমতলে BC⊥BM ও BD⊥BY টান।

[চিত্র নং 39 (A)]

প্রমাণ : $\because$ MN ও PQ সমতলদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব এবং PQ সমতলে ছেদরেখা BM এর উপর BC লম্ব, $\therefore$ BC রেখা MN-সমতলের উপর লম্ব।

∴ MN-সমতলস্থিত AB রেখার উপর BC লম্ব। অনুরূপে BD⊥AB.

∴ AB-রেখা BC ও BD এই দুই ছেদীরেখার উপর B ছেদবিন্দুতে লম্ব,

∴ AB-রেখা BC ও BD ধারক PQ-সমতলের উপর লম্ব হইল।

Exercise 7

1. If a straight line is parallel to a plane, it is parallel to its projection on that plane.

[কোন সমতলের সমান্তরাল সরলরেখা ঐ তলের উপর উহার অভিক্ষেপেরও সমান্তরাল হয়।]

2. The projection of the middle point of a straight line on a plane is the mid point of the projection. [C. U. '16

[কোন সমতলের উপর কোন সরলরেখার মধ্যবিন্দুর অভিক্ষেপ ঐ রেখার অভিক্ষেপের মধ্যবিন্দু হইবে।]

3. Prove that the length of the projection of a straight line on a plane = the length of the straight line × the cosine of the angle which it makes with the plane.

[প্রমাণ কর যে কোন সমতলের উপর কোন সরলরেখার অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য = সরলরেখাটির দৈর্ঘ্য × ঐ রেখা ও তলের অন্তর্ভুক্ত কোণের কোসাইন।]

4. Show that the projection of a straight line on a plane cannot be greater than the line. What may be the maximum length of the projection ?

[প্রমাণ কর যে, কোন সমতলের উপর একটি সরলরেখার অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য ঐ রেখা অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না। ঐ অভিক্ষেপের সর্বাধিক দৈর্ঘ্য কত হইতে পারে ?]

5. Prove that equal and parallel straight lines have equal and parallel projections on a plane. [C. U. '23

[কোন সমতলের উপর সমান ও সমান্তরাল সরল রেখাগুলির অভিক্ষেপগুলিও সমান ও সমান্তরাল হয়।]

6. Show that if the projections of a given line on two intersecting planes be both straight lines, the given line is itself a straight line. [C. U '26

[দুইটি ছেদী সমতলের উপর কোন রেখার দুইটি অভিক্ষেপই সরলরেখা হইলে ঐ রেখাটিও একটি সরলরেখা হইবে।]

[**Hints :** কোন রেখা ও তাহার অভিক্ষেপ সামতলিক হয়। সুতরাং প্রদত্ত রেখাটি দুইটি সমতলের ছেদরেখা হওয়ায় একটি সরলরেখা হইবে।]

Dihedral angle (দ্বিতল কোণ)

দুইটি সমতল ছেদরেখায় মিলিত হইয়া দ্বিতল কোণ উৎপন্ন করে ছেদরেখার যে-কোন বিন্দু হইতে দুই সমতলের উপরে যথাক্রমে এমন দুইটি সরলরেখা আঁকা হইল যেন এই দুই রেখা ছেদরেখার উপরে লম্ব হয়। এই রেখার মধ্যস্থিত কোণকে দ্বিতল কোণ বলে।

(চিত্র নং 41)

মনে করা যাক, BC এবং AD তল দুইটি AB সরলরেখায় ছেদ করিয়াছে। AB রেখার যে কোন বিন্দু হইতে যথাক্রমে BC এবং AD সমতলের উপর PQ এবং QR সরলরেখা এমনভাবে আঁকা হইল যেন ইহারা AB এর উপর লম্ব হয়।

অতএব, $\angle PQR$ = সমতল দুইটির মধ্যস্থিত দ্বিতল কোণ। AB রেখার অন্য যে কোন বিন্দু M হইতে ML এবং MN সরলরেখাদ্বয় AB র উপর লম্ব করিয়া BC এবং AD সমতলের উপরে আঁকা হইল।

$\angle LMN$ = ঐ তলদ্বয়ের মধ্যে দ্বিতল কোণ।

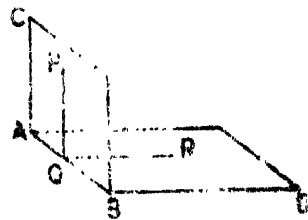
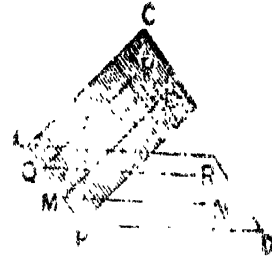
যেহেতু $PQ \parallel LM$ এবং $QR \parallel MN$,

$\therefore \quad \angle PQR = \angle LMN$.

(চিত্র নং 41)

সংজ্ঞা : দুইটি সমতলের মধ্যস্থিত দ্বিতল কোণ সমকোণ হইলে সমতল দুইটিকে পরস্পরের উপর লম্ব বলে। [চিত্র 41]

[**দ্রষ্টব্য :** (i) দুইটি পরস্পরছেদী সমতলের অন্তর্ভুক্ত দ্বিতল কোণ তাহাদের লম্বের (normals এর) অন্তর্ভুক্ত কোণের সমান বা সম্পূরক হইবে।

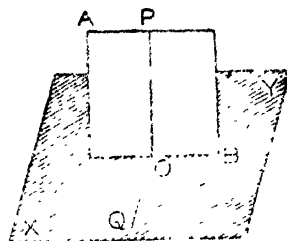
(ii) একটি সমতল দুইটি সমান্তরাল সমতলকে ছেদ করিলে অনুরূপ দ্বিতল কোণ দুইটি সমান হইবে।

(iii) একটি সরলরেখা কোন সমতলের উপর লম্ব হইলে ঐ সরলরেখাধারক যে-কোন সমতলই প্রদত্ত সমতলের উপর লম্ব হইবে।

মনে কর, PO সরলরেখা XY-সমতলের উপর O বিন্দুতে লম্ব এবং PO-ধারক যে কোন AB সমতল XY-সমতলকে OB সরলরেখায় ছেদ করিয়াছে।

(চিত্র নং 42)

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB-সমতল XY সমতলের উপর লম্ব।

অঙ্কন: XY-সমতলে OQ⊥OB আঁক।

প্রমাণ: ∵ XY-সমতলের উপর PO লম্ব, ∴ OB ও OQ উভয়ের উপর PO লম্ব।

∴ AB-সমতলস্থিত PO এবং XY-সমতলস্থিত OQ প্রত্যেকে উভয় সমতলের ছেদরেখা OB-র উপর O বিন্দুতে লম্ব। ∴ ∠POQ ঐ দুই সমতলের অন্তর্গত দ্বিতল কোণের পরিমাণ।

∵ POQ দ্বিতল কোণটি সমকোণ,

∴ AB-সমতলটি XY সমতলের উপর লম্ব।

পঞ্চম অধ্যায়

CO-ORDINATE GEOMETRY

(স্থানাঙ্ক-জ্যামিতি)

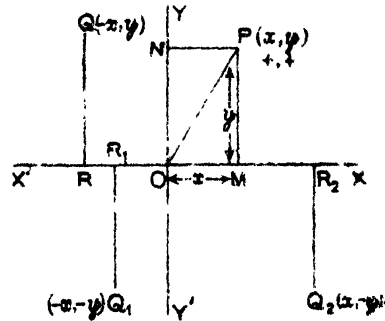
1. গণিতের যে শাখায় বীজগণিতের সাহায্যে জ্যামিতির আলোচনা করা হইয়াছে তাহাকে **স্থানাঙ্ক-জ্যামিতি** (Co-ordinate Geometry) বলা হয়।

স্থানাঙ্ক কাহাকে বলে, কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক জানা থাকিলে বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় অথবা উহার অবস্থান হইতে উহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় প্রভৃতি বিষয়ে তোমরা পূর্ব-শ্রেণীতে লেখ-অঙ্কনের সময় শিখিয়াছ। এখানে সংক্ষেপে, উহাদের পুনরালোচনা করা হইতেছে।

2. (i) **স্থানাঙ্ক** (Co-ordinates)।

তোমরা জান যে, কোন সমতলে পরস্পর সমকোণে (লম্বভাবে) অবস্থিত দুইটি অসীম সরলরেখা টানিলে সমতলটি চারিটি অংশে বিভক্ত হয়।

মনে কর, কোন সমতলে XOX′ ও YOY′ অসীম সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ঐ সরলরেখাদ্বয় নির্দিষ্ট বলিয়া O বিন্দুও একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। এখানে ঐ সরলরেখা দুইটির প্রত্যেকটিকে **অক্ষ** (axis) বলে। XOX′ সরলরেখাটিকে **ভুজাক্ষ** বা x-অক্ষ (axis of x) এবং YOY′কে **কোটি-অক্ষ** বা y-অক্ষ (axis of y) বলে।

(চিত্র নং 1)

এই অক্ষদ্বয় হইতে ঐ সমতলস্থ কোন বিন্দুর দূরত্বদ্বয়কে বিন্দুটির **স্থানাঙ্ক** বলে।

(ii) **ভুজ ও কোটি**। ঐ রেখাদ্বয় সম্পর্কে ঐ সমতলে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যাইতে পারে। মনে কর, P ঐ সমতলের উপর যে-কোন একটি বিন্দু। P হইতে x-অক্ষের উপর PM এবং y-অক্ষের

উপর PN লম্ব টানা হইল। y অক্ষ হইতে P বিন্দুর দূরত্ব PN বা OM ($\because$ PN$=$OM), এই OM দৈর্ঘ্যকে P বিন্দুর **ভুজ** (**abscissa**) এবং x-অক্ষ হইতে P-এর দূরত্ব PM দৈর্ঘ্যকে P-এর **কোটি** (**ordinate**) বলে কোন বিন্দুর ভুজ ও কোটিকে একত্রে বিন্দুটির **স্থানাঙ্ক** (**co-ordinates**) বলা হয়। চিত্রে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)। স্থানাঙ্ক লিখিবার সময় মনে রাখিবে যে প্রথমে বিন্দুটির ভুজ ও পরে উহার কোটি লিখিতে হয়। অতএব (3, 4) বিন্দু বলিলে বুঝিতে হইবে উহার ভুজ 3 একক এবং কোটি 4 একক দীর্ঘ।

(iii) **পাদ** (**Quadrant**)। x-অক্ষ ও y-অক্ষ সমতলটিকে চারিটি অংশে বিভক্ত করিয়াছে। প্রত্যেক অংশকে এক একটি **পাদ** (quadrant) বলা হয়। চিত্রে XOY কোণের মধ্যবর্তী অংশকে প্রথম পাদ, YOX′ কোণের মধ্যবর্তী অংশকে দ্বিতীয় পাদ, X′OY′ কোণের মধ্যস্থিত অংশকে তৃতীয় পাদ এবং Y′OX কোণের মধ্যস্থিত অংশকে চতুর্থ পাদ ধরা হয়।

(iv) **ধনাত্মক ও ঋনাত্মক স্থানাঙ্ক**। প্রচলিত প্রথা (convention) অনুসারে y-অক্ষের ডানদিকে x-অক্ষ বরাবর বা x-অক্ষের সমান্তরাল দূরত্ব বা দৈর্ঘ্যগুলিকে ধনাত্মক (positive) এবং y-অক্ষের বামদিকের অনুরূপ দৈর্ঘ্যগুলিকে ঋণাত্মক (negative) ধরিতে হয়।

আবার, x-অক্ষের উপরের দিকে y অক্ষ বরাবর বা y-অক্ষের সমান্তরাল দৈর্ঘ্যগুলিকে ধনাত্মক এবং x-অক্ষের নীচের দিকে অনুরূপ দৈর্ঘ্যগুলিকে ঋণাত্মক ধরিতে হয়।

অতএব, চিত্রে দেখ যে, প্রথম পাদে অবস্থিত যে কোন P (x, y) বিন্দুর ভুজ (x) ও কোটি (y) দুইটিই ধনাত্মক হইবে। দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত যে-কোন Q বিন্দুর ভুজ ঋণাত্মক ও কোটি ধনাত্মক, সুতরাং স্থানাঙ্ক $(-x, y)$ হইবে। তৃতীয় পাদে অবস্থিত যে-কোন Q_1 বিন্দুর ভুজ ও কোটি দুইটিই ঋণাত্মক, সুতরাং স্থানাঙ্ক $(-x, -y)$ হইবে। চতুর্থ পাদে অবস্থিত যে-কোন Q_2 বিন্দুর ভুজ ধনাত্মক ও কোটি ঋণাত্মক, সুতরাং স্থানাঙ্ক $(x, -y)$ হইবে।

অতএব, কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক জানা থাকিলে উহা কোন্ পাদে অবস্থিত তাহা নির্দিষ্ট হইয়া যায়। কোন বিন্দুর অবস্থান জানা থাকিলে তাহার ভুজ ও কোটি নির্ণয় করিয়া উহাদের ধনাত্মক ও ঋণাত্মক চিহ্নসহ একটি বন্ধনীর মধ্যে প্রথমে ভুজ এবং পরে কমা দিয়া কোটি লিখিলেই বিন্দুটির স্থানাঙ্ক পাওয়া গেল।

O মূলবিন্দুর ভুজ ও কোটি উভয়ই শূন্য বলিয়া উহার স্থানাঙ্ক (0, 0)।

x-অক্ষস্থিত যে-কোন বিন্দুর কোটি শূন্য (0) হয়, সুতরাং উহার স্থানাঙ্ক $(x, 0)$ এবং y-অক্ষস্থিত যে-কোন বিন্দুর ভুজ শূন্য (0) হয়, সুতরাং উহার স্থানাঙ্ক $(0, y)$।

3. Cartesian co-ordinates :

আমরা পূর্বে XOX′ ও YOY′ সরলরেখা (অক্ষ) দুইটিকে পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত ধরিয়াছি। এরূপ স্থলে স্থানাঙ্কগুলিকে rectangular co-ordinates বলা হয়।

যদি ঐ XOX′ ও YOY′ অক্ষদ্বয় পরস্পর সমকোণে নত না হইয়া অন্য কোন কোণে নত থাকে, তবে উহাদিগকে **তির্যক অক্ষদ্বয়** (**Oblique axes**) বলে। লম্ব অক্ষদ্বয় সম্পর্কে পূর্বে স্থানাঙ্ক সম্বন্ধে যে সকল নিয়ম বলা হইয়াছে, তির্যক অক্ষদ্বয় সম্পর্কে তির্যক স্থানাঙ্ক (Oblique co-ordinates) সম্বন্ধে ঐ নিয়মগুলি প্রযোজ্য হইবে।

বিখ্যাত দার্শনিক Descartes এই দুই প্রকার স্থানাঙ্ক প্রচলিত করেন বলিয়া তাঁহার নামানুসারে Cartesion co-ordinates বলা হয়।

তির্যক স্থানাঙ্ক পাঠ্যাংশের অন্তর্গত নহে, সুতরাং আমরা এখানে সকল স্থানাঙ্ক লম্ব স্থানাঙ্ক (rectangular co-ordinates) ধরিব।

Lengths of Segments (দূরত্ব বা দৈর্ঘ্য)

কোন দুইটি প্রদত্ত বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় অথবা কোন সরলরেখার কোন অংশের (segment-এর) দৈর্ঘ্য নির্ণয় সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

(1) স্থানাঙ্কের সাহায্যে **মূলবিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয়।**

[চিত্র নং 1 দেখ এবং এখানে চিত্র অঙ্কিত কর।]

মনে কর, OX ও OY লম্ব অক্ষদ্বয় এবং P এমন একটি বিন্দু যাহার স্থানাঙ্ক (x, y); মূলবিন্দু O হইতে P-এর দূরত্ব অর্থাৎ OP সরলরেখার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে। P হইতে OX-এর উপর PM লম্ব টান এবং OP যোগ কর।

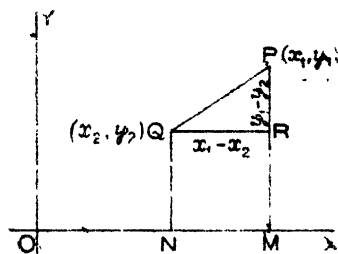
$\because$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y), $\therefore$ $OM = x$ এবং $PM = y$.

$\therefore$ $OP^2 = OM^2 + PM^2 = x^2 + y^2$. অতএব, $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(ii) স্থানাঙ্ক দ্বারা **দুইটি প্রদত্ত বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব নির্ণয়।**

মনে কর, OX ও OY লম্ব অক্ষদ্বয়, P ও Q দুইটি প্রদত্ত বিন্দু এবং বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2)। PQ সরলরেখার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে। [চিত্র নং 2 দেখ]।

(চিত্র নং 2)

P ও Q হইতে OX-এর উপর যথাক্রমে PM ও QN লম্ব এবং Q হইতে PM-এর উপর QR লম্ব টান।

এক্ষণে, $OM = x_1$, $ON = x_2$, $PM = y_1$ এবং $QN = y_2$ হইল।

$$\therefore \quad QR = NM = OM - ON = x_1 - x_2$$

$$\text{এবং} \quad PR = PM - RM = PM - QN = y_1 - y_2.$$

অতএব, PQR সমকোণী ত্রিভুজে

$$PQ^2 = QR^2 + PR^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

[**দ্রষ্টব্য :** (i) উপরের সূত্রটির অন্তর্গত x_1, y_1, x_2, y_2 এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাহাই হউক না কেন ঐ সূত্রটি সর্বদা সিদ্ধ। অতএব P ও Q বিন্দু যে-কোন পাদে অবস্থিত হউক না কেন PQ-এর দূরত্ব নির্ণয়ে এ সূত্রটি প্রযোজ্য হইবে। (ii) মূলবিন্দু হইতে P-এর দূরত্ব নির্ণয়ের জন্য এই সূত্রে $x_2 = 0$, $y_2 = 0$ ধরিলে নির্ণেয় দূরত্ব পাওয়া যাইবে, কারণ তখন Q বিন্দু মূলবিন্দু O-র সহিত মিলিত হইয়াছে বুঝিতে হইবে।]

5. Sections of a finite straight line in a given ratio.

কোন একটি সরলরেখাকে কোন অনুপাতে ছেদ করিলে (বিভক্ত করিলে ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে। কোন নির্দিষ্ট সসীম সরলরেখাকে দুই প্রকারে ছেদ করিয়া (**অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত** করিয়া) কোন নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত করা যায়।

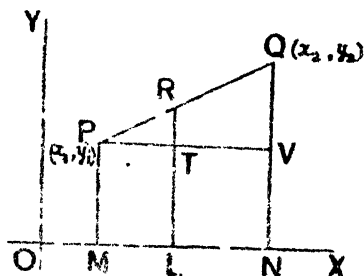
5. (a) **কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কোন প্রদত্ত অনুপাতে বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়।**

(To find the co-ordinates of a point dividing a straight line in a given ratio.)

অথবা, [দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু সংযোজক সরলরেখা যে বিন্দুতে কোন নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত হয়, সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়।]

মনে কর, OX ও OY লম্ব অক্ষদ্বয়, P ও Q বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) এবং PQ সরলরেখা R বিন্দুতে যেন $m : n$ অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে। অতএব, PR : RQ $= m : n$. R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে। মনে কর, R বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)।

(চিত্র নং 3)

(১) [চিত্র নং 3 দেখ]। মনে কর, R বিন্দু PQকে অন্তর্বিভক্ত করিয়াছে। OX-এর উপর PM, QN ও RL লম্ব টান এবং OX-এর সমান্তরাল PV রেখা টান, উহা যেন RL ও QNকে যথাক্রমে T ও V বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন, $\because$ RT ∥ QV, $\therefore \dfrac{PT}{TV} = \dfrac{PR}{RQ} = \dfrac{m}{n}$

কিন্তু PT $=$ ML $=$ OL $-$ OM $= x - x_1$,

এবং TV $=$ LN $=$ ON $-$ OL $= x_2 - x$,

$$\therefore \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}, \quad \therefore x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}.$$

আবার, $\because$ $\triangle$PRT ও $\triangle$PQV সদৃশ,

$$\frac{RT}{QV} = \frac{PR}{PQ} = \frac{m}{m+n} \left[\because \frac{RQ}{PR} = \frac{n}{m}, \quad \therefore \frac{RQ + PR}{PR} = \frac{n+m}{m}, \right.$$

$$\left. \text{বা, } \frac{PQ}{PR} = \frac{n+m}{m}, \quad \therefore \frac{PR}{PQ} = \frac{m}{m+n} \right]$$

কিন্তু RT $=$ RL $-$ TL $=$ RL $-$ PM $= y - y_1$,

এবং QV $=$ QN $-$ VN $=$ QN $-$ PM $= (y_2 - y_1)$.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{RT}{QV} = \frac{m}{m+n},$$

বা, $y(m+n) = m(y_2 - y_1) + y_1(m+n) = my_2 + ny_1$,

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}.$$

অতএব, R বিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক হইল $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$.

(ii) যদি R বিন্দু PQ সরলরেখাকে $m : n$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে (চিত্র নং 4 দেখ), তবে

PR : RQ $= m : n$ হইল।

(চিত্র নং 4)

এখন, $\because$ RT ∥ QV,

$\therefore \frac{PT}{TV} = \frac{PR}{RQ} = \frac{m}{n}$,

কিন্তু PT $=$ ML $= x - x_1$,

এবং VT $=$ NL $= x - x_2$,

$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{m}{n}$

বা, $x(m-n) = mx_2 - nx_1$,

$\therefore x = \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}$

আবার, $\triangle$PRT ও $\triangle$PQV সদৃশ বলিয়া $\frac{RT}{QV} = \frac{RP}{QP} = \frac{m}{m-n}$,

কিন্তু RT $= y - y_1$ এবং QV $= y_2 - y_1$, $\therefore \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{m}{m-n}$,

বা, $y(m-n) = m(y_2 - y_1) + y_1(m-n) = my_2 - ny_1$

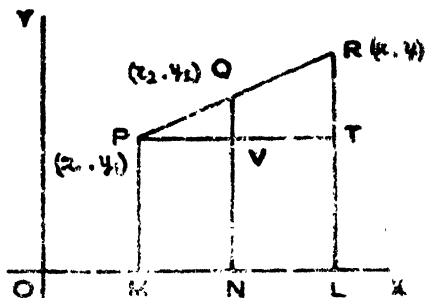
$$\therefore y = \frac{my_2 - ny_1}{m-n}$$

অতএব, R বিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক হইল $\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$.

[দ্রষ্টব্য : যদি R বিন্দু PQকে সমদ্বিখণ্ডিত করে অর্থাৎ R যদি PQ-এর মধ্যবিন্দু হয়, তবে $m = n$ হইবে।

তখন $\frac{mx_2+nx_1}{m+n} = \frac{mx_2+mx_1}{m+m} = \frac{m(x_2+x_1)}{2m} = \frac{x_1+x_2}{2}$

এবং $\frac{my_2+ny_1}{m+n} = \frac{my_2+my_1}{m+m} = \frac{m(y_2+y_1)}{2m} = \frac{y_2+y_1}{2}$ হইবে।

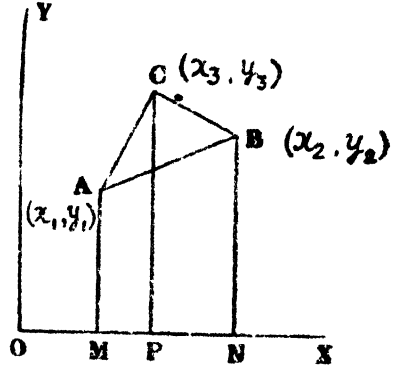
অতএব, তখন মধ্যবিন্দু R এর স্থানাঙ্ক হইবে $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$].

6. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক হইতে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়।

অথবা, [তিনটি প্রদত্ত বিন্দুর সংযোগে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়।]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B ও C-র স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) (x_2, y_2) ও (x_3, y_3)। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

x-অক্ষের উপর AM, BN ও CP লম্ব টান।

(চিত্র নং 5)

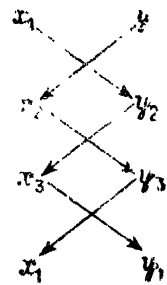
এক্ষণে, $\triangle ABC$ = ট্রাপিজিয়ম AMPC + ট্রাপিজিয়ম PNBC − ট্রাপিজিয়ম AMNB

∵ ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ × উচ্চতা × সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি,

∴ $\triangle ABC$-র ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}MP(AM+PC)+\frac{1}{2}PN(PC+BN)-\frac{1}{2}MN(AM+BN)$$
$$= \frac{1}{2}\{(x_3-x_1)(y_1+y_3)+(x_2-x_3)(y_3+y_2)-(x_2-x_1)(y_1+y_2)\}$$
$$= \frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3)$$
$$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}$$

[**দ্রষ্টব্য :** (a) মূলবিন্দু O সম্পর্কে প্রদত্ত ত্রিভুজের অবস্থান পাঁচ প্রকারের হইতে পারে। যথা, মূলবিন্দু O (1) ত্রিভুজের অন্তঃস্থ ; (2) কোন কৌণিক বিন্দুতে অবস্থিত, (3) কোন বাহুর উপর অবস্থিত, কিন্তু কৌণিক বিন্দুতে নয়, (4) ত্রিভুজটির বহির্ভূত এবং উহার দুই বাহুর অন্তর্গত কোণের মধ্যে অবস্থিত, (5) ত্রিভুজটির বহির্ভূত এবং উহার কোন একটি বিপ্রতীপ কোণের বাহুদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইতে পারে।

(b) উপরের সূত্রটি মনে রাখার জন্য নিম্নের নিয়মটি জানিয়া রাখ।

ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির ভুজগুলি এক স্তম্ভে নীচে নীচে লিখ এবং কোটিগুলি পাশাপাশি আর এক স্তম্ভে নীচে নীচে লিখ। সর্বশেষে প্রথম শীর্ষের স্থানাঙ্কগুলি আবার লিখ (পার্শ্বে চিত্র দেখ)। তৎপরে প্রথম হইতে আরম্ভ করিয়া প্রত্যেক ভুজকে পরবর্তী সারির কোটির সহিত গুণ কর (তীর নির্দিষ্টভাবে)। আবার ঐরূপে প্রত্যেক

(চিত্র নং 5ক)

কোটিকে পরবর্তী সারির ভুজের সহিত গুণ কর। এইবার প্রথম গুণফলগুলির সমষ্টি হইতে দ্বিতীয় গুণফলগুলির সমষ্টি বিয়োগ কর। এই বিয়োগফলের অর্ধেক হইবে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল।

এইরূপে চতুর্ভুজ, পঞ্চভুজ প্রভৃতির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।

(c) প্রচলিত প্রথা (convention) এই যে, **কোন সামতলিক ক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দুগুলি ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে তাহার বিপরীতক্রমে লইলে উহার ক্ষেত্রফল ধনাত্মক হয় এবং ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে সেইক্রমে লইলে ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হয়।**]

7. তিনটি বিন্দু সমরেখ হইবার সর্ত (Condition for collinearity of three points)।

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সূত্র হইতে তিনটি বিন্দু সমরেখ হইবার সর্ত পাওয়া যায়। যদি তিনটি বিন্দুর সংযোগে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য (0) হয় তবেই বিন্দু তিনটি সমরেখ (collinear) হইয়া থাকে। মনে কর, বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) ও (x_3, y_3)। অতএব নির্ণেয় সর্ত হইল

$(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) = 0.$

8. শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক হইতে চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়।

(Find the area of a quadrilateral whose vertices are given)

মনে কর, ABCD চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C, D-র স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ও (x_4, y_4)।

(চিত্র নং 6)

এই চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

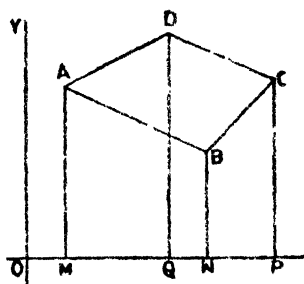
x-অক্ষের উপর AM, BN, CP, DQ লম্ব টান।

এখন, চতুর্ভুজ ABCD = ট্রাপিজিয়ম AMQD + ট্রাপিজিয়ম DQPC − ট্রাপিজিয়ম AMNB − ট্রাপিজিয়ম BNPC

$= \frac{1}{2}MQ(AM + DQ) + \frac{1}{2}QP(DQ + CP) - \frac{1}{2}MN(AM + BN) - \frac{1}{2}NP(BN + CP)$

$= \frac{1}{2}\{(x_4 - x_1)(y_1 + y_4) + (x_3 - x_4)(y_4 + y_3) - (x_2 - x_1)(y_1 + y_2) - (x_3 - x_2)(y_2 + y_3)\}$

$= \frac{1}{2}\{(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_4 - x_4 y_3) + (x_4 y_1 - x_1 y_4)\}$

[সরল করিয়া পাওয়া যায়]

অনুসিদ্ধান্ত : অনুরূপে n-ভুজের কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ হইলে উহার ক্ষেত্রফল হইবে

$$\tfrac{1}{2}\{(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_ny_1 - x_1y_n)\}.$$

[**দ্রষ্টব্য :** ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সাহায্যে চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়। যে কোন কর্ণ অঙ্কিত করিলে চতুর্ভুজটি দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত হয়। ঐ দুই ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি লইলেই চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল পাওয়া যাইবে।

এক্ষেত্রে AC যুক্ত কর।

এক্ষণে চতুর্ভুজ ABCD $= \triangle$ABC $+ \triangle$ACD

$$= \tfrac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\{x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1) + x_4(y_1 - y_3)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2 + x_1y_3 - x_1y_4$$
$$+ x_3y_4 - x_3y_1 + x_4y_1 - x_4y_3\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_4 - x_4y_3)$$
$$+ (x_4y_1 - x_1y_4)\}]$$

উদাহরণমালা 1

উদা. 1 Find the distance of the following points from the origin :—

(a) $(-5, 12)$, (b) $(-4, -3)$, (c) $\{(m+n), (m-n)\}$.

[মূলবিন্দু হইতে উপরে প্রদত্ত বিন্দুগুলির দূরত্ব নির্ণয় কর।]

(a) মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$.

এখানে নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} = \sqrt{169} = 13$

(b) এখানে নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$.

(c) এখানে প্রদত্ত বিন্দুর ভুজ $= m + n$ এবং কোটি $= m - n$.

নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{(m+n)^2 + (m-n)^2} = \sqrt{2m^2 + 2n^2}$

$= \sqrt{2(m^2 + n^2)}$.

উদা. 2. Find the distance between the points $(0, 0)$ and $(a \cos\theta, a \sin\theta)$.

[$(0, 0)$ ও $(a \cos\theta, a \sin\theta)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।]

এখানে $(0, 0)$ বিন্দুটি মূলবিন্দু, সুতরাং মূলবিন্দু হইতে $(a \cos\theta, a \sin\theta)$ স্থানাঙ্কবিশিষ্ট বিন্দুটির দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে।

নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{(a\cos\theta)^2 + (a\sin\theta)^2} = \sqrt{a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}$

$= \sqrt{a^2}$ [$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$] $= a$.

উদা 3. Find the distance between the following pairs of points :—

(i) (5, 3) and (2, 2) ; (ii) (3, −2), (−4, 3) , and (iii) (ax, bx), $(by, -ay)$.

[উপরে প্রদত্ত প্রত্যেক বিন্দুযুগলের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।]

(i) (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দুইটির দূরত্বের সূত্র হইল

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

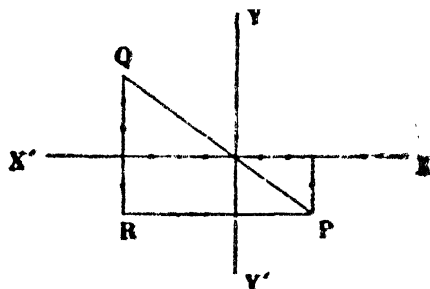
∴ এখানে নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{(5-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

(ii) মনে কর, P (3, −2) ও Q (−4, 3) দুইটি বিন্দু।

এখানে PR = 7 এবং

RQ = 5

∴ $PQ = \sqrt{7^2 + 5^2}$

$= \sqrt{74}$.

(চিত্র নং 7)

[অন্য প্রকারে] নির্ণেয় দূরত্ব

$$= \sqrt{\{3-(-4)\}^2 + \{-2-(3)\}^2} = \sqrt{(7)^2 + (-5)^2} = \sqrt{74}$$

(iii) এখানে নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{(ax - by)^2 + \{bx - (-ay)\}^2}$

$$= \sqrt{(ax - by)^2 + (bx + ay)^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}.$$

উদা. 4 Find the distance between the points whose co-ordinates are $(a \cos \theta, a \sin \theta)$ and $(a \cos \phi, a \sin \phi)$.

[$(a \cos \theta, a \sin \theta)$ ও $(a \cos \phi, a \sin \phi)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।]

মনে কর, P ও Q যথাক্রমে প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়।

$$\therefore \quad PQ^2 = (a \cos \theta - a \cos \phi)^2 + (a \sin \theta - a \sin \phi)^2$$

$$= a^2 \cos^2 \theta + a^2 \cos^2 \phi - 2a^2 \cos \theta \cos \phi + a^2 \sin^2 \theta + a^2 \sin^2 \phi - 2a^2 \sin \theta \sin \phi$$

$$= a^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + a^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) - 2a^2(\cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi)$$

$$= a^2 + a^2 - 2a^2 \cos(\theta - \phi) = 2a^2 - 2a^2 \cos(\theta - \phi)$$

$$= 2a^2\{1 - \cos(\theta - \phi)\} = 2a^2 \times 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(\theta - \phi)$$

$$= 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(\theta - \phi).$$

∴ নির্ণেয় দূরত্ব $= PQ = 2a \sin \dfrac{\theta - \phi}{2}$.

উদা. 5. Find the co-ordinates of the middle point of the straight line joining the points (6, 2) and (−2, −4).

[(6, 2) ও (−2, −4) বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরল রেখার মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।]

(x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়সংযোজক সরলরেখার মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

∴ এখানে মধ্যবিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{6-2}{2}, \frac{2-4}{2}\right) = (2, -1)$.

উদা. 6 Prove that the triangle whose vertices are A (3, 1), B (9, 7) and C (−3, 7) is a right angled isosceles triangle and find the length of the hypotenuse.

[প্রমাণ কর যে A(3, 1), B(9, 7) ও C(−3, 7) শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজটি একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং উহার অতিভুজের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।]

এখানে $AB^2 = (3-9)^2 + (1-7)^2 = (-6)^2 + (-6)^2 = 72.$

$\therefore \quad AB = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$

আবার, $AC^2 = \{3-(-3)\}^2 + (1-7)^2 = 72, \therefore AC = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$

$AB = AC$, সুতরাং ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

এক্ষণে, $BC^2 = \{9-(-3)\}^2 + (7-7)^2 = (12)^2 = 144.$

∵ $AB^2 = 72$ এবং $AC^2 = 72$. ∴ $AB^2 + AC^2 = 144 = BC^2$,

∴ $\angle A$ সমকোণ, ∴ ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ।

অতএব $\triangle ABC$ একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং উহার অতিভুজ $BC = 12.$

উদা 7. Find the circum centre of the triangle whose vertices are (2, −2), (4, 2) and (−1, 3).

[যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি (2, −2), (4, 2) ও (−1, 3) তাহার পরিকেন্দ্র নির্ণয় কর।]

মনে কর, A, B, C যথাক্রমে প্রদত্ত ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু (2, −2), (4, 2) ও (−1, 3).

মনে কর, ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র S-এর স্থানাঙ্ক (x, y).

∵ $SA = SB = SC$ (পরিব্যাসার্ধ বলিয়া). ∴ $SA^2 = SB^2 = SC^2$.

এক্ষণে, $SA^2=(x-2)^2+(y+2)^2$, $SB^2=(x-4)^2+(y-2)^2$ এবং $SC^2=(x+1)^2+(y-3)^2$.

$\therefore (x-2)^2+(y+2)^2=(x-4)^2+(y-2)^2=(x+1)^2+(y-3)^2$,

বা, $-4x+4y+8=-8x-4y+20=2x-6y+10$, ইহা হইতে সমাধান করিয়া পাই, $x=\frac{13}{11}$, $y=\frac{10}{11}$.

$\therefore$ পরিকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক হইল $(\frac{13}{11}, \frac{10}{11})$.

উদা. 8. Find the co-ordinates of the point which divides the st. line joining the points (8, 12) and (–2, 7) internally in the ratio 3 : 2.

[(8, 12) ও (–2, 7) বিন্দুযুগল সংযোজক সরলরেখা যে বিন্দুতে 3 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হইয়াছে তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।]

মনে কর, নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $=(x, y)$।

এক্ষণে, $x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$, এবং $y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$ এই সূত্র হইতে পাই

$$x=\frac{3\times-2+2\times8}{3+2}=\frac{-6+16}{5}=2.$$

$$\text{এবং } y=\frac{3\times7+2\times12}{2+3}=\frac{21+24}{5}=9,$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $=(2, 9)$.

উদা. 9. Find the co-ordinates of a point which divides the st. line joining the points (4, 5) and (7, –1) externally in the ratio 4 : 3.

[(4, 5) ও (7, –1) বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরল রেখা যে বিন্দুতে 4 : 3 অনুপাতে বহির্বিভক্ত হইয়াছে তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।]

মনে কর, নির্ণেয় স্থানাঙ্ক (x, y), এখানে প্রদত্ত বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (4, 5) ও (7, –1) এবং প্রদত্ত অনুপাত $=4:3$.

$$\text{সূত্র হইতে পাই } x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}=\frac{4\times7-3\times4}{4-3}=\frac{16}{1}=16,$$

$$\text{এবং } y=\frac{my_2-ny_1}{m-n}=\frac{4\times-1-3\times5}{4-3}=\frac{-19}{1}=-19$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $=(16, -19)$.

উদা. 10 Show that the st. line joining the points (4, 3) and (8, 6) passes through the origin

[দেখাও যে (4, 3) ও (8, 6) বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখাটি মূলবিন্দু দিয়া যায়।]

মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0)। মূলবিন্দু ও প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় সমরেখ হইলে ঐ বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখাটি মূলবিন্দু দিয়া যাইবে।

তিনটি বিন্দু সমরেখ হইবার সর্ত হইল এই যে,

$(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)=0$ হইতে হইবে।

এখানে বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক (0, 0), (4, 3) ও (8, 6),

সুতরাং এখানে $(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)$

$$=(0\times 8-0\times 4)+(4\times 6-8\times 3)+(8\times 0-0\times 6)$$

$$=0+(24-24)+0=0.$$

∴ ঐ বিন্দুত্রয় সমরেখ, অর্থাৎ (4, 3) ও (8, 6) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়াও যাইবে

[**বিকল্প প্রমাণ :**] মনে কর, P ও Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (4, 3) ও (8, 6)। মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0).

এক্ষণে, $OP=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5.$

$OQ=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10.$

এবং $PQ=\sqrt{(4-8)^2+(3-6)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

∴ $OP+PQ=10=OQ.$

অতএব, O, P ও Q একই সরলরেখায় অবস্থিত।

[**দ্রষ্টব্য :** OP+PQ=OQ হইলে, O, P, Q একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে। কারণ, যদি তাহা না হয়, তবে OPQ একটি ত্রিভুজ হইবে এবং ঐ ত্রিভুজে দুইটি বাহুর (OP ও PQ-এর) সমষ্টি তৃতীয় বাহুর সমান হইবে, কিন্তু তাহা অসম্ভব।]

উদা. 11. Find the ratio in which the point (5, 4) divides the join of (3, 2) and (6, 5).

[(3, 2) ও (6, 5) বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখা (5, 4) বিন্দুতে কি অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে ?]

মনে কর, নির্ণেয় অনুপাত $= m : n$.

$\because$ (5, 4) বিন্দুটি (3, 2) ও (6, 5) বিন্দুদ্বয়-সংযোজক রেখাকে $m : n$ অনুপাতে বিভক্ত করিয়াছে,

$\therefore$ $x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$ এই সূত্রটি হইতে পাই

$5 = \frac{m \times 6 + n \times 3}{m+n}$ বা, $6m + 3n = 5m + 5n$,

বা, $m = 2n$. $\frac{m}{n} = \frac{2}{1}$ $\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $= 2 : 1$

[দ্রষ্টব্য : (i) এখানে $\frac{m}{n}$ যদি ঋণাত্মক হইত অর্থাৎ যদি $\frac{m}{n} = -\frac{2}{1}$ হইত তবে বলিতে হইত যে, 2 : 1 অনুপাতে বহিবিভক্ত করিয়াছে।

(ii) এখানে $y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$ হইতেও একই অনুপাত পাওয়া যাইত।]

উদা 12. If the point (x, y) be equidistant from the points $(2, 3)$ and $(-1, 2)$, then will $3x + y = 4$.

[(x, y) বিন্দুটি $(2, 3)$ ও $(-1, 2)$ বিন্দু দুইটি হইতে সমদূরবর্তী হইলে $3x + y = 4$ হইবে।]

(x, y) ও $(2, 3)$ বিন্দু দুইটির মধ্যে দূরত্ব $= \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$;
এবং (x, y) ও $(-1, 2)$ বিন্দু দুইটির মধ্যে দূরত্ব $= \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}$

$\because$ এই দূরত্ব দুইটি সমান। স্বীকার $\therefore$

$\therefore$ $\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$

বা, $(x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2$,

বা, $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5 = x^2 - 4x + y^2 - 6y + 13$,

বা, $6x + 2y = 8$, $\therefore$ $3x + y = 4$.

উদা. 13. The square of the distance between the points $(3, 5)$ and $(x, 4)$ is 17, find the abscissa of the unknown point.

[$(3, 5)$ ও $(x, 4)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্বের বর্গ 17, অজ্ঞাত বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর।]

$(3, 5)$ ও $(x, 4)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব $= \sqrt{(3-x)^2 + (5-4)^2}$,

সুতরাং ঐ দূরত্বের বর্গ $= (3-x)^2 + (5-4)^2 = (3-x)^2 + 1$,

$\therefore$ সর্ত হইতে $(3-x)^2 + 1 = 17$, বা $(3-x)^2 = 16$, বা $3 - x = \pm 4$

$\therefore$ $x = 3 \mp 4 = -1$ বা 7.

নির্ণেয় ভুজ $= -1$ বা 7.

উদা. 14. **Prove that the points (3, 3), (−3, −3) and (−3 √3, 3 √3) are the vertices of an equilateral triangle.**

[প্রমাণ কর যে (3, 3), (−3, −3) এবং (−3 √3, 3 √3) বিন্দুগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু।]

মনে কর A, B ও C যথাক্রমে প্রদত্ত তিনটি বিন্দু

একণে $AB^2=(3+3)^2+(3+3)^2=72$, $\quad AB=6\sqrt{2}$,

$BC^2=(-3+3\sqrt{3})^2+(-3-3\sqrt{3})^2$

$=9+27-18\sqrt{3}+9+27+18\sqrt{3}=72$.

$\therefore\ BC=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$,

এবং $CA^2=(-3\sqrt{3}-3)^2+(3\sqrt{3}-3)^2=72 \quad \therefore\ CA=6\sqrt{2}$.

$AB=BC=CA$. অতএব ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং প্রদত্ত বিন্দুগুলি ঐ সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু।

উদা. 15. Find the area of the triangle whose vertices are (a, bc), (b, ca) and (c, ab).

$\triangle$ (ক্ষেত্রফল) $=\frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}$

এখানে নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\{a(ca-ab)+b(ab-bc)+c(bc-ca)\}$

$=\frac{1}{2}\{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)\}$

$=\frac{1}{2}(a-b)(b-c)(c-a)$

উদা. 16. Find the area of the triangle whose vertices are $(\cos\theta, \sin\theta)$, $(\cos 3\theta, \sin 3\theta)$ and $(0, 0)$.

$\because$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}$,

$\therefore$ এখানে নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}\{\cos\theta(\sin 3\theta-0)+\cos 3\theta(0-\sin\theta)+0(\sin\theta-\sin 3\theta)\}$

$=\frac{1}{2}\{\sin 3\theta\cos\theta-\cos 3\theta\sin\theta+0\}$

$=\frac{1}{2}(\sin 3\theta\cos\theta-\cos 3\theta\sin\theta)$

$=\frac{1}{2}\sin(3\theta-\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta$.

উদা. 17. The vertices A, B, C of a triangle are $(2, -2)$, $(4, 2)$ and $(-1, 3)$ respectively, find the length of the perpendicular from B on AC.

[কোন ত্রিভুজের A, B, C শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে (2, −2), (4, 2) ও (−1, 3); B হইতে AC-র উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।]

ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ হইলে সূত্রানুসারে উহার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}$.

∴ এখানে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\{2(-2 \ldots)+4(3+2)-1(-2-2)\}$$
$$= \frac{1}{2}(-2+20+4) = 11 \text{ বর্গ একক।}$$

আবার, যদি B হইতে AC-র উপর লম্বটি p একক দীর্ঘ হয়, তবে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল হয় $\frac{1}{2}p.AC$.

এখানে $AC = \sqrt{(2+1)^2+(-2-3)^2} = \sqrt{34}$ দৈর্ঘ্য একক।

$$\therefore \frac{1}{2}p.\sqrt{34} = 11, \quad \therefore p = \frac{22}{\sqrt{34}} = \frac{22\sqrt{34}}{34}$$
$$= \frac{11}{17}\sqrt{34} \text{ দৈর্ঘ্য একক।}$$

উদা 18. Find the area of the quadrilateral, the co-ordinates of whose angular points, taken in order, are (1, 2), (3, 4), (5, −1), (4, −3).

[একটি চতুর্ভুজের পর পর কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক (1, 2), (3, 4), (5, −1) ও (4, −3) ; উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।]

এখানে $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 4$ এবং
$y_1 = 2, y_2 = 4, y_3 = -1, y_4 = -3.$

$$\therefore \Delta = \frac{1}{2}\{(1\times 4-3\times 2)+(3\times -1-5\times 4)+(5\times -3-4\times -1)$$
$$+(4\times 2-1\times -3)\} = \frac{1}{2}(-2-23-11+11) = -12\tfrac{1}{2},$$

∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 12\frac{1}{2}$ বর্গ একক।

[অনুচ্ছেদ 6 (b) অনুসারে করা সহজ।]

উদা. 19. Show that the three points $(a, 0)$, $(0, b)$ and $(1, 1)$ are collinear, if $a+b=ab$.

[প্রমাণ কর যে $(a, 0)$, $(0, b)$ ও $(1, 1)$ বিন্দুগুলি সমরেখ হইবে যদি $a+b=ab$ হয়।]

প্রদত্ত বিন্দু তিনটি সমরেখ হইবে, যদি ঐ বিন্দু তিনটিকে শীর্ষবিন্দু করিয়া অঙ্কিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হয়।

এক্ষণে ঐরূপ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}$$
$$= \frac{1}{2}\{a(b-1)+0(1-0)+1(0-b)\} = \frac{1}{2}(ab-a-b).$$

অতএব, প্রদত্ত বিন্দু তিনটি সমরেখ হইবে যদি

$\frac{1}{2}(ab-a-b)=0$ হয়, অর্থাৎ যদি $ab-a-b=0$ হয়,

অর্থাৎ যদি $a+b=ab$ হয়।

উদা. 20. (a) Show that the four points (5, 2), (3, 7), (−1, 4) and (1, −1) are the angular points of a parallelogram

মনে কর, A, B, C, D বিন্দু চতুষ্টয়ের স্থানাঙ্কগুলি যথাক্রমে (5, 2), (3, 7), (−1, 4) এবং (1, −1)। যদি ACর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (h, k) হয়, তবে, $h=\frac{5-1}{2}=2$, এবং $k=\frac{2+4}{2}=3$.

আবার BDর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (h_1, k_1) ধরিলে, $h_1=\frac{3+1}{2}=2$, এবং $k_1=\frac{7-1}{2}=3$.

∴ AC ও BD কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু একই বিন্দু। অর্থাৎ, A, B, C, D বিন্দুগুলি পর পর যুক্ত করিলে যে চতুর্ভুজ পাওয়া যায়, তাহার AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হইতেছে। অতএব, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

[লক্ষ্য কর : কোন চতুর্ভুজ সামান্তরিক হয় যখন উহার কর্ণদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়। এই জ্যামিতিক মত লইয়া উপরের অঙ্কটি প্রমাণ করা হইল।]

(b) Show that the four points A (3, 3), B (5, 5), C (6, 4) and D (4, 2), when joined in order, make up a rectangle.

এখানে, $AB^2=(3-5)^2+(3-5)^2=8$.

এবং $CD^2=(6-4)^2+(4-2)^2=8$, ∴ $AB=CD$.

আবার $BC^2=(5-6)^2+(5-4)^2=2$.

এবং $DA^2=(4-3)^2+(2-3)^2=2$. ∴ $BC=DA$.

এক্ষণে, $AC^2=(3-6)^2+(3-4)^2=10$.

এবং $BD^2=(5-4)^2+(5-2)^2=10$. ∴ $AC=BD$.

অতএব দেখা যাইতেছে, ABCD চতুর্ভুজটির বিপরীত বাহুগুলি সমান ও কর্ণদ্বয়ও সমান অতএব, চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র।

[**দ্রষ্টব্য :** বর্গক্ষেত্র প্রমাণ করিবার সময়, ক্ষেত্রটির বাহুগুলি পরস্পর সমান ও কর্ণদ্বয় সমান দেখাইবে এবং রম্বস প্রমাণ করিবার সময় বাহুগুলি পরস্পর সমান কিন্তু কর্ণ দুইটি সমান নহে দেখাইবে।]

উদা. 21. Prove that the join of the middle points of two sides of a triangle is equal to half the third side.

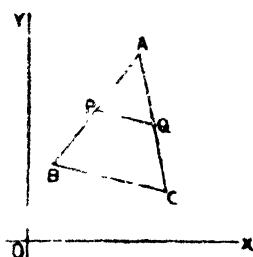
[প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা উহার তৃতীয় বাহুর অর্ধেক।]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষবিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) ও (x_3, y_3) এবং P, Q যথাক্রমে AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $PQ = \frac{1}{2}BC$.

P-এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$,

Q-এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right)$

(চিত্র নং 8)

$$\therefore \quad PQ = \sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2} - \frac{x_1+x_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1+y_2}{2} - \frac{y_1+y_3}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{4}(x_2-x_3)^2 + \tfrac{1}{4}(y_2-y_3)^2}$$

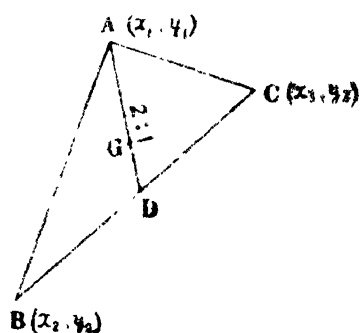
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{(x_2-x_3)^2 + (y_2-y_3)^2}.$$

আবার, $BC = \sqrt{(x_2-x_3)^2 + (y_2-y_3)^2}$. $\therefore \quad PQ = \frac{1}{2}BC$

উদা. 22 Find the co-ordinates of the centroid (ভরকেন্দ্র) of the triangle whose vertices are (x_1, y_1), (x_2, y_2) and (x_3, y_3)

মনে কর, ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষ তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3).
(চিত্র নং 9 দেখ)

BC বাহুর মধ্যবিন্দু D লও এবং AD যোগ কর। ADকে G বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত কর। G বিন্দু ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র (centroid) হইল। ঐ G বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে।

(চিত্র নং 9)

এখানে BC-র মধ্যবিন্দু D-র স্থানাঙ্ক $\{\frac{1}{2}(x_2+x_3), \frac{1}{2}(y_2+y_3)\}$.

মনে কর, G ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (x, y).

$\because$ G বিন্দু $A(x_1, y_1)$ ও $D\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাকে 2 : 1 অনুপাতে ছেদ করিয়াছে,

$$x = \frac{2 \times \frac{1}{2}(x_2 + x_3) + 1 \times x_1}{2+1} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3),$$

এবং $$y = \frac{2 \times \frac{1}{2}(y_2 + y_3) + 1 \times y_1}{2+1} = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3).$$

অতএব, নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $= \{\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)\}$

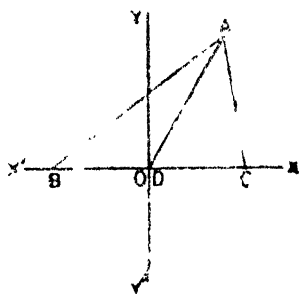
উদা. 23 Prove analytically that, in a triangle, the sum of the squares on any two sides is equal to twice the square on half the third side together with twice the square on the median that bisects the third side. [Apollonius Theorem].

[স্থানাঙ্ক দ্বারা প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর বর্গের সমষ্টি, উহার তৃতীয় বাহুর অর্ধেকের বর্গ ও ঐ বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার বর্গের সমষ্টির দ্বিগুণ।] [অ্যাপোলোনিয়াস উপপাদ্য]

ত্রিভুজ ABCর একটি মধ্যমা AD

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$.

মনে কর $BC = 2l$. এখন BCকে x অক্ষ ও উহার মধ্যবিন্দু Dকে মূলবিন্দু ধরিলে B ও Cএর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-l, 0)$ এবং $(l, 0)$ হয়।

মনে কর A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β).

(চিত্র নং 10)

$\therefore \quad AB^2 = (\alpha + l)^2 + \beta^2, \quad AC^2 = (\alpha - l)^2 + \beta^2, \quad AD^2 = \alpha^2 + \beta^2$

এবং $BD^2 = (-l)^2 = l^2$.

অতএব, $AB^2 + AC^2 = (\alpha + l)^2 + \beta^2 + (\alpha - l)^2 + \beta^2$

$$= 2(\alpha^2 + l^2) + 2\beta^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2) + 2l^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$

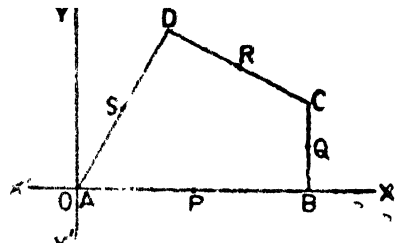
উদা. 24. Prove that the lines joining the middle points of the opposite sides of a quadrilateral bisect each other.

[C. U. 1958]

[প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির মধ্যবিন্দু সংযোজক রেখাদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়।]

মনে কর, ABCD চতুর্ভুজটির P, Q, R ও S যথাক্রমে AB, BC, CD ও AD বাহুর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে যে PR ও QS পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

(চিত্র নং 11)

ABকে X-অক্ষ ও A কে মূলবিন্দু ধরিলে এবং AB $= a$ মনে করিলে A-র স্থানাঙ্ক $(0,0)$, B-এর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ হইবে

মনে কর, C ও D-র স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2)।

এক্ষণে P, Q, R, S এর স্থানাঙ্কগুলি যথাক্রমে হইল

$$\left(\frac{a}{2}, 0\right), \left(\frac{a+x_1}{2}, \frac{y_1}{2}\right), \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \text{ এবং } \left(\frac{x_2}{2}, \frac{y_2}{2}\right)$$

অতএব, PR-এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{\frac{a}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}}{2}, \frac{\frac{y_1+y_2}{2}}{2}\right), \text{ বা } \left(\frac{a+x_1+x_2}{4}, \frac{y_1+y_2}{4}\right)$$

আবার, QS-এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{\frac{a+x_1}{2}+\frac{x_2}{2}}{2}, \frac{\frac{y_1}{2}+\frac{y_2}{2}}{2}\right), \text{ বা, } \left(\frac{a+x_1+x_2}{4}, \frac{y_1+y_2}{4}\right).$$

স্পষ্টই দেখা যাইতেছে যে, PR ও QS-এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক একই ; সুতরাং উহারা একই বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। অতএব, চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

Exercise 1

1. Find the distance of the following points from the origin [মূল বিন্দু হইতে নিম্নে প্রদত্ত প্রত্যেক বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর]

(i) (12, 5) (ii) (-3, 4) (iii) (−8, 12)
(iv) (-6, 8) (v) $\{(a+b), (a-b)\}$

2. Find the distance between the following pairs of points [নিম্নে প্রদত্ত প্রত্যেক বিন্দুযুগলের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর] :

(a) (5, 2,), (2, 3) (b) (26, 10), (2, 3)
(c) (8, 12), (−4, 7) (d) (−3, −4), (5, −10)

(e) $(m, 0), (0, n)$ (f) $(a+b, c-d), (a-b, c+d)$

(g) $(\cos\theta, \sin\theta), (\sin\theta, \cos\theta)$ (h) $(a, -b), (-a, b)$

3. Find the co-ordinates of the mid points of the st. lines joining the following pairs of points [নিম্নের প্রত্যেক বিন্দুযুগল সংযোজক সরলরেখার মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর] :—

(i) (5, 0) and (0, 7) (ii) (−2, −4) and (6, 2)

(iii) (4, −2) and (3, −5).

4. Find the co-ordinates of the points which divide the st. lines joining the following pairs of points in the given ratio :—

[নিম্নের বিন্দুযুগল সংযোজক সরলরেখা যে বিন্দুতে প্রদত্ত অনুপাতে বিভক্ত তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :—]

(a) (6, −10) and (−4, 14), ratio 3 : 4 (internally অন্তঃস্থভাবে)

(b) (3, 5) and (−2, −7), ratio 3 : 2 (internally)

(c) (−1, 2) and (4, −5), ratio 2 : 3 (externally বহিঃস্থভাবে)

(d) (3, 2) and (6, 5), ratio 2 : 1 (externally).

5. Find the co-ordinates of the point P which divides the st. line joining A (1, 2) and B (4, 3) so that AP=2PB.

[P বিন্দুটি A(1, 2) ও B(4, 3) বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখাকে বিভক্ত করে এবং AP=2PB হইয়াছে, P-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর ।]

6. Find the ratio in which

(i) the point (−2, 2) divides the st. line joining the points (−4, 6) and $(\frac{1}{2}, -3)$;

(ii) the point (1, 3) divides the join of (4, 6) and (3, 5).

[(i) (−2, 2) বিন্দুতে (−4, 6) ও $(\frac{1}{2}, -3)$ সংযোজক সরলরেখা কি অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে ?]

(ii) [(1, 3) বিন্দুটি (4, 6) ও (3, 5) বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখাকে কি অনুপাতে বিভক্ত করে ?]

7. If the distance between the points (x, 7) and (2, 3) is 5, find the value of x.

8. If the distance between the points (11, 3) and (3, y) is 10, find the ordinate (কোটি) of the second point.

9. The square of the distance between the points (12, 5) and (x, 3) is 29 ; find the abscissa (ভুজ) of the unknown point

9. (a) Find the circum-centre and the circum-radius of the triangle whose vertices are (−4, −2), (3, −9) and (−5, 3).

[যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি (−4, −2), (3, −9) ও (5, 3) তাহার পরিকেন্দ্র ও পরিব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।]

10. Prove that the points (2, 2), (−2, −2) and ($-2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$) are the vertices (শীর্ষবিন্দু) of an equilateral (সমবাহু) triangle.

11. Prove that the triangle formed by joining the points (1, 4), (8, 8) and (4, 1) is isosceles (সমদ্বিবাহু).

12. Prove that the points ($2a$, $4a$), ($2a$, $6a$) and ($2a+\sqrt{3}a$, $5a$) are the vertices of an equilateral triangle whose side is $2a$. [C. U. (B. Sc.) '52]

[প্রমাণ কর যে ($2a$, $4a$), ($2a$, $6a$) ও ($2a+\sqrt{3}a$, $5a$) বিন্দুগুলি একটি $2a$ বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু।]

13. Show that (0, 0), (2, 1), (−1, 7) and (−3, 6) are the vertices (শীর্ষবিন্দু) of a rectangle (আয়তক্ষেত্র).

14. Prove that the points (3, 4), (−1, 7) and (−3, −4) are the vertices of a right-angled triangle.

15. Show that the st. line joining the points (−4, −3) and (8, 6) passes through the origin

16. Verify that the points (1, 5), (3, 14) and (−1, −4) are collinear. [C. U. (B. Sc.)]

[প্রমাণ কর যে (1, 5), (3, 14) ও (−1, −4) বিন্দুগুলি সমরেখ।]

17. Show that the three points ($3a$, 0), (0, $3b$) and (a, $2b$) are collinear. [C. U. (B. Sc,) '24]

18. If (x, y) is equidistant from (4, 7) and (−5, 8), show that $9x-y+12=0$.

[(x, y) যদি (4, 7) ও (−5, 8) হইতে সমদূরবর্তী হয়, তবে দেখাও যে $9x-y+12=0$.]

19. If (x, y) is equidistant from (2, 4) and (−3, 3), show that $5x+y=1$.

20. If the point (x, y) is equidistant from (5, 0), (0, 5) and (3, 4), show that $x=0$, $y=0$.

21. Find the co-ordinates of the point equidistant from the points $(-2, 3)$, $(2, 1)$ and $(5, 3)$.

[$(-2, 3)$,$(2, 1)$ ও $(5, 3)$ হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।]

22. Find the co-ordinates of the point equidistant from the points $(5, 4)$, $(3, 6)$ and $(1, 4)$.

23. Find the condition that (x, y) should be equidistant from $(2, 3)$ and $(-1, 2)$.

[কি সর্তে (x, y) বিন্দুটি $(2, 3)$ ও $(-1, 2)$ হইতে সমদূরবর্তী হইবে?]

24. Find the area of the triangle whose vertices are :—

[নিম্নের শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :—]

(i) $(2, -2)$, $(4, 2)$ and $(-1, 3)$

(ii) $(3, 5)$, $(-2, 4)$ and $(5, 2)$

(iii) $(8, 9)$, $(2, 6)$ and $(9, 2)$

(iv) $(1, 2)$, $(3, 0)$ and the origin

(v) $(\cos\theta, \sin\theta)$, $(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$, $(0, 0)$

(vi) $(a, b+c)$, $(b, c+a)$, $(c, a+b)$. [C. U. 1958]

25. Find the distance between $(-2, 3)$ and $(3, -1)$ and the co-ordinates of the point of trisection that is nearer to $(-2, 3)$. [J. B. A.]

[$(-2, 3)$ ও $(3, -1)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর এবং $(-2, 3)$এর নিকটতর উহার সমত্রিখণ্ডক বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।]

26. Find the centroid of the triangle whose vertices are $(1, 7)$, $(-4, 3)$ and $(6, -1)$.

[$(1, 7)$, $(-4, 3)$ ও $(6, -1)$ শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র নির্ণয় কর।]

27. Find the centroid of the triangle whose vertices are $(3, -4)$, $(4, 7)$ and $(2, 9)$.

27. (*a*) The centroid of $\triangle$ABC lies on the origin and A and B are the pts. $(3, 7)$ and $(-5, 4)$ respectively. Find the co ordinates of C.

[ΔABC-র ভরকেন্দ্রটি মূল বিন্দুতে অবস্থিত এবং A ও B বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, 7)$ ও $(-5, 4)$. C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।]

28. Find the lengths of the medians of the triangle whose vertices are (2, 0), (4, 4) and (6, 2).

[(2, 0), (4, 4) ও (6, 2) যে ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু তাহার মধ্যমাগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।]

29. The area of the triangle formed by joining the points (5, $-$1), (x, 6) and (1, 3) is 10 square units. Find x.

[(5, $-$1), (x, 6) ও (1, 3) বিন্দুগুলি যোগ করিয়া যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তাহার ক্ষেত্রফল 10 বর্গ একক, x নির্ণয় কর।]

29. (a) The vertices A, B, C of a triangle are (2, 1), ($-$2, $-$2) and (1, $-$4) respectively; find the length of the perpendicular from A to BC.

[কোন ত্রিভুজের A, B, C শীর্ষবিন্দুগুলি যথাক্রমে (2, 1), ($-$2, $-$2) ও (1, $-$4); A হইতে BC-র উপর লম্বের দৈর্ঘ্য কত?]

30. If the points (0, $-$4), ($-$1, y) and (3, 2) are in the same st line, find y.

31. In $\triangle$ABC, AD bisects BC at D and is divided at G in the ratio 2 : 1. Prove that the straight lines drawn from B and C through G to the opposite sides are divided in the same ratio

[ABC ত্রিভুজে AD যদি BC-বাহুকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং G বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়, তবে প্রমাণ কর যে B ও C বিন্দু হইতে G বিন্দু দিয়া বিপরীত বাহু পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখা দুইটি একই অনুপাতে বিভক্ত।]

32. Find the area of the quadrilaterals, the co-ordinates of whose angular points, taken in order, are :—

[নিম্নের কৌণিক বিন্দুবিশিষ্ট প্রত্যেক চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :—]

(i) (2, $-$1), ($-$1, 3), (3, $-$3), (5, 2)
(ii) (1, 2), ($-$2, 1), (2, $-$1), (4, 1)
(iii) (0, 0), (3, 1), (4, 2), (1, 5)
(iv) (7, 2), (5, 5), (4, 9), (1, 3).

33. Find the centre and radius of the circum-circle of the triangle whose vertices are (8, 4), (7, 7) and (3, 9)

[(8, 4), (7, 7) ও (3, 9) বিন্দুগুলি যে ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু তাহার পরিবৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।]

34. Show that the origin is the centroid of the triangle whose vertices are $(a-b, b-c)$, $(-a, -b)$ and (b, c).

[প্রমাণ কর যে $(a-b, b-c)$, $(-a, -b)$ ও (b, c) যে ত্রিভুজের একটি শীর্ষবিন্দু মূল বিন্দুটি তাহার ভরকেন্দ্র।]

35. (*a*) Prove that the points (7, 3), (9, 6), (10, 12) and (8, 9) when joined, taken in order, will form a parallelogram.

[প্রমাণ কর যে (7, 3), (9, 6), (10, 12) ও (8, 9) বিন্দুগুলি পর পর যুক্ত করিলে একটি সামান্তরিক গঠিত হইবে।]

(*b*) Show that the four points (1, 2), (4, 6), (−4, 12) and (−7, 8), when joined in order, form a rectangle.

[প্রমাণ কর যে, পর পর (1, 2), (4, 6), (−4, 12) ও (−7, 8) বিন্দুগুলি যুক্ত করিলে একটি আয়তক্ষেত্র উৎপন্ন হয়।]

(*c*) Verify that the figure, formed by joining the points A (2, 5), B (5, 9), C (9, 12) and D (6, 8), in order, is a rhombus.

[প্রমাণ কর যে, পর পর A (2, 5), B (5, 9), C (9, 12) ও D (6, 8) বিন্দুগুলির যোগে উৎপন্ন ক্ষেত্রটি একটি রম্বস।]

(*d*) Justify that the four points P (−2, −7), Q (2, −4), R (−1, 0) and S (−5, −3) are the vertices of a square.

[দেখাও যে, P (−2, −7), Q (2, −4), R (−1, 0) ও S (−5, −3) বিন্দুগুলি একটি বর্গক্ষেত্রের চারিটি কৌণিক বিন্দু।]

(*e*) The points (2, 3), (8, 11) are the ends of a diagonal of a rectangle and the other diagonal is parallel to the y-axis. Find the co-ordinates of the ends of the latter diagonal.

[H. S. '70]

[কোন আয়তক্ষেত্রের একটি কর্ণের প্রান্তবিন্দুদ্বয় (2, 3) ও (8, 11), ইহার অপর কর্ণটি y-অক্ষের সমান্তরাল। ঐ শেষোক্ত কর্ণের প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।]

36. If the figure formed by joining the four points (α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3) and (α_4, β_4), taken in order, be a parallelogram, then prove that

$\alpha_1+\alpha_3=\alpha_2+\alpha_4$ and $\beta_1+\beta_3=\beta_2+\beta_4$.

[যদি (α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3) ও (α_4, β_4) বিন্দুগুলির যোগে উৎপন্ন ক্ষেত্রটি সামান্তরিক হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\alpha_1+\alpha_3=\alpha_2+\alpha_4$ এবং $\beta_1+\beta_3=\beta_2+\beta_4$.]

37. The line joining A $(b \cos \alpha, b \sin \alpha)$ and B$(a \cos \beta, a \sin \beta)$ is produced to the point M (x, y) so that AM and BM are in the ratio of b to a ; prove that

$$x + y \tan\frac{\alpha+\beta}{2} = 0. \qquad \text{[C. U. 1955 Compl.]}$$

[A $(b \cos \alpha, b \sin \alpha)$ ও B $(a \cos \beta, a \sin \beta)$ সংযোজক রেখাকে M (x, y) বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করায় AM ও BM-এর অনুপাত $b : a$ হইল। প্রমাণ কর যে $x+y \tan\frac{\alpha+\beta}{2}=0$.]

38. The co-ordinates of A, B, C are $(6, 3)$, $(-3, 5)$ and $(4, -2)$ respectively and P is the point (x, y) ; show that

$$\frac{\Delta PBC}{\Delta ABC} = \frac{x+y-2}{7}. \qquad \text{[C. U.]}$$

[A, B, C ও P বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(6, 3)$, $(-3, 5)$, $(4, -2)$ ও (x, y) ; প্রমাণ কর যে $\frac{\Delta PBC}{\Delta ABC} = \frac{x+y-2}{7}$.]

39. The co-ordinates of A, B, C, D are respectively $(6, 3)$, $(-3, 5)$, $(4, -2)$ and $(x, 3x)$ and

$$\frac{\text{area of } \Delta DBC}{\text{area of } \Delta ABC} = \frac{1}{2} \text{ : find } x \qquad \text{[C. U. 1949]}$$

[A, B, C, D বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(6, 3)$, $(-3, 5)$, $(4, -2)$ ও $(x, 3x)$ এবং $\frac{\Delta DBC}{\Delta ABC} = \frac{1}{2}$; x-এর মান নির্ণয় কর।]

40 Prove the following analytically (স্থানাঙ্ক সাহায্যে প্রমাণ কর) :—

(a) If G be the centroid (ভরকেন্দ্র) of a triangle ABC, then

(i) $3(GA^2 + GB^2 + GC^2) = BC^2 + CA^2 + AB^2$

(ii) $\Delta GBC = \frac{1}{3} \Delta ABC$.

(b) If D, E, F be the middle points of the sides BC, CA, AB respectively of a triangle ABC, then prove that

$$\Delta ABC = 4 \Delta DEF.$$

[D, E, F যথাক্রমে ΔABC-এর BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু ; প্রমাণ কর $\Delta ABC = 4 \Delta DEF$.]

(c) Prove that the lines joining the middle points of the adjacent sides of a quadrilateral form a parallelogram.

[প্রমাণ কর যে, কোন চতুর্ভুজের সংলগ্ন বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পর পর যোগ করিলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয়।]

Locus (সঞ্চারপথ)

9. Locus and its Equation (সঞ্চারপথ ও তাহার সমীকরণ)।

তোমরা জান যে, একটি বিন্দু যদি এক বা একাধিক সর্ত পালন করিয়া গতিশীল হয়, তবে তাহার গতিপথকে তাহার **সঞ্চারপথ (locus)** বলে।

বিন্দুটিকে যে সর্তানুবর্তী হইয়া চলিতে হয় তাহা ভাষায় প্রকাশ না করিয়া তাহার স্থানাঙ্ক (co-ordinates) দ্বারা প্রকাশ করা যায়। ঐ সর্তের স্থানাঙ্ক দ্বারা প্রকাশিত রূপকে ঐ **সঞ্চারপথের সমীকরণ** (Equation of the locus) বলে।

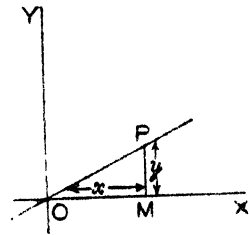
তোমরা জ্যামিতিতে দেখিয়াছ যে, (i) একটি বিন্দু যদি দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সতত সমদূরবর্তী থাকিয়া গতিশীল হয়, তবে তাহার সঞ্চারপথ হয় ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার লম্ব সমদ্বিখণ্ডক ;

(ii) বিন্দুটি যদি দুইটি ছেদী সরলরেখা হইতে সতত সমদূরবর্তী থাকিয়া সঞ্চরণ করে, তবে তাহার সঞ্চারপথ হয় ঐ সরলরেখা দুইটির অন্তর্ভূক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক ,

(iii) বিন্দুটি যদি কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সতত সমদূরবর্তী থাকে, তবে তাহার সঞ্চারপথ হয় একটি বৃত্তের পরিধি ; ইত্যাদি।

9. (*a*) স্থানাঙ্ক দ্বারা সর্ত প্রকাশ বা সঞ্চারপথের **সমীকরণ নির্ণয় :**

সর্তগুলিকে জ্যামিতির ভাষায় প্রকাশ না করিয়া গতিশীল বিন্দুটির স্থানাঙ্ক দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

মনে কর, একটি বিন্দুর সঞ্চরণের জ্যামিতিক সর্ত হইল যে, তাহার সর্ব অবস্থানে y-অক্ষ হইতে তাহার দূরত্ব x-অক্ষ হইতে তাহার দূরত্বের দ্বিগুণ। উহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে। চিত্র নং 12 দেখ। এখানে OX ও OY যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ।

চিত্র নং 12

মনে কর, ঐ গতিশীল বিন্দুটির একটি অবস্থান P এবং উহার স্থানাঙ্ক (x, y)। অতএব, এস্থলে $x=2y$. P বিন্দুর যে-কোন অবস্থানেও তাহার ভুজ (x) তাহার কোটির (y) দ্বিগুণ বলিয়া সে স্থলেও $x=2y$.

অতএব, বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল $x=2y$.

অতএব, কোন সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয়ের জন্য (i) প্রদত্ত সর্ত প্রকাশ করিয়া প্রথমে একটি চিত্র আঁকিবে, (ii) উহাতে গতিশীল বিন্দুটির একটি অবস্থানের স্থানাঙ্ক (x, y) লইবে এবং (iii) তৎপরে x, y দ্বারা প্রদত্ত সর্তটিকে প্রকাশ করিবে। তৎপরে উহাকে সরল করিলে বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ হইবে।

[**দ্রষ্টব্য ঃ** লব্ধ সমীকরণটি গতিশীল বিন্দুর যে কোন অবস্থানের স্থানাঙ্ক দ্বারা সিদ্ধ হইবে এবং উহার সঞ্চারপথের বহিঃস্থ কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা উহা সিদ্ধ হইবে না]

উদাহরণমালা 2

উদা 1. Find the equation of the locus of a point which is always equidistant from the points (3, 4) and (5, 6)

[(3, 4) ও (5, 6) বিন্দুদ্বয় হইতে সতত সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।]

মনে কর, A ও B বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 4) ও (5, 6) এবং গতিশীল P বিন্দুর একটি অবস্থান P ও তাহার স্থানাঙ্ক (x, y).

এক্ষণে, $AP^2=(x-3)^2+(y-4)^2$, এবং $BP^2=(x-5)^2+(y-6)^2$

$\because$ প্রদত্ত সর্ত অনুসারে AP = BP,

$(x-3)^2+(y-4)^2=(x-5)^2+(y-6)^2$,

বা, $x+y=9$ [সরল করিয়া], ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 2. Find the equation of the locus of a point if its distance from the x-axis is double its distance from the point (1, 1). [C. U. (B Sc) '38]

[একটি গতিশীল বিন্দুর x-অক্ষ হইতে দূরত্ব সতত (1, 1) বিন্দু হইতে দূরত্বের দ্বিগুণ, উহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।]

মনে কর, গতিশীল P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং প্রদত্ত বিন্দুটি A (1, 1). এক্ষণে x-অক্ষ হইতে P বিন্দুর দূরত্ব $= y$, এবং A (1, 1) বিন্দু হইতে P (x, y) বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত অনুসারে $y=2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$,

বা, $y^2=4\{(x-1)^2+(y-1)^2\}$

বা, $y^2=4x^2-8x+4y^2-8y+8$,

$\therefore$ $4x^2+3y^2-8x-8y+8=0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 3. The points P and Q are $(-4, 0)$ and $(-1, 0)$ respectively. A point A moves in such a way that AP : AQ $= 2 : 1$. Find the locus of A.

[P ও Q বিন্দু যথাক্রমে $(-4, 0)$ ও $(-1, 0)$ এবং A একরূপ একটি চলমান বিন্দু যে AP : AQ $= 2 : 1$; A বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।]

মনে কর, গতিশীল A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)

$AP = \sqrt{(x+4)^2+y^2}$ এবং $AQ = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত অনুসারে $\dfrac{\sqrt{(x+4)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} = \dfrac{2}{1}$.

বা, $\dfrac{(x+4)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2} = \dfrac{4}{1}$, বা $4(x+1)^2+4y^2=(x+4)^2+y^2$,

(সরল করিয়া) $x^2+y^2=4$, ইহাই নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

উদা. 4. The co-ordinates of two fixed points A and B are respectively $(-2, 4)$ and $(6, 8)$. A point P moves so that the area of the traingle PAB is always 10. Find the equation of the lous of P.

[A ও B স্থির বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 4)$ ও $(6, 8)$ এবং P এরূপ একটি চলমান বিন্দু যে $\triangle$PABর ক্ষেত্রফল সতত 10 হয়। P-এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।]

মনে কর, গতিশীল P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)।

এখন, $\triangle$PABর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\{x(4-8)+(-2)(8-y)+6(y-4)\}$.
$=\frac{1}{2}\{8y-4x-40\}=4y-2x-20$

প্রদত্ত সর্ত অনুসারে, $4y-2x-20=10$.

$\therefore \quad x-2y+15=0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ

উদা. 5. A straight line moves such that the sum of the reciprocals of its intercepts on the axes is constant. Prove that the line passes through a fixed point. [Bombay, 1935

[একটি সরলরেখা এরূপে গতিশীল যে অক্ষদ্বয় হইতে উহার দ্বারা ছেদিত অংশদ্বয়ের অন্যোন্যকের সমষ্টি সর্বদা ধ্রুবক। প্রমাণ কর যে ঐ রেখাটি একটি স্থিরবিন্দু দিয়া যায়।]

মনে কর, গতিশীল সরল রেখাটির সমীকরণ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

x-অক্ষ ও y-অক্ষ হইতে ছেদিতাংশ যথাক্রমে a ও b.

এখন, সর্তানুযায়ী $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ ধ্রুবক।

মনে কর, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}\text{ একটি ধ্রুবক সংখ্যা}\right)$

বা, $\frac{k}{a}+\frac{k}{b}=1$. ইহাকে উপরের সমীকরণের সহিত তুলনা করিয়া দেখা যায় যে, ঐ সমীকরণ (k, k) বিন্দুগামী। k ধ্রুবক বলিয়া (k, k) স্থিরবিন্দু. সুতরাং সরলরেখাটি একটি স্থিরবিন্দু দিয়া যাইবে।

উদা. 6. A straight line moves so that the sum of the intercepts made by it on the axes is always constant. Find the locus of the middle point of the intercept between the axes.

[একটি সরলরেখা এরূপে সঞ্চরমান যে উহা দ্বারা ছিন্ন অক্ষদ্বয়ের অংশ দুইটির সমষ্টি সতত ধ্রুবক। অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী উহার ছেদিতাংশের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।]

মনে কর, গতিশীল সরলরেখাটির একটি অবস্থানে অক্ষদ্বয় দ্বারা ছেদিতাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β)। সুতরাং স্পষ্টতঃই এই অবস্থানে ঐ সরলরেখা দ্বারা x-অক্ষে ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য $=2\alpha$ এবং y-অক্ষে ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য $=2\beta$.

প্রদত্ত সর্ত অনুসারে, $2\alpha+2\beta=$ ধ্রুবক $=2k$ (মনে কর)

$$\therefore \quad \alpha+\beta=k.$$

অতএব দেখা যাইতেছে (α, β) বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ $x+y=k$.

উদা. 7. A and B being fixed points $(a, 0)$ and $(-a, 0)$ respectively, find the locus of P when $PB^2+PC^2=2PA^2$, C being the point $(d, 0)$. [Utkal, 1948]

[A ও B দুইটি স্থিরবিন্দু যথাক্রমে $(a, 0)$ ও $(-a, 0)$ এবং C একটি বিন্দু যাহার স্থানাঙ্ক $(d, 0)$; যখন $PB^2+PC^2=2PA^2$ তখন Pএর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।]

মনে কর, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y).

$PB^2=(x+a)^2+y^2$, $\quad PC^2=(x-d)^2+y^2$

এবং $PA^2=(x-a)^2+y^2$.

প্রদত্ত সর্ত অনুসারে, $(x+a)^2+y^2+(x-d)^2+y^2=2(x-a)^2+2y^2$,

বা, $2ax+a^2-2dx+d^2=-4ax+2a^2$,

বা, $2(3a-d)x+d^2-a^2=0$, ইহাই নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

উদা. 8. Given the base and the difference of the squares of the sides of a triangle. Find the equation to the locus of the vertex [C. U. 1944]

[একটি ত্রিভুজের ভূমি এবং অপর বাহুদ্বয়ের বর্গ দুইটির অন্তরফল দেওয়া আছে। উহার শীর্ষবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।]

মনে কর, প্রদত্ত ভূমি $BC=2a$. এখন ভূমিকে x-অক্ষ ও উহার মধ্য বিন্দু O-কে মূলবিন্দু ধরিলে Bএর স্থানাঙ্ক $(-a, 0)$ এবং Cএর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ হইবে।

মনে কর, গতিশীল শীর্ষবিন্দু A'র স্থানাঙ্ক (x, y).

$\therefore$ $AB^2=(x+a)^2+y^2$ এবং $AC^2=(x-a)^2+y^2$.

সুতরাং, প্রদত্ত সর্তানুযায়ী $AB^2-AC^2=$ ধ্রুবক।

$\therefore$ $\{(x+a)^2+y^2\}-\{(x-a)^2+y^2\}=$ ধ্রুবক $=k$ (ধরি),

সুতরাং $4ax=k$. $\therefore$ $x=\frac{k}{4a}$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

Exercise 2

1. Find the equation to the locus of a point which moves in such a way that twice its abscissa always exceeds the ordinate by 4.

[একটি গতিশীল বিন্দুর ভুজের দ্বিগুণ উহার কোটি অপেক্ষা সতত 4 অধিক ; উহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।]

2. Find the equation to the locus of a point which is always equidistant from the two points (0, 0) and (3, 4).

[(0, 0) ও (3, 4) বিন্দুদ্বয় হইতে সতত সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।]

3. Find the locus of a point which moves in such a way that its distance from the point (3, 0) is always equal to its distance from the origin.

[মূলবিন্দু ও (3, 0) বিন্দু হইতে সতত সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।]

4. Find the equation to the locus of a point which moves in such a way that twice its distance from the x-axis always exceeds three times its distance from the y-axis by 4.

[একটি বিন্দু এরূপে চলমান যে x-অক্ষ হইতে উহার দূরত্বের দ্বিগুণ y-অক্ষ হইতে দূরত্বের তিন গুণ অপেক্ষা 4 অধিক। উহার সঞ্চারপথের সমীকরণ কি হইবে ?]

5. Find the equation to the locus of a point which moves so that its distance from the y-axis is double its distance from the point (2, 2). [C. U.

[যে গতিশীল বিন্দুর y-অক্ষ হইতে দূরত্ব (2, 2) বিন্দু হইতে দূরত্বের দ্বিগুণ তাহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।]

6. A point moves so that its distance from the point (1, 0) is always equal to its distance from the axis of y. Find the equation to its locus.

[(1, 0) বিন্দু ও y-অক্ষ হইতে সতত সমদূরবর্তী গতিশীল বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।]

7. Find the equation to the locus of a point which moves in such a way that its distance from (5, 12) is always equal to 13.

[একটি চলমান বিন্দুর (5, 12)-বিন্দু হইতে দূরত্ব সতত 13 হইলে উহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।]

8. A point moves in such a way that the sum of the squares of its distances from the two fixed points $(a, 0)$ and $(-a, 0)$ is constant and is equal to $2k^2$. Find the equation to its locus.

[একটি বিন্দু এরূপে চলে যে দুইটি স্থিরবিন্দু $(a, 0)$ ও $(-a, 0)$ হইতে উহার দূরত্বদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি সতত ধ্রুবক ও $2k^2$-এর সমান। উহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।]

9. The co-ordinates of two vertices of a triangle are (3, 2) and (5, 6). Find the equation to the locus of the third vertex if the area of the triangle be 12 sq. units.

[কোন ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 2) ও (5, 6) এবং উহার ক্ষেত্রফল সতত 12 বর্গ একক হইলে, উহার তৃতীয় শীর্ষের সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।]

10, Find the equation to the locus of a point which moves in a plane so that the sum of its distances from two fixed straight lines at right angles to each other, is always equal to a constant quantity b.

[কোন সমতলে একটি বিন্দু এরূপে সঞ্চরমান যে পরস্পর সমকোণে নত দুইটি স্থির সরলরেখা হইতে উহার দূরত্বদ্বয়ের সমষ্টি সতত ধ্রুবক রাশি b হয়। বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।]

[*Hints* : পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত স্থির রেখা দুইটিকে অক্ষদ্বয় ধরিবে।]

11. A moving line passes through a fixed point (a, b) and meets the co-ordinate axes in P and Q. Find the locus of the middle point of PQ.

[(a, b) এই স্থিরবিন্দুগামী একটি গতিশীল সরলরেখা স্থানাঙ্ক-অক্ষদ্বয়ের সহিত P ও Q বিন্দুতে মিলিত হয়। PQ-এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।]

The Straight line

(সরলরেখা)

Equation of a Straight line

(সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়)

10. কোন অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation to a straight line parallel to one of the co-ordinate axes.]

মনে কর, QR y-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা [চিত্র নং 14], উহা যেন x-অক্ষকে R বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং OR$=a$, সুতরাং y-অক্ষ হইতে QR এর দূরত্ব$=a$ হইল। [চিত্র নং 14 দেখ।]

মনে কর, এই QR-এর উপর F যে-কোন একটি বিন্দু যাহার স্থানাঙ্ক (x, y)। এখন F-এর যে কোন অবস্থানে উহার কোটি (ordinate) যাহাই হউক না কেন, উহার ভুজ সর্বদা$=$OR$=a$ হইবে। QR সরলরেখাকে

দুইদিকে অসীম পর্যন্ত বর্ধিত করিলেও উহার উপরিস্থিত সকল বিন্দুরই ভুজ$=a$ হইবে এবং উহার বহিঃস্থ অন্য কোন বিন্দুর ভুজ$=a$ হইতে পারে না। অতএব ঐ QR সরলরেখার **সমীকরণ হইল $x=a$.**

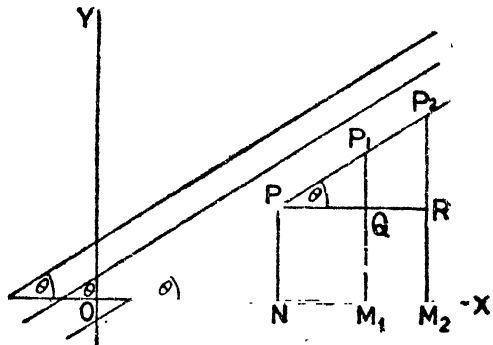
অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, যদি TN সরলরেখা x-অক্ষ হইতে b একক দূরে x-অক্ষের সহিত সমান্তরাল হয়, তবে উহার উপরিস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর কোটি (ordinate) সর্বদা$=b$ হইবে। অতএব TN সরলরেখার সমীকরণ হইবে $y=b$.

অনুসিদ্ধান্ত : (i) প্রথম সমীকরণে যদি $a=0$ হয়, তবে y-অক্ষ হইতে QR-এর দূরত্ব শূন্য হওয়ায় QR সরলরেখা y-অক্ষের সহিত সমাপতিত (মিলিত) হইবে এবং তখন $x=0$ হইবে।

অতএব, **y-অক্ষের সমীকরণ হইল $x=0$.**

(ii) অনুরূপে দ্বিতীয় সমীকরণে $b=0$ হইলে, x-অক্ষ হইতে TN-এর দূরত্ব শূন্য হওয়ায় TN সরলরেখা x-অক্ষের সহিত মিলিয়া যাইবে এবং $y=0$ হইবে। অতএব, **x-অক্ষের সমীকরণ হইল $y=0$.**

11. Gradient of a straight line (সরলরেখার প্রবণতা)।

মনে কর, OX ও OY দুইটি পরস্পর লম্ব অক্ষ এবং P, P_1 ও P_2 একই সরলরেখার উপর P বিন্দুর তিনটি অবস্থান, PN, P_1M_1 ও P_2M_2 X-অক্ষের উপর লম্ব এবং P হইতে P_2M_2এর উপর PR লম্ব, উহা যেন P_1M_1-কে Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

(চিত্র নং 13)

মনে কর, PP_1 সরলরেখাটি x-অক্ষের সহিত θ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

এক্ষণে, PN, P_1M_1 ও P_2M_2 যথাক্রমে P, P_1 ও P_2এর কোটি (ordinate) হইল এবং PR ‖ OX বলিয়া $\angle P_2PR=\theta$.

কোন সরলরেখার Gradient বলিলে বুঝায় উহার উপরিস্থিত বিন্দুর ভুজ (abscissa) এক একক বৃদ্ধি পাইলে তাহার কোটি যতটুকু বৃদ্ধি পায়

চিত্রে P বিন্দু তাহার প্রথম অবস্থান P হইতে যখন সরিয়া P_1 অবস্থানে গেল তখন তাহার ভুজ NM_1 বৃদ্ধি পাইল এবং কোটি বৃদ্ধি পাইল P_1Q, সুতরাং ভুজটির NM_1 বৃদ্ধির জন্য কোটি বাড়িল P_1Q.

∴ ভুজটির এক একক বৃদ্ধির জন্য কোটির বৃদ্ধি

$=\frac{P_1Q}{NM_1}=\frac{P_1Q}{PQ}$ [∵ $PQ=NM_1$] ইহাই সরলরেখাটির Gradient বা প্রবণতা।

আবার দেখ, বিন্দুটি যদি P হইতে P_2 অবস্থানে যায়, তবে ভুজটির NM_2 বা PR বৃদ্ধির জন্য কোটির বৃদ্ধি হয় P_2R.

∴ ভুজটির এক একক বৃদ্ধির জন্য কোটির বৃদ্ধি $=\frac{P_2R}{PR}$.

এক্ষণে, ∵ $\triangle PQP_1$ ও $\triangle PRP_2$ সদৃশ, ∴ $\frac{P_1Q}{PQ}=\frac{P_2R}{PR}$

অতএব, প্রমাণিত হইল যে, সরলরেখাটির উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর পক্ষে Gradient ধ্রুবক হইবে।

এখন দেখ, যদি অক্ষ দুইটির সম্পর্কে একই দৈর্ঘ্য একক ধরা হয়, তবে $\frac{P_1Q}{PQ}=\tan\theta$ (অর্থাৎ x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত সরলরেখাটি যে কোণ উৎপন্ন করে তাহার tangent)।

Gradient-এর সংজ্ঞা : কোন সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের positive direction-এর সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তাহার tangent-কে সরলরেখাটির gradient বা প্রবণতা বলে।

11. (i) **দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু-সংযোজক সরলরেখার** gradient **নির্ণয়**

[To find the gradient of the st. line joining two points.]

মনে কর, P ও P_1 নির্দিষ্ট দুইটি বিন্দু [চিত্র 13 আঁক] এবং উহাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2)।

মনে কর, PP_1 সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত θ কোণে নত আছে।

∴ নির্ণেয় Gradient $=\tan\theta=\frac{P_1Q}{PQ}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

[**দ্রষ্টব্য** : চিত্র হইতে দেখা যায় সমান্তরাল সরলরেখাগুলির প্রবণতা একই থাকে।]

(ii) তিনটি বিন্দু একরেখীয় হইবার (collinearity of three points) শর্ত সম্বন্ধে পূর্বে আলোচনা করা হইয়াছে।

এখানে মনে কর, A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) এবং C (x_3, y_3) তিনটি বিন্দু। যদি AB-সরলরেখার gradient BC-সরলরেখার gradientএর সমান হয়, তবে AB ও BC সরলরেখাদ্বয় x-অক্ষের সহিত সমান কোণে নত হওয়ায় A, B, C বিন্দুত্রয় একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

এক্ষণে, AB-র gradient $=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ এবং BC-র gradient $=\dfrac{y_2-y_3}{x_2-x_3}$

অতএব, $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{y_2-y_3}{x_2-x_3}$ হইলে A, B, C সমরেখ হইবে।

উহা হইতে পাই $x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0$ হইলে ঐ বিন্দুত্রয় সমরেখ হইবে।

(iii) 11নং অনুচ্ছেদে যে θ কোণ ধরা হইয়াছে তাহা দ্বারা ইহাই বুঝায় যে x-অক্ষের সমান্তরাল কোন সরলরেখাকে ধনাত্মক দিকে ঘুরাইয়া প্রদত্ত নির্দিষ্ট দিকের সহিত সমাপতিত করিতে হইলে উহাকে θ কোণ পরিমাণ ঘুরাইতে হইবে।

যদি সরলরেখাটির অবস্থান 10নং অনুচ্ছেদে AB সরলরেখার ন্যায় হয়, তবে সেস্থলে $m=\tan$ XAB হইবে ($\tan$ BAO হইবে না)। এক্ষেত্রে m স্থূলকোণের tangent হওয়ায় ঋণাত্মক হইবে।]

12 যে-সরলরেখা x-অক্ষের সহিত কোন নির্দিষ্ট কোণে নত থাকিয়া y-অক্ষ হইতে কোন নির্দিষ্ট অংশ ছেদ করে তাহার সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation to the st. line which is inclined to the x-axis at a given angle and cuts off a given intercept from the y-axis.]

মনে কর, AB সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত θ কোণে নত এবং উহা y-অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করিয়া ঐ অক্ষ হইতে OC অংশ ছিন্ন করিয়াছে।

মনে কর, OC $=b$ একক।

(চিত্র নং 14)

AB সরলরেখার উপর যে-কোন বিন্দু P লও এবং মনে কর উহার স্থানাঙ্ক (x, y)। P হইতে x-অক্ষের উপর PM লম্ব এবং C হইতে PM-এর উপর CN লম্ব টান। এক্ষণে $\angle PCN=\theta$, $CN=OM=x$, $PM=y$, $NM=CO=b$, এবং $\tan\theta=\frac{PN}{CN}$.

এক্ষণে, $y=PN+NM=PN+b=CN\times\frac{PN}{CN}+b=x\tan\theta+b$

$\therefore\quad y=mx+b$ (এখানে $m=\tan\theta$).

AB সরলরেখার উপর Pএর যে কোন অবস্থানে উহার স্থানাঙ্ক x ও yএর মধ্যে এই সম্বন্ধ সিদ্ধ হইবে এবং উহার বহিঃস্থ কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা এই সম্বন্ধ সিদ্ধ হইবে না। অতএব, AB সরলরেখার সমীকরণ হইল $\boldsymbol{y=mx+b}$.

[**অন্য প্রকার প্রমাণ**] : (চিত্র নং 14 দেখ) মনে কর, AB সরলরেখা y-অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করিয়া উহা হইতে OC $(=b)$ অংশ ছেদ করিয়াছে এবং AB-র gradient m. AB-র উপর P যে কোন একটি বিন্দু লও এবং মনে কর, উহার স্থানাঙ্ক (x, y). এখানে C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, b)$.

$\therefore\quad \text{Gradient } m=\frac{y-b}{x-0}$, বা, $y-b=mx$.

$\therefore\quad \boldsymbol{y=mx+b}$ (যেখানে m সরলরেখাটির gradient)।

দ্রষ্টব্য : (1) এই সমীকরণ নির্ণয়ে ধরা হইয়াছে যে, AB সরলরেখাটি y-অক্ষকে ধনাত্মক দিকে ছেদ করিয়াছে। যদি উহা y-অক্ষকে ঋণাত্মক দিকে ছেদ করে, তবে b-কে ঋণাত্মক ধরিতে হইবে।

(2) এখানে θ কোণটি সূক্ষ্মকোণ ধরা হইয়াছে এবং m বা $\tan\theta$ ধনাত্মক ধরা হইয়াছে। θ স্থূলকোণ হইলে m ঋণাত্মক ধরিতে হইবে।

(3) এই সমীকরণকে সরলরেখাটির ট্যানজেন্ট আকার (Tangent form) বলে।]

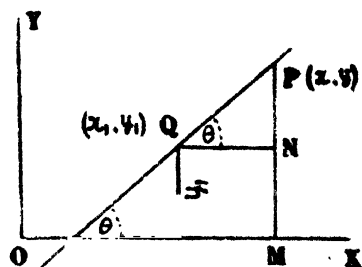
অনুসিদ্ধান্ত : (i) AB সরলরেখাটি যদি মূলবিন্দু (origin) দিয়া যাইত তবে তাহা y-অক্ষ হইতে শূন্য অংশ ছেদ করিত অর্থাৎ $b=0$ হইত। তখন সমীকরণটি হইত $y=mx$. অতএব, মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ হইল $\boldsymbol{y=mx}$.

(ii) $y=mx+b$ সমীকরণে যদি $m=0$ হয়, তবে সরলরেখাটি x-অক্ষের সমান্তরাল হইবে, কারণ, সেক্ষেত্রে $\tan\theta=0$ বলিয়া $\theta=0$. অতএব x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $y=b$. ইহা পূর্বে দেখিয়াছ।

(iii) দুইটি সরলরেখার gradient বা m সমান হইলে তাহারা x-অক্ষের সহিত সমান কোণে নত থাকিবে, সুতরাং তাহারা পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

(13.) একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী এবং x-অক্ষের সহিত একটি নির্দিষ্ট কোণে নত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of a straight line passing through a given point and inclined at a given angle to the x-axis.]

মনে কর, প্রদত্ত সরলরেখা Q (x_1, y_1) বিন্দু দিয়া গিয়া x-অক্ষের সহিত θ কোণে নত আছে। উহার P বিন্দু হইতে x-অক্ষের উপর PM লম্ব এবং $QN \perp PM$ টান।

(চিত্র নং 15)

এখানে $PN = PM - NM = y - y_1$, $QN = x - x_1$.

এক্ষণে, $\tan\theta = \dfrac{PN}{QN} = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

যদি $\tan\theta = m$ হয়, তবে $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ হইল $y - y_1 = m(x - x_1)$.

[**অন্য প্রমাণ :** মনে কর, সরলরেখাটি, (x_1, y_1) বিন্দু দিয়া গিয়া x-অক্ষের সহিত θ কোণে নত আছে এবং উহার সমীকরণ $y = mx + b$. ঐ সরলরেখার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা $y = mx + b$ সমীকরণ সিদ্ধ হইবে। অতএব (x_1, y_1) স্থানাঙ্ক দ্বারাও উহা সিদ্ধ হইবে।

$\therefore \quad y = mx + b \cdots\cdots(1)$

এবং $y_1 = mx_1 + b \cdots\cdots(2)$ [y-এর স্থানে y_1 ও x-এর স্থানে x_1 বসাইয়া, m ও b সর্বদা ধ্রুবক]

এক্ষণে (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই

$y - y_1 = m(x - x_1)$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

(14.) দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of a st line passing through two given points.]

মনে কর, প্রদত্ত সরলরেখাটি (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দিয়া গিয়াছে এবং উহার সমীকরণ যেন $y=mx+b$...(1), এখানে m ও b দুইটিই অজ্ঞাত।

(x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় ঐ সরলরেখায় অবস্থিত বলিয়া ঐ দুইটি স্থানাঙ্ক দ্বারা সমীকরণ $y=mx+b$ সিদ্ধ হইবে।

$\therefore \quad y_1=mx_1+b$ ...(2)

এবং $y_2=mx_2+b$......(3)

এক্ষণে (3) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই $y_2-y_1=m(x_2-x_1)$...(4)

এবং (2) হইতে (1) ,, ,, ,, $y_1-y=m(x_1-x)$ ...(5)

এখন (4)কে (5) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $\frac{y_2-y_1}{y_1-y}=\frac{x_2-x_1}{x_1-x}$,

$\therefore \quad y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

[দ্রষ্টব্য : (i) এখানে $\frac{y_2-y_1}{y_1-y}=\frac{x_2-x_1}{x_1-x}$ ইহাকেও নির্ণেয় সমীকরণ বলা যায়।

(ii) এই সরলরেখার m বা gradient $=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

$=\frac{\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর}}$।]

15. যে সরলরেখা উভয় অক্ষ হইতে নির্দিষ্ট অংশ ছেদ করে তাহার সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of a st. line which cuts off given intercepts from the axes of co-ordinates]

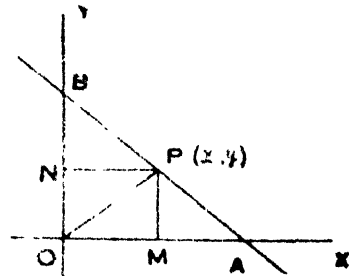
মনে কর, AB সরলরেখা x-অক্ষকে ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং ছিন্ন অংশ OA $=a$ একক এবং OB$=b$ একক।

মনে কর, P ঐ সরলরেখার উপর যে কোন বিন্দু এবং উহার স্থানাঙ্ক (x, y). x-অক্ষের উপর PM লম্ব টান।

(চিত্র নং 16)

এখানে PM$=y$, OM$=x$.

এক্ষণে, $\because$ ΔAPM ও ΔAOB সদৃশ,

$\therefore \quad \frac{OM}{OA}=\frac{BP}{AB}$, অর্থাৎ $\frac{x}{a}=\frac{BP}{AB}$......(1)

এবং $\frac{PM}{OB}=\frac{AP}{AB}$, অর্থাৎ $\frac{y}{b}=\frac{AP}{AB}$......(2),

$\therefore$ (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{BP}{AB}+\frac{AP}{AB}=\frac{BP+AP}{AB}=\frac{AB}{AB}=1.$$

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$

[**অন্য প্রমাণ :** 16 নং চিত্রে PN⊥OY টান এবং OP যোগ কর। এখানে PN=OM=x.

এখানে, $\Delta AOB=\Delta AOP+\Delta BOP$

$\therefore$ $\frac{1}{2}.OA.OB=\frac{1}{2}OA.PM+\frac{1}{2}OB.PN,$

বা, $\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}bx,$ বা, $ab=ay+bx,$

$\therefore$ $1=\frac{y}{b}+\frac{x}{a}$ [ab দ্বারা ভাগ করিয়া], বা $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$]

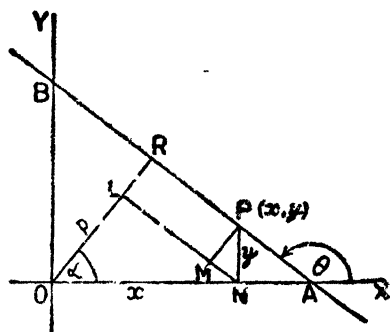
[**দ্রষ্টব্য :** (1) এস্থলে সমীকরণ নির্ণয়ের জন্য ধরা হইয়াছে যে, সরলরেখাটি OX ও OY-এর ধনাত্মক দিকে ছেদ করিয়াছে, কিন্তু উহা অক্ষদ্বয়ের মধ্যে একটিকে ধনাত্মক ও অন্যটিকে ঋণাত্মক দিকে কিংবা দুইটিকেই ঋণাত্মক দিকে ছেদ করিতে পারে। সেইরূপ স্থলে a ও bএর চিহ্নগুলি (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) ঠিক করিয়া লইতে হইবে।

(2) উপরে লব্ধ সমীকরণটিকে সরলরেখার **ছেদিতাংশ রূপ** (intercept form) বলে।]

16. অক্ষদ্বয়ের মূলবিন্দু হইতে কোন সরলরেখার উপর লম্বটি x-অক্ষের সহিত θ কোণে নত আছে। **ঐ লম্ব ও কোণটি দ্বারা ঐ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।**

[To find the equation of a st. line in terms of the perpendicular drawn to it from the origin and the angle that the perpendicular makes with the axis of x.]

মনে কর, মূলবিন্দু O হইতে সরলরেখা ABর উপর OR লম্ব। OR সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত α কোণ উৎপন্ন করিয়াছে এবং OR=p একক।

AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

(চিত্র নং 17)

AB সরলরেখার উপর যে-কোন বিন্দু P (x, y) লওয়া হইল। P হইতে x অক্ষের উপর PN লম্ব টান। N বিন্দু হইতে NL সরলরেখা OR-এর উপর লম্ব এবং P হইতে NL এর উপর PM লম্ব টান।

এক্ষণে, OR=OL+LR=OL+PM. ΔOLN সমকোণী ত্রিভুজ,

$\therefore \quad \alpha + \angle LNO = 90° = \angle LNO + \angle PNM.$

$\therefore \quad \angle PNM = \alpha, \qquad ON = x, \qquad$ এবং $PN = y.$

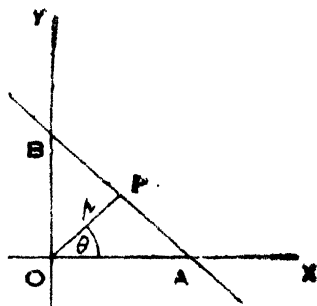
অতএব, $\frac{OL}{ON} = \cos \alpha, \qquad OL = ON \cos \alpha = x \cos \alpha$

এবং $\frac{PM}{PN} = \sin \alpha, \qquad \therefore \quad PM = PN \sin \alpha = y \sin \alpha.$

$\therefore \quad OR = OL + PM, \quad$ বা, $\quad p = x \cos \alpha + y \sin \alpha.$

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.$

[**অন্য প্রমাণ**] :

মনে কর, O মূলবিন্দু হইতে AB সরলরেখার উপর OP লম্ব টানা হইয়াছে এবং উহা OXএর সহিত θ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। মনে কর, OP $= p$ একক এবং AB যেন OX ও OY-কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

এখানে অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ OA ও OB, (চিত্র নং 18)

সুতরাং intercept formএর সমীকরণ

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ হইতে পাই $\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1 \ldots\ldots(1)$

আবার, $\frac{OP}{OA} = \cos \theta, \qquad \therefore \quad OA = \frac{OP}{\cos \theta} = \frac{p}{\cos \theta},$

এবং $\frac{OP}{OB} = \cos (90° - \theta) = \sin \theta, \qquad \therefore \quad OB = \frac{OP}{\sin \theta} = \frac{p}{\sin \theta} \cdots (2).$

এক্ষণে, (1) হইতে পাই

$$\frac{x}{\frac{p}{\cos \theta}} + \frac{y}{\frac{p}{\sin \theta}} = 1, \text{ বা, } \frac{x \cos \theta}{p} + \frac{y \sin \theta}{p} = 1,$$

$\therefore \quad x \cos \theta + y \sin \theta = p,$ ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

[সমীকরণের এই আকারকে উহার perpendicular বা canonical form বলা হয়। এখানে p সর্বদা ধনাত্মক ধরা হয়।]

অনুসিদ্ধান্ত : (i) সমীকরণটিকে Gardient formএ সাজাইলে পাওয়া যায় $y=(-\cot\alpha)x+p\operatorname{cosec}\alpha$.

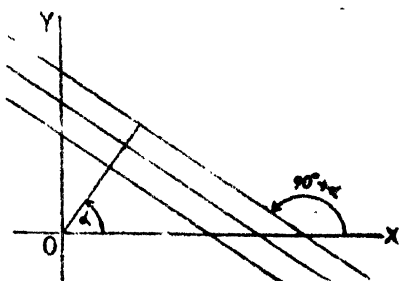
এখানে দেখা যাইতেছে, রেখাটির

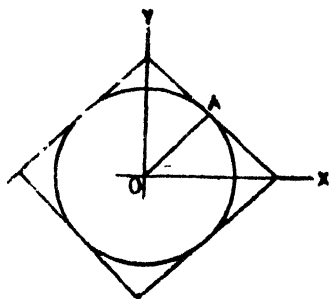
m বা $\tan\theta=-\cot\alpha=\tan(90^\circ+\alpha)$,

$\therefore\ \theta=90^\circ+\alpha$, চিত্র হইতেও ইহা স্পষ্ট বুঝা যায়।

(ii) সমীকরণটিকে ছেদিতাংশরূপে (intercept formএ) সাজাইয়া পাওয়া যায় $\frac{x\cos\alpha}{p}+\frac{y\sin\alpha}{p}=1$ বা $\frac{x}{p\sec\alpha}+\frac{y}{p\operatorname{cosec}\alpha}=1$.

এখানে, x অক্ষ হইতে ছেদিতাংশ$=p\sec\alpha$ এবং y-অক্ষ হইতে ছেদিতাংশ $p\operatorname{cosec}\alpha$

(iii) সমীকরণ $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ এর কোণ α স্থির রাখিয়া p-এর মান পরিবর্তন করিলে দেখা যায় ভিন্ন ভিন্ন সরলরেখা পাওয়া যায়। মূলবিন্দু হইতে ঐ সমস্ত সরলরেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য বিভিন্ন কিন্তু α স্থির থাকার জন্য একই সরলরেখা ঐ সমস্ত সরলরেখার উপর লম্ব হয়, এবং সেইজন্য ঐ রেখাগুলি পরস্পর সমান্তরাল হয়।

(চিত্র নং 19)

(iv) আবার দেখ, p-এর মান স্থির থাকিয়া α কোণের মান পরিবর্তিত হইলে, মূলবিন্দু হইতে লম্বটির দৈর্ঘ্য স্থির থাকিয়া α কোণের ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য লম্বটি ঘুরিতে থাকিবে। অতএব, লম্বটির বিভিন্ন অবস্থানে উহার পাদবিন্দু A একটি বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থান করিবে। বৃত্তটির কেন্দ্রটি মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ$=p$ (লম্বের দৈর্ঘ্য) হইবে।

(চিত্র নং 20)

অতএব, লম্বের ভিন্ন ভিন্ন অবস্থানে সরলরেখাগুলি এই বৃত্তের স্পর্শক হইতেছে।

সুতরাং, এক্ষেত্রে সমীকরণটির দ্বারা এমন কতকগুলি সরলরেখা বুঝা যাইবে যাহাদের প্রত্যেকটি একটি স্থির বৃত্তের স্পর্শক এবং ঐ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে মূল বিন্দু ও কেন্দ্র হইতে সরলরেখাগুলির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্যই হইবে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ।

17. যে কোন সরলরেখার সমীকরণ একঘাত সমীকরণ হইবে।

[The equation of any straight line is linear.]

মনে কর, কোন সরলরেখার উপর $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ যে-কোন দুইটি বিন্দু। এক্ষণে, অন্য একটি বিন্দু $A(x, y)$ ঐ সরলরেখায় অবস্থিত হইবে অর্থাৎ P ও Qএর সহিত সমরেখ হইবে যদি

$x(y_1-y_2)+x_1(y_2-y)+x_2(y-y_1)=0$ হয়,

অর্থাৎ যদি $x(y_1-y_2)+y(x_2-x_1)+x_1y_2-x_2y_1=0$ হয়,

অতএব ইহাই ঐ সরলরেখাটির সমীকরণ হইবে।

এক্ষণে, $y_1-y_2=a$, $x_2-x_1=b$ এবং $x_1y_2-x_2y_1=c$ বসাইয়া ঐ সমীকরণটি হইল $ax+by+c=0$ এবং ইহাই x ও yএর একঘাত দ্বারা প্রকাশিত সরলরেখার সমীকরণের **সাধারণ রূপ** (general form)।

18. x ও yএর একঘাত সমীকরণ সতত একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে। [Any linear equation represents a straight line.]

x ও yএর একঘাত সমীকরণের সাধারণ রূপ হইল

$ax+by+c=0$ (যেখানে a ও b দুইটিই শূন্য নহে)······(1)

মনে কর, (x_1, y_1), (x_2, y_2) ও (x_3, y_3)বিন্দু তিনটি $ax+by+c=0$ সমীকরণের সঞ্চারপথের উপর অবস্থিত। অতএব, ঐ স্থানাঙ্কগুলি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

$$\therefore \quad ax_1+by_1+c=0 \cdots\cdots(2)$$
$$ax_2+by_2+c=0 \cdots\cdots(3)$$
$$ax_3+by_3+c=0 \cdots\cdots(4)$$

(2) ও (3) হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই

$$\frac{a}{y_1-y_2}=\frac{b}{x_2-x_1}=\frac{c}{x_1y_2-x_2y_1}=k \text{ (মনে কর),}$$

এক্ষণে, (4)-এ a, b ও c-এর মান বসাইয়া পাই

$k\{x_3(y_1-y_2)+y_3(x_2-x_1)+(x_1y_2-x_2y_1)\}=0,$

$\therefore \quad x_3(y_1-y_2)+y_3(x_2-x_1)+x_1y_2-x_2y_1=0.$

অতএব, (x_1, y_1), (x_2, y_2) ও (x_3, y_3) বিন্দুত্রয় সমরেখ।

$\therefore \quad ax+by+c=0$ একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে।

19. সরলরেখার সাধারণ সমীকরণকে বিভিন্ন আকারে প্রকাশ।

(a) সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ $ax+by+c=0$কে $y=mx+c$ আকারে প্রকাশ।

[To express the equation $ax+by+c=0$ in the form $y=mx+c$.]

সরলরেখার সমীকরণের রূপ $ax+by+c=0$, $\quad \therefore \quad by=-ax-c.$

$\therefore \quad y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, ইহা $y=mx+c$ এই আকারের হইল ; কারণ, এখানে $m=-\frac{a}{b}$ এবং ধ্রুবকরাশি cএর স্থানে $\frac{c}{b}$ হইয়াছে।

(b) সরলরেখার সমীকরণের সাধারণ রূপকে অক্ষদ্বয় হইতে ছেদিতাংশ রূপে প্রকাশ।

[To express the equation $ax+by+c=0$ in the form $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$].

সরলরেখার সমীকরণের সাধারণ রূপ $ax+by+c=0$.

অতএব, $ax+by=-c$,

বা, $\frac{ax}{-c}+\frac{by}{-c}=1$ [উভয়পক্ষকে $-c$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $\frac{x}{-\frac{c}{a}}+\frac{y}{-\frac{c}{b}}=1$ এবং ইহাই সমীকরণের নির্ণেয় রূপ ;

কারণ, এখানে অক্ষদ্বয় হইতে ছেদিতাংশদ্বয় যথাক্রমে $-\frac{c}{a}$ ও $-\frac{c}{b}$.

(c) সরলরেখার সাধারণ সমীকরণকে লম্ব আকারে প্রকাশ।

[To express the equation $ax+by+c=0$ in the perpendicular form or in the form $x \cos\theta+y\sin\theta-p=0$.]

সরলরেখার সমীকরণের সাধারণ রূপ $ax+by+c=0 \cdots\cdots(1)$

এখানে যদি, $\tan\theta=\frac{b}{a}$ হয়, তবে $\frac{b^2}{a^2}=\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$,

বা, $\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$,

বা, $\cos^2\theta=\frac{a^2}{a^2+b^2}$, $\therefore\ \cos\theta=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$.

অনুরূপে, $\sin\theta=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$.

এক্ষণে (1) হইতে পাই $ax+by=-c$,

বা, $\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}y=-\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$

[উভয়পক্ষকে $\pm\sqrt{a^2+b^2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $x\cos\theta+y\sin\theta=-\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$

এবং ইহা $x\cos\theta+y\sin\theta=p$ এই আকারের হইয়াছে।

এখানে ডানপক্ষের হরের + বা − যে চিহ্ন ধরিলে সমগ্র ডানপক্ষ ধনাত্মক হয় সেই চিহ্ন লইতে হইবে।

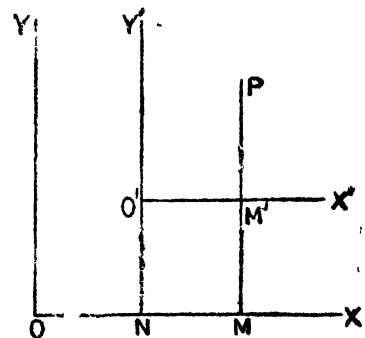
20. মূলবিন্দু ও অক্ষদ্বয়ের পরিবর্তন।

কখন কখন প্রয়োজন হইলে মূলবিন্দু ও অক্ষদ্বয়কে পরিবর্তিত অর্থাৎ স্থানান্তরিত করিতে হয়। ইহা তিন প্রকারের হইতে পারে। যথা—(1) দিকের (direction) পরিবর্তন না করিয়া কেবল মূলবিন্দুর পরিবর্তন; অথবা (2) মূলবিন্দু অপরিবর্তিত রাখিয়া কেবল দিকের পরিবর্তন, অথবা (3) মূলবিন্দু ও দিক উভয়ের পরিবর্তন।

দ্বিতীয় ও তৃতীয় প্রকার এখানে পাঠ্য বহির্ভূত; সুতরাং প্রথম প্রকারের পরিবর্তন সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

মনে কর, OX ও OY মূল (আদি) অক্ষদ্বয় (এখানে প্রদত্ত মূলবিন্দু হইল O)।

মনে কর, ইহাদের সহিত সমান্তরাল পরিবর্তিত নূতন অক্ষদ্বয় হইল O'X' ও O'Y' (এখানে নূতন মূলবিন্দু হইল O')।

মনে কর, মূল অক্ষদ্বয় সম্পর্কে নূতন মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x', y')।

(চিত্র নং 21)

একই সমতলে অবস্থিত P একটি বিন্দু। মূল অক্ষদ্বয় অনুসারে উহার স্থানাঙ্ক (x, y) এবং নূতন অক্ষদ্বয় অনুসারে উহার স্থানাঙ্ক (x_1, y_1)। OX-এর উপর PM ও O'N লম্ব টান, PM যেন O'X'কে M' বিন্দুতে ছেদ করিল।

এক্ষণে, $OM=x$, $MP=y$, $O'M'=x_1$, $M'P=y_1$, $ON=x'$ এবং $NO'=y'$.

অতএব, $x=OM=ON+NM=ON+O'M'=x'+x_1$,

এবং $y=MP=MM'+M'P=NO'+M'P=y'+y_1$.

অতএব, দেখা যাইতেছে যে, x-এর স্থানে $x'+x_1$ এবং y-এর স্থানে $y'+y_1$ অর্থাৎ (x, y) স্থানাঙ্কের স্থানে $(x'+x_1, y'+y_1)$ বসাইলে আদি মূলবিন্দুটি (x', y') বিন্দুতে স্থানান্তরিত হয়। ইহা লম্ব ও তির্যক উভয় প্রকার অক্ষদ্বয়ের পক্ষেই সত্য।

উদাহরণমালা 3

উদা. 1. Find the equation of the st. line parallel to the x axis and passing through the point (4, 7).

[(4, 7) বিন্দুগামী ও x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।]

x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $y=b$.

এখানে সরলরেখাটি (4, 7) বিন্দুগামী, সুতরাং এখানে $b=7$.

∴ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $y=7$.

উদা. 2. Find the equation of the line that passes through the point $(-1, 4)$ and has a gradient 2.

[একটি সরলরেখা $(-1, 4)$ বিন্দু দিয়া যায় এবং উহার প্রবণতা (gradient) 2; উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।]

আমরা জানি (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার gradient m হইলে তাহার সমীকরণ হয় $y-y_1=m(x-x_1)$.

এখানে $m=2$, $x_1=-1$, $y_1=4$.

∴ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $y-4=2\{x-(-1)\}$

বা, $y-4=2x+2$, বা, $2x-y+6=0$.

উদা. 3. Find the gradient of the line joining the points (2, 4) and (1, 2).

(x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার gradient$=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

এখানে $y_1=4$, $y_2=2$ এবং $x_1=2$, $x_2=1$,

$\therefore$ নির্ণেয় gradient$=\dfrac{4-2}{2-1}=2$.

উদা. 4. Find the acute angle between the two st. lines whose gradients are 1 and $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

m_1 ও m_2 দুইটি সরলরেখার gradients এবং উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হইলে,

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2} \text{ হয়}$$

$$\therefore \text{ এখানে } \tan\theta=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\times\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}$$

$$=2-\sqrt{3}=\tan 15^\circ.$$

$\therefore$ $\theta=15^\circ$, সুতরাং নির্ণেয় সূক্ষ্মকোণ$=15^\circ$.

উদা. 5. Find the equation of the st. line cutting off an intercept 2 units from the negative side of the y-axis and inclined at 120° to the x-axis.

[যে সরলরেখা x-অক্ষের সহিত 120° কোণে নত ও যাহা দ্বারা ঋণাত্মক দিকে y-অক্ষের ছেদিতাংশ 2 একক দীর্ঘ তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর ।]

মনে কর, সমীকরণটি $y=mx+c$.

এখানে $m=\tan 120^\circ=\tan(180^\circ-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$,

এবং $c=-2$($\because$ এখানে ছেদিতাংশ y-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে 2 একক ।)

$\therefore$ এখানে সমীকরণটি হইল $y=x(-\sqrt{3})-2$, বা, $y+x\sqrt{3}+2=0$.

উদা. 6. Find the equation of the line passing through the points $(-1, 2)$ and $(3, -4)$.

(x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ হয় $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. এখানে $x_1=-1$, $x_2=3$ এবং $y_1=2$, $y_2=-4$.

অতএব, $\dfrac{y-2}{x-(-1)}=\dfrac{-4-2}{3-(-1)}$, বা, $\dfrac{y-2}{x+1}=\dfrac{-6}{4}=\dfrac{-3}{2}$,

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $3x+2y-1=0$.

[**অন্য প্রণালী**] মনে কর, নির্ণেয় সমীকরণ $y = mx + c$.

$\because$ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় ঐ সরলরেখায় অবস্থিত,

$\therefore$ উহাদের স্থানাঙ্ক দ্বারা ঐ সমীকরণ সিদ্ধ হইবে।

অতএব, এখানে $2 = -m + c \cdots (1)$ এবং $-4 = 3m + c \cdots (2)$

এক্ষণে (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই $m = -\frac{3}{2}$ এবং $c = \frac{1}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, অর্থাৎ $3x + 2y - 1 = 0$.

উদা. 7. Find the points at which the line $2y - 4x - 7 = 0$ cuts the axes of co-ordinates and find its gradient.

[$2y - 4x - 7 = 0$ রেখা যে দুই বিন্দুতে অক্ষদ্বয়কে ছেদ করে তাহাদের স্থানাঙ্ক ও রেখাটির gradient (প্রবণতা) নির্ণয় কর।]

যে বিন্দুতে সরলরেখাটি x-অক্ষকে ছেদ করে সেই বিন্দুর কোটি শূন্য অর্থাৎ সেখানে $y = 0$.

প্রদত্ত সমীকরণে $y = 0$ হইলে $x = -\frac{7}{4}$ হইবে।

অতএব, সরলরেখাটি x-অক্ষকে $(-\frac{7}{4}, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

অনুরূপে সমীকরণে $x = 0$ হইলে $y = \frac{7}{2}$ হয়।

অতএব, সরলরেখাটি y-অক্ষকে $(0, \frac{7}{2})$ বিন্দুতে ছেদ করে।

এখানে সমীকরণটি হইল $2y = 4x + 7$, বা $y = 2x + \frac{7}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় gradient $= 2$.

উদা. 8. Obtain the equation of the st. line which makes intercepts 2 and 1 on the co-ordinate axes. Also find the intercepts made on the axes by the line $2x + y = 5$.

[C. U. '44

[যে সরলরেখা দ্বারা অক্ষদ্বয় হইতে ছেদতাংশ 2 ও 1 তাহার সমীকরণ, এবং $2x + y = 5$ রেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ নির্ণয় কর।]

মনে করে, সমীকরণটি $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. এখানে $a = 2$ এবং $b = 1$.

$\therefore$ $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} = 1$, বা, $x + 2y = 2$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

আবার, প্রদত্ত $2x + y = 5$ সমীকরণকে $\frac{x}{\frac{5}{2}} + \frac{y}{5} = 1$ এই আকারে লেখা যায়

[একটি সরলরেখা $(2, \frac{5}{3})$ বিন্দু দিয়া গিয়াছে এবং অক্ষদ্বয়ের মধ্যে উহার ছিন্ন অংশটি ঐ বিন্দুতে 5 : 4 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হইয়াছে। উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।]

মনে কর, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

মনে কর, ইহা x-অক্ষকে A বিন্দুতে ও y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করিল।

$\therefore$ A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 0)$ ও $(0, b)$।

AB রেখা যে বিন্দুতে 5 : 4 অনুপাতে বিভক্ত হইবে সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইল $\left(\frac{5.0+4.a}{5+4}, \frac{5.b+4.0}{5+4}\right)$ বা $\left(\frac{4}{9}a, \frac{5}{9}b\right)$.

কিন্তু এই বিন্দুর স্থানাঙ্ক প্রদত্ত আছে $(2, \frac{5}{3})$

$\therefore$ $\frac{4}{9}a=2$ বা, $a=\frac{9}{2}$, এবং $\frac{5}{9}b=\frac{5}{3}$, বা $b=3$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $\frac{x}{\frac{9}{2}}+\frac{y}{3}=1$, অর্থাৎ $2x+3y-9=0$.

উদা. 10. Find the points at which the line $2y+4x+7=0$ cuts the axes of co-ordinates and find its gardient. Also, find the area of the triangle which this line forms with the co-ordinate axes.

[$2y+4x+7=0$ রেখা অক্ষদ্বয়কে যে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদের স্থানাঙ্ক, রেখাটির প্রবণতা এবং উহা অক্ষদ্বয়ের সহিত যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।]

প্রদত্ত সমীকরণটিকে $y=mx+c$ আকারে লিখিয়া পাওয়া যায় $y=-2x-\frac{7}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় প্রবণতা (gradient) $=-2$.

আবার, উহাকে $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ আকারে লিখিলে দাঁড়ায়, $\frac{x}{-\frac{7}{4}}+\frac{y}{-\frac{7}{2}}=1$.

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি x-অক্ষ ও y-অক্ষকে যে যে বিন্দুতে ছেদ করিবে তাহাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-\frac{7}{4}, 0)$ ও $(0, -\frac{7}{2})$.

সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়ের সহিত যে ত্রিভুজটি উৎপন্ন করিবে, উহা একটি সমকোণী ত্রিভুজ। মূলবিন্দু হইতে x-অক্ষ বরাবর একটি বাহুর দৈর্ঘ্য $=\frac{7}{4}$ এবং y-অক্ষ বরাবর অপর বাহুটির দৈর্ঘ্য $=\frac{7}{2}$.

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times\frac{7}{4}\times\frac{7}{2}=\frac{49}{16}$ বা $3\frac{1}{16}$ বর্গ একক।

উদা. 11. Find the equation of the line which makes equal intercepts on the axes and passes through (3, −5).

[যে সরলরেখা অক্ষদ্বয় হইতে দুইটি সমান অংশ ছিন্ন করে ও (3, −5) বিন্দু দিয়া যায় তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।]

মনে কর, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

এখানে অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ সমান বলিয়া $a=b$.

$\therefore$ সমীকরণটি $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$, বা, $x+y=a$.

আবার রেখাটি (3, −5) বিন্দুগামী বলিয়া, $3-5=a$, বা $a=-2$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x+y=-2$, বা $x+y+2=0$.

উদা. 12 Find the equation of the line passing through (2, 3) and parallel to the join of (4, −5) and (−7, 3).

[(2, 3) বিন্দুগামী এবং (4, −5) ও (−7, 3) বিন্দুদ্বয়সংযোজক সরলরেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।]

(4, −5) ও (−7, 3) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার প্রবণতা (gradient)

$$=\frac{-5-3}{4-(-7)}=-\frac{8}{11}.$$

(2, 3) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y-3=m(x-2)$.

$\because$ এই রেখাটি (4, −5) ও (−7, 3) বিন্দুদ্বয়গামী রেখার সমান্তরাল,

$\therefore$ উভয় রেখার প্রবণতা একই হইবে। $\therefore$ $m=-\frac{8}{11}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $y-3=-\frac{8}{11}(x-2)$, বা, $8x+11y-49=0$.

উদা. 13. A straight line cuts off intercepts 7 and $5\frac{1}{4}$ from the axes ; find its equation and determine the ratio in which the join of the points (−9, 5) and (7, 9) is divided by the line.

[যে সরলরেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ 7 ও $5\frac{1}{4}$ তাহার সমীকরণ এবং উহা দ্বারা (−9, 5) ও (7, 9) বিন্দুসংযোজক সরলরেখা কি অনুপাতে বিভক্ত তাহা নির্ণয় কর।]

অক্ষদ্বয় হইতে ছেদিতাংশ 7 ও $5\frac{1}{4}$, সুতরাং সরলরেখাটির সমীকরণ হইবে $\frac{x}{7}+\frac{y}{5\frac{1}{4}}=1$, $3x+4y=21$.

মনে কর, এই রেখাটি $(-9, 5)$ ও $(7, 9)$ বিন্দুদ্বয় সংযুক্তকারী রেখাংশকে $m : n$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore$ ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক হইল $\left(\frac{7m-9n}{m+n}, \frac{9m+5n}{m+n}\right)$.

যেহেতু এই বিন্দুটি উপরিলিখিত সরলরেখারও একটি বিন্দু,

$$\therefore \quad 3\left(\frac{7m-9n}{m+n}\right)+4\left(\frac{9m+5n}{m+n}\right)=21,$$

বা, $3(7m-9n)+4(9m+5n)=21(m+n)$,

বা, $36m=28n$, $\therefore \frac{m}{n}=\frac{28}{36}=\frac{7}{9}$.

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $=7 : 9$.

উদা. 14. A straight line forms a right-angled triangle with the axes of co-ordinates. If the hypotenuse is 13 and the area of the triangle is 30, find the equation of the straight line. [C. U. '33]

[কোন সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের সহিত একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করিয়াছে। উহার অতিভুজ 13 এবং ক্ষেত্রফল 30 হইলে উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।]

মনে কর, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

ইহা অক্ষদ্বয়কে $(a, 0)$ ও $(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{a^2+b^2}$.

প্রদত্ত প্রশ্নে, ইহাই ত্রিভুজটির অতিভুজ, $\therefore \sqrt{a^2+b^2}=13 \quad (1)$

আবার, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}ab$, $\therefore \frac{1}{2}ab=30$, $\therefore ab=60 \cdots (2)$

অতএব, (1) ও (2) হইতে, $\left.\begin{array}{l} a^2+b^2+2ab=169+120 \\ \text{এবং } a^2+b^2-2ab=169-120 \end{array}\right\}$

বা, $\left.\begin{array}{l}(a+b)^2=289 \\ (a-b)^2=49\end{array}\right\}$ $\quad \therefore \left.\begin{array}{l}a+b=\pm 17 \\ a-b=\pm 7\end{array}\right\}$

$\therefore \quad a=\pm 12$ ও $b=\pm 5$,

এবং $a=\pm 5$ ও $b=\pm 12$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x}{\pm 12}+\frac{y}{\pm 5}=1$, বা, $5x+12y=\pm 60$

এবং $\frac{x}{\pm 5}+\frac{y}{\pm 12}=1$, বা, $12x+5y=\pm 60$.

উদা. 15. Find the equation to the straight line which passes through the points (1, 2) and (2, 1). Find also the length of the straight line intercepted between the axes.

[C. U. 1936]

[(1, 2) ও (2, 1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ এবং অক্ষদ্বয়ের মধ্যে উহার ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।]

(1, 2) ও (2, 1) বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ হইল

$\frac{y-1}{2-1}=\frac{x-2}{1-2}$, বা $x+y=3 \cdots\cdots(1)$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

(1)-কে ছেদিতাংশরূপে সাজাইয়া পাওয়া যায় $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$.

∴ সরলরেখাটি দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ 3 ও 3 হইল।

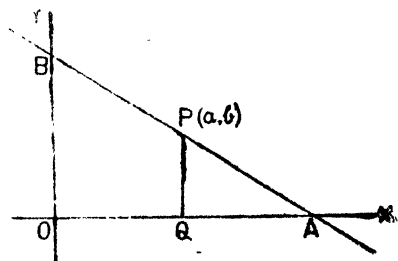
∴ সরলরেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য

$$= \sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}.$$

উদা. 16. A straight line is drawn through the point (*a*, *b*) such that the portion of the line intercepted between the axes is bisected at that point. Find its equation.

[(*a*, *b*) বিন্দুগামী একটি সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী ছেদিতাংশ ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইলে, উহার সমীকরণ কি হইবে ?]

মনে কর, AB সরলরেখাটি x ও y অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AB অংশের মধ্যবিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (a, b)।

সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

(চিত্র নং 22)

[চিত্রে] x-অক্ষের উপর

PQ লম্ব টান। এখন OQ $=a$, এবং PQ $=b$;

কিন্তু P, AB বাহুর মধ্যবিন্দু এবং PQ ∥ BO,

∴ Q, OA বাহুর মধ্যবিন্দু এবং PQ $=\frac{1}{2}$OB.

∴ OA $=2.$OQ $=2a$ এবং OB $=2$PQ $=2b$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}=1$, বা, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$.

উদা. 17. Find the length of the perpendicular from the origin upon the line $3x+4y-5=0$.

$3x+4y-5=0$, বা, $3x+4y=5$.

$\therefore$ লম্বের দৈর্ঘ্য $=\dfrac{5}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{5}{5}=1$ একক।

[**দ্রষ্টব্য :** মূলবিন্দু হইতে কোন সরলরেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য বাহির করিতে হইলে, সরলরেখার সমীকরণটিকে এমনভাবে সাজাইতে হইবে যেন সমীকরণটির ধ্রুবক অংশ সমান চিহ্নের ডান দিকে ধনাত্মক সংখ্যারূপে থাকে। তারপর, x ও y-এর সহগ দুইটির বর্গের সমষ্টি লইয়া, তাহার বর্গমূল দ্বারা ঐ ধ্রুবক সংখ্যাকে ভাগ করিলেই লম্বের দৈর্ঘ্য পাওয়া যাইবে।]

উদা. 18. Reduce $x+\sqrt{3}y+14=0$ to the perpendicular form of equation and hence find the length of the perpendicular from the origin upon the given straight line.

[$x+\sqrt{3}y+14=0$কে লম্ব আকারের সমীকরণে প্রকাশ কর এবং মূলবিন্দু হইতে উহার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।]

এখানে, $x+\sqrt{3}y+14=0$,

বা, $-\dfrac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}}x-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}}y=\dfrac{14}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}}$

বা, $\left(-\dfrac{1}{2}\right)x+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)y=7$, বা, $x\cos 240^\circ+y\sin 240^\circ=7$.

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে বুঝা গেল $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ ও $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. এখন যেহেতু $\cos\alpha$ ও $\sin\alpha$ উভয়ের মানই ঋণাত্মক, সুতরাং কোণটি তৃতীয় পাদে (third quadrant-এ) থাকিবে। $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ যখন হয়, তখন $\alpha=60^\circ$. অতএব, এক্ষেত্রে α-র মান 60°-র এমন গুণিতক যাহা তৃতীয় পাদে অবস্থিত হয়। সুতরাং উহা $180^\circ+60^\circ$ বা 240° হইবে।]

উপরের সমীকরণ হইতে পাই, লম্বের দৈর্ঘ্য $=7$ একক।

উদা. 19. If p and p_1 be the perpendiculars from the origin upon the lines $x\sin\theta+y\cos\theta=\dfrac{a}{2}\sin 2\theta$ and $x\cos\theta-y\sin\theta=a\cos 2\theta$, prove that $4p^2+p_1{}^2=a^2$.

[C. U. '28, '58]

যদি মূলবিন্দু হইতে $x \sin\theta + y \cos\theta = \frac{a}{2}\sin 2\theta$ ও $x\cos\theta - y\sin\theta = a\cos 2\theta$ রেখাদ্বয়ের উপর লম্বদ্বয় p ও p_1 হয়, তবে প্রমাণ করে যে $4p^2 + p_1^2 = a^2$ হইবে।]

$$\text{এক্ষেত্রে,}\quad p = \frac{\frac{a}{2}\sin 2\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}} = \frac{a}{2}\sin 2\theta, \quad \therefore \quad 2p = a\sin 2\theta.$$

$$\text{আবার,}\quad p_1 = \frac{a\cos 2\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} = a\cos 2\theta.$$

$$\text{অতএব,}\quad 4p^2 + p_1^2 = (2p)^2 + (p_1)^2 = a^2\sin^2 2\theta + a^2\cos^2 2\theta$$
$$= a^2(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) = a^2 \times 1 = a^2,$$
$$\therefore \quad 4p^2 + p_1^2 = a^2.$$

উদা. 20. Transform to parallel axes through the point $(-3, 2)$ the equations :

(i) $3x + 2y - 7 = 0$ and (ii) $2x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$.

[(3, 2) বিন্দু দিয়া সমান্তরাল অক্ষদ্বয়ে উপরের সমীকরণ দুইটি প্রকাশ কর।]

এখানে (i) ও (ii)-এ

$x = x' - 3$ এবং $y = y' + 2$ বসাইয়া পাই

(i) $3(x' - 3) + 2(y' + 2) - 7 = 0$,

বা, $3x' + 2y' - 12 = 0$.

এবং (ii) $2(x' - 3)^2 + (y' + 2)^2 + 4(x' - 3) - 4(y' + 2) = 0$,

বা, $2(x'^2 - 6x' + 9) + (y'^2 + 4y' + 4) + 4x' - 12 - 4y' - 8 = 0$,

বা, $2x'^2 + y'^2 - 8x' + 2 = 0$.

Exercise 3

1. State the gradient of the lines passing through the following pairs of points :—

[নিম্নের প্রত্যেক বিন্দুযুগলগামী সরলরেখার প্রবণতা (gradient) নির্ণয় কর :—]

(i) $(1, -2)$ and $(3, 4)$; (ii) $(-5, 3)$ and $(9, 5)$;

(iii) $(a, b-a)$ and $(a+b, b)$ (iv) $(0, -5)$ and $(-4, 7)$;

(v) $(8, 3)$ and $(-2, 3)$.

2. Find the gradient of the following lines and also the co-ordinates of the points on the axis of x through which these lines pass :—

[নিম্নের রেখাগুলির gradient এবং উহারা x-অক্ষের যে যে বিন্দু দিয়া যায় তাহাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :—]

(i) $3x+2y=9$; (ii) $y-3x=6$; (iii) $x+y=0$;
(iv) $2x-y+5=0$; (v) $x \operatorname{cosec} \theta+y \sec \theta+r=0$.

3. Find the angles at which the lines joining the following pairs of points are inclined to the axis of x and also the co-ordinates of the points on the axis of y through which these lines pass :—

[নিম্নের প্রত্যেক বিন্দুযুগল-সংযোজক সরলরেখা x-অক্ষের সহিত যে কোণে নত আছে সেই কোণ ও y-অক্ষের সহিত প্রত্যেকটির ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :—]

(i) $(0, -3)$ and $(0, 5)$; (ii) $(1, 2)$ and $(3, 4)$;
(iii) $(-6, 1)$ and $(-3, -2)$;
(iv) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ and $(\sqrt{3}, 5)$, (v) $(1, 1)$ and $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$.

4. Find the intercepts on the axes of the following lines :—

[নিম্নে প্রদত্ত রেখাগুলিদ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ নির্ণয় কর :—]

(i) $2x-9y+6=0$, (ii) $3x-4y+1=0$;
(iii) $y \cos \theta-x \sin \theta=r$.

5. Find the equations to the straight lines cutting off following intercepts from the axes of x and y respectively :—

[সরলরেখা কর্তৃক x-ও y-অক্ষের ছেদিতাংশ নিম্নে প্রদত্ত হইল, ঐ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর :—]

(i) 3 and 2 ; (ii) -5 and -4 ; (iii) 3 and $-\frac{9}{8}$;
(iv) -13 $\frac{13}{9}$; (v) $\frac{a}{b}$ and 1 ; (vi) $\frac{a}{b} \sec \alpha$ and $\frac{b}{a} \cos \alpha$.

6. Find the equations to the straight lines passing through the following pairs of points :—

[নিম্নের প্রত্যেক বিন্দুযুগলগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর :—]

(i) $(5, -2)$ and $(-3, 7)$; (ii) $(0, b)$ and $(-a, 0)$;

(iii) $(c \cos C, d \sin C)$ and $(c \cos D, d \sin D)$;

(iv) $(\alpha p_1{}^2, 2\alpha p_1)$ and $(\alpha p_2{}^2, 2\alpha p_2)$;

(v) $(h \sec \alpha, k \tan \alpha)$ and $(h \sec \beta, k \tan \beta)$;

(vi) $(3, -4)$ and $(1, 2)$. [U. U, 1948]

7. Find the equations to the sides of the traingles whose vertices are given by :—

[নিম্নে প্রদত্ত শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর :—

(i) $(-4, 3), (7, -3)$ and $(5, 8)$;

(ii) $(-2, 5), (5, -2)$ and $(10, 10)$;

(iii) $(0, 0), (5, -2)$ and $(6, 9)$.

8. Reduce the following equations to the perpendicular form (i.e., $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$) :—

[নিম্নের সমীকরণগুলিকে লম্ব আকারে (অর্থাৎ $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ আকারে) পরিণত কর :—]

(i) $\sqrt{3}x + y = 8$ (ii) $x - y + 7\sqrt{2} = 0$

(iii) $x + y + 4 = 0$ (iv) $6x - 13y + 19 = 0$.

9. Find the lengths of the perpendiculars from the origin on the lines whose equations are given below :—

[মূলবিন্দু হইতে নিম্নে প্রদত্ত সরল রেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর :—

(i) $4x + 3y - 5 = 0$; (ii) $5x - 12y = 26$;

(iii) $2x + 3y + 7 = 0$; (iv) $by \cos \theta - ax \sin \theta + ab = 0$

10. Find the equation to a straight line :—

[নিম্নের প্রত্যেক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর :—]

(*a*) which is inclined at 60° to the x-axis and cuts the axis of y at unit distance from the origin ;

[সরলরেখাটি x-অক্ষের সহিত 60° কোণে নত এবং মূলবিন্দু হইতে এক একক দূরে y-অক্ষকে ছেদ করিয়াছে।]

(*b*) which is inclined at 120° to the axis of x and the length of the perpendicular on the line from the origin is 5 ;

[সরলরেখাটি x-অক্ষের সহিত 120° কোণে নত এবং মূলবিন্দু হইতে উহার লম্ব-দূরত্ব 5.]

(*c*) which passes through the point (5, −7) and makes equal intercepts on the axes of co-ordinates ;

[সরলরেখাটি (5, −7) বিন্দু দিয়া গিয়া অক্ষদ্বয় হইতে দুই সমান অংশ ছিন্ন করিয়াছে।]

(*d*) which is inclined at an angle of 45° to the axis of x and which bisects the join of the points (4, 7) ; and (6, 5) ;

[সরলরেখাটি x-অক্ষের সহিত 45° কোণে নত এবং (4, 7) ও (6, 5) বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার সমদ্বিখণ্ডক।]

(*e*) which passes through the point (5, 6) and has intercepts on the axes equal in magnitude but opposite in sign ;

Find also the co-ordinates of the point at which the ordinate is double the abscissa ; [C. U. 1934]

[রেখাটি (5, 6) বিন্দুগামী এবং উহা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ দুইটি সমান ও পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত। উহার যে বিন্দুতে কোটি ভুজের দ্বিগুণ তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।]

(*f*) which passes through the point (−4, 9) and is such that the portion of it intercepted between the axes is divided at the point in the ratio 3 : 2 ;

[রেখাটি (−4, 9) বিন্দুগামী এবং অক্ষদ্বয়ের মধ্যে উহার ছেদিতাংশ ঐ বিন্দুতে 3 : 2 অনুপাতে বিভক্ত।]

(*g*) which passes through the point (a, b) and is such that the portion of it intercepted between the axes is bisected at this point ;

[রেখাটি (a, b) বিন্দুগামী এবং অক্ষদ্বয়ের মধ্যে উহার ছেদিতাংশ ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত।]

(*h*) which passes through the point (2, 3) and is parallel to the line joining the points (4, −7) and (−7, 4) ;

[রেখাটি (2, 3) বিন্দুগামী এবং (4, −7) ও (−7, 4) বিন্দুগামী সরলরেখার সমান্তরাল।]

(*i*) which is the perpendicular bisector of the segment joining the points (2a, 2b) and (2c, 2d). [C. U. 1958]

[রেখাটি (2a, 2b) ও (2c, 2d) বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।]

11. Verify that the three points (1, 5) (3, 14) and (−1, −4) are collinear. Also, find the line of collinearity. [C. U. 1957]

[দেখাও যে (1, 5), (3, 14) ও (−1, −4) বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং রেখাটি নির্ণয় কর।]

12. Find the equations to the straight lines which pass through the origin and trisect the portion of the straight line $4x+3y=12$ intercepted between the axes of co-ordinates.

[যে সরলরেখা দুইটি মূলবিন্দু দিয়া যায় এবং অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী $4x+3y=12$ রেখার অংশকে সমত্রিখণ্ডিত করে তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।]

13. Find the equation of the straight line which passes through the point (2, 3) and is such that the sum of its intercepts on the axes is 10.

[(2, 3) বিন্দুগামী যে সরলরেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশদ্বয়ের সমষ্টি 10, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।]

14. Given the triangle A≡(8, 2), B≡(−2, 7), C≡(−2, −1). Find the equation of the median through A. [Mysore. 1946]

Also, prove that the join of the middle points of AB and AC is parallel to BC.

[ত্রিভুজ A≡(8, 2), B≡(−2, 7), C≡(−2, −1) প্রদত্ত। A বিন্দুগামী উহার মধ্যমার সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রমাণ কর যে, AB ও AC-র মধ্যবিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাটি BC-র সমান্তরাল]

15. A straight line moves such that the sum of the reciprocals of its intercepts on the axes is constant. Prove that the line passes through a fixed point. [Bombay, 1935]

[একটি সরলরেখা এরূপে গতিশীল যে উহার সর্ব অবস্থানে উহা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ দুইটির অন্যোন্যকের সমষ্টি ধ্রুবক। প্রমাণ কর যে রেখাটি একটি স্থির বিন্দু দিয়া যায়।]

16. Find the equations of the tangents to the circle, whose centre is at the origin and radius equal to 3, at the extremities of a diameter making an angle of 60° with the axis of x.

[একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 এবং কেন্দ্রটি মূলবিন্দুতে অবস্থিত। উহার যে ব্যাস x-অক্ষের সহিত 60° কোণে নত তাহার প্রান্তদ্বয়ে বৃত্তের স্পর্শক দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।]

17. Find the equation to the straight line which passes through the point (7, 8) and has intercepts on the axes equal in magnitude but opposite in sign. Find also the co-ordinates of the point at which the ordinate is double the abscissa,

[(7, 8) বিন্দুগামী একটি সরলরেখা কর্তৃক অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ দুইটি সমান ও পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত। উহার সমীকরণ এবং যে বিন্দুতে কোটি ভুজের দ্বিগুণ তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।]

18. Find the equation of the straight line, which cuts off an intercept -3 from the y-axis and is inclined at an angle of 45° to the positive direction of the x-axis.

Draw a sketch of the straight line and show from geometrical consideration that this line is at right angles to the straight line $x+y=2$. [C. U. 1939]

[x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত 45° কোণে নত যে সরলরেখা দ্বারা y অক্ষের ছেদিতাংশ -3, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

ঐ সরলরেখার চিত্র অঙ্কন করিয়া জ্যামিতির সাহায্যে প্রমাণ কর যে রেখাটি $x+y=2$ সরলরেখার সহিত সমকোণে নত।]

19. (*a*) Find the inclination of the straight line $4x+5y+3=0$ to the axis of x and find its intercept on y-axis.

[(*a*) x-অক্ষের সহিত $4x+5y+3=0$ সরলরেখার নতি ও y-অক্ষ হইতে ছিন্নাংশ নির্ণয় কর।]

(*b*) The straight line $3x+y-6=0$ cuts the axes at P and Q. Find the distance between P and Q.

[$3x+y-6=0$ সরলরেখা অক্ষদ্বয়কে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ঐ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব কত ?]

(*c*) Find the lengths of the intercepts made on the axes by the line $\frac{x}{2}+3y=1$,

[$\frac{x}{2}+3y=1$ রেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।]

(*d*) P is a point on the line $x=y$. Another line passing through P makes intercepts a and b on the axes. Show that for all positions of the second line $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ is constant.

[$x=y$ রেখার উপর P একটি বিন্দু। ঐ P বিন্দুগামী অন্য একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয় হইতে a ও b অংশদ্বয় ছেদ করে। প্রমাণ কর যে ঐ দ্বিতীয় রেখার সকল অবস্থানে $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ ধ্রুবক হইবে।]

20. Perpendiculars are drawn from the origin to the lines $x+2y-3=0$ and $2x+3y=5$. Find the equation of the straight line joining the feet of the perpendiculars.

[মূলবিন্দু হইতে $x+2y-3=0$ ও $2x+3y=5$ রেখা দুইটির উপর লম্ব টানা হইয়াছে। উহাদের পাদবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।]

21. Transform to parallel axes through the point $(-2, 1)$ the equations :

$$\text{(i)} \quad x^2-4y+4x+8=0$$

$$\text{and (ii)} \quad 2x^2+3y^2-4x+3y-8=0.$$

[নিম্নের প্রত্যেক সমীকরণকে $(-2, 1)$ বিন্দু দিয়া সমান্তরাল অক্ষদ্বয়ে পরিবর্তিত কর :—

(i) $x^2-4y+4x+8=0$

(ii) $2x^2+3y^2-4x+3y-8=0$.]

22. What will the equation $x^2+y^2-2x+3y+4=0$ become, if the origin is moved to the point $(3, 0)$?

[যদি মূলবিন্দুকে $(3, 0)$ বিন্দুতে সরান হয়, তবে $x^2+y^2-2x+3y+4=0$ সমীকরণের পরিণতি কি হইবে ?]

23. What does the equation $(x+a)^2+(y-b)^2=c^2$ become, when it is transferred to parallel axes through the point $(-a+c, b)$?

[$(x+a)^2+(y-b)^2=c^2$ সমীকরণকে $(-a+c, b)$ বিন্দু দিয়া অঙ্কিত সমান্তরাল অক্ষদ্বয়ে স্থানান্তরিত করিলে উহার আকার কি হইবে ?]

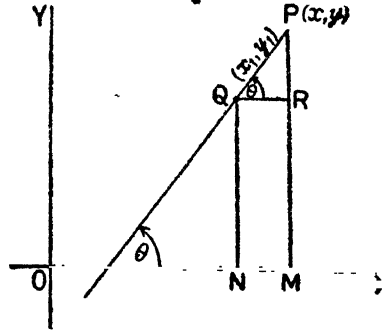
Straight lines

21. সুসমঞ্জস আকারে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of a straight line in symmetrical orm.]

মনে কর, প্রদত্ত Q (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত θ কোণে নত আছে।

ঐ সরলরেখার উপর যে-কোন বিন্দু P (x, y) লও।

এখন 13নং অনুচ্ছেদ অনুসারে সরলরেখাটির সমীকরণ হইবে

(চিত্র নং 23)

$y - y_1 = \tan\theta\,(x - x_1)$, বা $\dfrac{x - x_1}{\cos\theta} = \dfrac{y - y_1}{\sin\theta}$.

মনে কর, PQ $= r$, $\therefore$ QR $= r\cos\theta$,

বা, $x - x_1 = r\cos\theta$ [চিত্রানুসারে], $\therefore \dfrac{x - x_1}{\cos\theta} = r$.

আবার, PR $= r\sin\theta$, বা, $y - y_1 = r\sin\theta$, $\therefore \dfrac{y - y_1}{\sin\theta} = r$.

অতএব, $\dfrac{x - x_1}{\cos\theta} = \dfrac{y - y_1}{\sin\theta} = r \cdots (1)$ ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

(1) হইতে পাওয়া যায় $x = x_1 + r\cos\theta$ এবং $y = y_1 + r\sin\theta$.

[**দ্রষ্টব্য :** এই আকারে সমীকরণের বিশেষ সুবিধা এই যে, সরল রেখাস্থিত কোন প্রদত্ত বিন্দু হইতে নির্দিষ্ট দূরত্বে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করা যায়। আবার, প্রদত্ত দুইটি বিন্দুর মধ্যস্থিত সরলরেখা বরাবর দূরত্বও নির্ণয় করা যায়।]

উদাহরণ। P is a point (1, 2) and PQ makes an angle of 45 with the x-axis and PQ $= 3$. Find the co-ordinates of Q.

মনে কর, Q এর স্থানাঙ্ক (x, y).

সরলরেখাটি x-অক্ষের সহিত 45° কোণে নত আছে,

$\therefore$ সরলরেখার সমীকরণ হইবে $\dfrac{x-1}{\cos 45^\circ} = \dfrac{y-2}{\sin 45^\circ} = 3$,

$\therefore\ x - 1 = 3\cos 45^\circ = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $\therefore\ x = \dfrac{3}{\sqrt{2}} + 1$;

এবং $y-2=3\sin 45^\circ=\frac{3}{\sqrt{2}}$, $\quad y=\frac{3}{\sqrt{2}}+2.$

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক হইল $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+1, \frac{3}{\sqrt{2}}+2\right)$.

22. দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয়

(To find the angle between two given straight lines.)

(*a*) মনে কর, সরলরেখা দুইটির সমীকরণ $y=m_1x+c_1$ ও $y=m_2x+c_2$ এবং উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ. সরলরেখা দুইটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত α ও β কোণ উৎপন্ন করিলে, $\tan\alpha=m_1$ ও $\tan\beta=m_2$ হইবে।

চিত্র হইতে দেখা যায় $\theta=\alpha-\beta$.

$\therefore \quad \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2},$$

সুতরাং $\theta=\tan^{-1}\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ ...(1)

ইহার দ্বারাই সরলরেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণটি পাওয়া গেল।

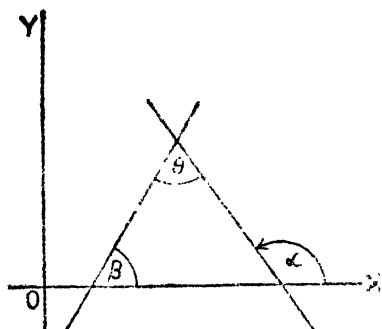
(চিত্র নং 24)

[দ্রষ্টব্য: যখন দুইটি সরলরেখা (এক সমকোণে না থাকিয়া) পরস্পর ছেদ করিবে, তখন উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের একটি সূক্ষ্মকোণ ও অপর কোণটি স্থূলকোণ হইবে। কোন অঙ্কে $\tan\theta$র মান ধনাত্মক হইলে বুঝিতে হইবে সূক্ষ্মকোণটি নির্ণীত হইল এবং $\tan\theta$র মান ঋণাত্মক পাওয়া গেলে বুঝিতে হইবে স্থূলকোণটি নির্ণীত হইয়াছে।]

(*b*) যখন সরলরেখা দুইটির সমীকরণ $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ হইবে, তখন উহাদিগকে $y=mx+c$ আকারে সাজাইয়া লইবে।

$$a_1x+b_1y+c_1=0, \quad \text{বা,} \quad y=-\frac{a_1}{b_1}x-\frac{c_1}{b_1},$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0, \quad \text{বা,} \quad y=-\frac{a_2}{b_2}x-\frac{c_2}{b_2}.$$

$$\therefore \quad m_1=-\frac{a_1}{b_1} \text{ এবং } m_2=-\frac{a_2}{b_2}.$$

$$\text{সুতরাং, } \tan\theta = \frac{-\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}}{1+\frac{a_1}{b_1}\times\frac{a_2}{b_2}} = \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}.$$

$$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2} \quad \cdots\cdots(2)$$

(*c*) মনে কর, সরলরেখা দুইটির সমীকরণ $x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 = p_1$ এবং $x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 = p_2$.

এক্ষেত্রে মূলবিন্দু হইতে সরলরেখাদ্বয়ের উপর যে দুইটি লম্ব অঙ্কিত হইবে তাহারা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত α_1 ও α_2 কোণে নত থাকিবে। সুতরাং স্পষ্টতঃই বুঝা যায়, সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$, বা $\theta = \pi - (\alpha_1 - \alpha_2)$ হইবে।

23. দুইটি সরলরেখা সমান্তরাল হইবার সর্ত।

(Condition of parallelism of two straight lines.)

সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হইলে $\alpha = \beta$ হইবে। $\therefore \quad \theta = \alpha - \beta = 0.$

অতএব, $\tan\theta = \tan 0° = 0.$

সুতরাং $m_1 - m_2 = 0$ [সমীকরণ (1) হইতে], বা $m_1 = m_2 \cdots$(A)

ইহাই সরলরেখাদ্বয়ের সমান্তরাল হইবার নির্ণেয় সর্ত।

সমীকরণ-(2) হইতে দেখা যায়, $a_2b_1 - a_1b_2 = 0$ হইলে সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল হইবে। অর্থাৎ নির্ণেয় সর্ত হইল $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \cdots\cdots$ (B)

উপরের নির্ণেয় সর্ত হইতে দেখা যায় যে উভয় সরলরেখার প্রবণতা gradient) সমান হইলে সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হয়।

[অনুচ্ছেদ 11 (i) দেখ]

24. দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হইবার সর্ত।

(Condition of perpendicularity of two straight lines.)

$$\cot\theta = \frac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$$ [24নং চিত্র দেখ]

এখন $\cot\alpha = \dfrac{1}{m_1}$ ও $\cot\beta = \dfrac{1}{m_2}$.

$$\therefore \quad \cot\theta = \frac{\frac{1}{m_1}\cdot\frac{1}{m_2}+1}{\frac{1}{m_2}-\frac{1}{m_1}} = \frac{1+m_1m_2}{m_1-m_2}.$$

এক্ষণে, $\theta=90^\circ$ হইলে, $\cot\theta=0$, $\therefore\ m_1m_2+1=0$,
বা, $m_1m_2=-1\cdots$(A) ইহাই নির্ণেয় সর্ত।

সমীকরণ-(2) হইতে অনুরূপে, $a_1a_2+b_1b_2=0\ldots$(B) সরলরেখাদ্বয়ের পরস্পর লম্ব হওয়ার সর্ত পাওয়া যায়।

[**অন্য নিয়ম**] 22 অনুচ্ছেদের চিত্র হইতে দেখা যায়, যখন $\theta=90^\circ$, তখন $\alpha=90^\circ+\beta$. $\therefore\ \tan\alpha=\tan(90^\circ+\beta)=-\cot\beta=-\dfrac{1}{\tan\beta}$.

সুতরাং $\tan\alpha\tan\beta=-1$, বা, $\underline{m_1m_2=-1}$.

25. কার্যকর নিয়ম।

$a_1x+b_1y+c_1=0$ সরলরেখাটি $a_2x+b_2y+c_2=0$ সরলরেখার সমান্তরাল হইবে যখন $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$ হইবে।

এখন, মনে কর, $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k$, $\therefore\ a_1=a_2k$ এবং $b_1=b_2k$.

a_1, b_1 এর মান প্রথম সমীকরণে বসাইয়া পাওয়া যায়

$$a_2kx+b_2ky+c_1=0,$$

$$\text{বা,}\quad a_2x+b_2y+\frac{c_1}{k}=0,$$

অর্থাৎ, $a_2x+b_2y+c'=0$ $\left[\text{এখানে } c'=\dfrac{c_1}{k} \text{ (ধ্রুবক)}\right]$

অতএব, দেখা যাইতেছে সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে পার্থক্য শুধু ধ্রুবক পদে।

যেমন ধর, একটি সরলরেখার সমীকরণ $7x-3y+1=0$ দেওয়া আছে। এই রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ হইবে $7x-3y+k=0$. এখন k-এর মান দ্বিতীয় কোন সর্ত হইতে নির্ণয় করিলেই উহা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হইবে।

নিয়ম ঃ কোন রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় করিবার সময় প্রদত্ত রেখার সমীকরণে শুধু ধ্রুবক পদটি পরিবর্তন করিবে।

আবার, উপরের সরলরেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হইবে যখন,

$a_1a_2+b_1b_2=0$, বা, $\dfrac{a_1}{b_1}=-\dfrac{b_2}{a_2}$ হইবে।

$\therefore\ a_1x+b_1y+c_1=0$, বা, $\dfrac{a_1}{b_1}x+y+\dfrac{c_1}{b_1}=0$,

বা, $-\frac{b_2}{a_2}x+y+\frac{c_1}{b_1}=0$, বা, $-b_2x+a_2y+\frac{c_1a_2}{b_1}=0$,

অর্থাৎ $-b_2x+a_2y+c'=0$ $\left[\text{ এখানে } c'=\frac{c_1a_2}{b_1} \text{ (ধ্রুবক) }\right]$

অতএব, দ্বিতীয় সমীকরণের x ও yএর সহগ দুইটি পরস্পর বিনিময় করিয়া উহাদের যে কোনটির চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া একটি ধ্রুবক পদ যোগ করিলেই উহা লম্ব হইবে এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ পাওয়া যাইবে। দ্বিতীয় কোন সর্ত ইহাতে আরোপ করিয়া ধ্রুবক পদটির মান নির্ণয় করিলেই সরলরেখাটি নির্দিষ্ট হইবে।

মনে কর, $2x+3y+1=0$ রেখার সহিত লম্ব সরলরেখার সমীকরণ বাহির করিতে হইবে।

এখানে x ও y-এর সহগ দুইটি বিনিময় করিলে $3x$ ও $2y$ হয়। এখন উহাদের যে কোন একটির চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া ধ্রুবক পদ যোগ করিতে হইবে; সুতরাং সমীকরণটি হইবে $3x-2y+k=0$.

নিয়ম: প্রদত্ত একটি সরলরেখার সহিত লম্বভাবে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিবার সময় x ও yএর সহগ দুইটি বিনিময় করিয়া উহাদের যে কোন একটির চিহ্ন পরিবর্তন করিবে এবং একটি নূতন ধ্রুবকপদ যোগ করিবে।

26. দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু নির্ণয়।

[To find the point of intersection of two given st. lines.]

মনে কর, প্রদত্ত সরলরেখা দুইটির সমীকরণ

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \cdots (1)$$

এবং $a_2x+b_2y+c_2=0 \ldots (2)$

সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দু উভয় সরলরেখার একটিমাত্র সাধারণ বিন্দু, সুতরাং ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হইবে।

মনে কর, ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β).

সুতরাং $a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0 \cdots (3)$

এবং $a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0 \cdots (4)$

এক্ষণে (3) ও (4) হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই,

$$\frac{\alpha}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{\beta}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

$\therefore \alpha=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$ এবং $\beta=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$, ইহাই নির্ণেয় স্থানাঙ্ক।

[দ্রষ্টব্য : ছেদবিন্দুর নির্দিষ্ট মান পাওয়ার সর্ত $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. কিন্তু যদি $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, বা, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ হয়, তবে সরলরেখা দুইটি অসীম দূরত্বে ছেদ করিবে। আবার দেখ, 23 অনুচ্ছেদে বর্ণিত দুইটি সরলরেখার সমান্তরাল হইবার সর্তও $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$. অতএব, দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা অসীমে পরস্পর ছেদ করে বলা যায়।]

27. দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of a straight line passing through the point of intersection of two given straight lines.]

মনে কর, প্রদত্ত সরলরেখা দুইটির সমীকরণ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \cdots (1)$$

এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0 \cdots (2)$

এক্ষণে, $a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \ldots (3)$ সমীকরণটি একধাত সমীকরণ বলিয়া উহা একটি সরলরেখার সমীকরণ। এখানে k যে-কোন ধ্রুবক হইতে পারে এবং উহার বিভিন্ন মান বিভিন্ন সরলরেখা প্রকাশ করিবে।

(1) ও (2) সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right).$$

এই স্থানাঙ্ক দ্বারা সমীকরণ-(3) সিদ্ধ হয়। অতএব, সরলরেখা-(3)টি (1) ও (2) সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যাইবে।

অতএব, সমীকরণ-(3) সরলরেখা (1) ও (2)-এর ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার নির্ণেয় সমীকরণ।

28. তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হইবার সর্ত নির্ণয়।

[To find the condition of concurrence of three straight lines.]

মনে কর, সরলরেখা তিনটির সমীকরণ যথাক্রমে

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \ldots (1),$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \cdots (2),$$

এবং $a_3x + b_3y + c_3 = 0 \ldots (3).$

(1) ও (2) সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},\ \frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right).$$

সমীকরণ-(3) যদি ঐ স্থানাঙ্ক দ্বারা সিদ্ধ হয়, তবে তৃতীয় সরলরেখাটি (1) ও (2) সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী হইবে অর্থাৎ তিনটি সরলরেখাই সমবিন্দু হইবে। অর্থাৎ যদি

$$a_3\times\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)+b_3\times\left(\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)+c_3=0 \text{ হয়,}$$

$$\therefore\ a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)=0\ldots(A).$$

ইহাই সরলরেখা তিনটির সমবিন্দু হইবার সর্ত।

(i) **ভিন্ন আকারে সর্ত।**

যদি p, q, r এমন তিনটি ধ্রুবক সংখ্যা পাওয়া যায় যে সমীকরণ (1), (2) ও (3)এর বামপক্ষের রাশিকে যথাক্রমে p, q ও r দ্বারা গুণ করিয়া গুণফল তিনটি যুক্ত করিলে আপনা হইতেই শূন্য হয়, তবে (1), (2) ও (3) দ্বারা যে তিনটি সরলরেখা সূচিত হইতেছে উহারা সমবিন্দু হইবে।

অর্থাৎ, যদি p, q, r-এর এমন তিনটি মান (মান তিনটি সমান হইতে পারে কিন্তু শূন্য নহে) পাওয়া যায় যে,

$$p(a_1x+b_1y+c_1)+q(a_2x+b_2y+c_2)+r(a_3x+b_3y+c_3)=0\cdots(B)$$

হয় (আপনা হইতেই), তবে (1), (2) ও (3) রেখাত্রয় সমবিন্দু হইবে ;

অর্থাৎ x, yএর মান যাহাই হউক না কেন, (B)এর বামপক্ষ শূন্য হইবে ; ইহা হইতে স্পষ্ট বুঝা যায় যে x ও yএর সহগ দুইটি এবং ধ্রুবকটির প্রত্যেকে পৃথক্ পৃথক্ ভাবে শূন্য হইবে।

মনে কর, সরলরেখা (1) ও (2)এর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β).

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad & a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0\\ \text{এবং}\quad & a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0\end{aligned}\right\}$$

সুতরাং $p(a_1\alpha+b_1\beta+c_1)+q(a_2\alpha+b_2\beta+c_2)$
$$+r(a_3\alpha+b_3\beta+c_3)=0$$

[কারণ, x, yএর যে-কোন মানেই (B) শূন্য হয়, কাজেই এক্ষেত্রে x, y-এর α, β মানেও (B) শূন্য হইবে।]

$$\therefore\quad a_3\alpha+b_3\beta+c_3=-\frac{p}{r}(a_1\alpha+b_1\beta+c_1)-\frac{q}{r}(a_2\alpha+b_2\beta+c_2)$$

$$=-\frac{p}{r}\times0-\frac{q}{r}\times0 \text{ (B হইতে পাওয়া যায়)}$$

$$=0.$$

অতএব সমীকরণ-(3) α, β দ্বারা সিদ্ধ হয় ; অর্থাৎ (1), (2) ও (3) রেখাত্রয় সমবিন্দু।

[**দ্রষ্টব্য :** তিনটি সরলরেখার সমীকরণ যখন এমনভাবে থাকে যে, দেখিলেই বুঝা যায়, p, q, rএর মান কি ধরিলে x, yএর সহগ দুইটি ও ধ্রুবক পদটি পৃথক্ পৃথক্ ভাবে আপনা আপনি শূন্য হয়, সেই সব ক্ষেত্রে সর্ত (B)এর উপযোগিতা খুব বেশী। অনেক ক্ষেত্রে দেখা যায় p, q, r প্রত্যেকটির মান এক ধরিলেই সর্তটি সিদ্ধ হয়। তবে যখন (1), (2) ও (3) সমীকরণ তিনটিতে x, y প্রভৃতির সহগগুলি 1, 2, 3 প্রভৃতি সংখ্যা দ্বারা দেওয়া থাকে, তখন এই সর্ত আরোপ করা উচিত নহে।

নিম্নের উদাহরণমালা লক্ষ্য করিলেই কার্যকর নিয়মগুলি বুঝিতে পারিবে।

উদাহরণমালা 4

উদা. 1. Find the equation of a straight line which passes through the point (3, −4) and is parallel to the straight line $2x+3y+4=0$

[(3, −4) বিন্দুগামী ও $2x+3y+4=0$ সরল রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।]

১ম নিয়ম। $2x+3y+4=0$ সরলরেখার সহিত সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ হইবে $2x+3y+k=0$.

এক্ষণে, ঐ সরলরেখা (3, −4) বিন্দুগামী বলিয়া

$$2\times 3+3\times -4+k=0, \quad \text{বা} \quad k=6.$$

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $2x+3y+6=0$.

২য় নিয়ম। (3, −4) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$$y+4=m(x-3)\ldots\ldots(1).$$

সরলরেখা $2x+3y+4=0\ldots(2)$এর gradient $=-\frac{2}{3}$.

এখন সরলরেখা-(1) সরলরেখা-(2)এর সমান্তরাল হইলে $m=-\frac{2}{3}$ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $y+4=-\frac{2}{3}(x-3)$, বা, $2x+3y+6=0$.

উদা. 2. Find the equation of a straight line which passes through the point (2, −1) and is perpendicular to the straight line $3x-2y=5$. [J. B. A.]

[(2, −1) বিন্দুগামী ও $3x-2y=5$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।]

১ম নিয়ম। এখানে প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ $3x-2y=5$.
ইহার উপর লম্ব যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $2x+3y+k=0$.
এক্ষণে ঐ সরলরেখা $(2,-1)$ বিন্দুগামী বলিয়া
$2\times2+3\times-1+k=0$, বা, $k=-1$.
অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $2x+3y-1=0$.

২য় নিয়ম। $(2,-1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ
$y+1=m(x-2)$......(1)
এখন সরলরেখা $3x-2y=5$......(2) এর gradient$=\frac{3}{2}$.

$\therefore$ সরলরেখা-(1) সরলরেখা-(2) এর উপর লম্ব হইতে হইলে $m\times\frac{3}{2}=-1$, বা $m=-\frac{2}{3}$ হইবে।

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ $y+1=-\frac{2}{3}(x-2)$, বা $2x+3y-1=0$.

উদা. 3. Find the equation of a straight line which passes through the point $(-3,-4)$ and is parallel to the straight line $x\cos 80^\circ+y\sin 80^\circ+7=0$.

[যে সরলরেখা $(-3,-4)$ বিন্দু দিয়া যায় এবং $x\cos 80^\circ+y\sin 80^\circ+7=0$ সরলরেখার সমান্তরাল তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।]

$x\cos 80^\circ+y\sin 80^\circ+7=0$ সরলরেখার সহিত সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ হইবে $x\cos 80^\circ+y\sin 80^\circ+k=0$

[অনুচ্ছেদ 16 অনুসিদ্ধান্ত (iii) দেখ]

এখন, এ সরলরেখা $(-3,-4)$ বিন্দুগামী বলিয়া
$-3\cos 80^\circ-4\sin 80^\circ+k=0$, বা $k=3\cos 80^\circ+4\sin 80^\circ$.
অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইবে

$$x\cos 80^\circ+y\sin 80^\circ+3\cos 80^\circ+4\sin 80^\circ=0,$$

অর্থাৎ, $(x+3)\cos 80^\circ+(y+4)\sin 80^\circ=0$.

উদা. 4. Find the equation of a straight line passing through the point (2, 1) and perpendicular to the straight line $x\cos 6^\circ+y\sin 6^\circ=3$.

$x\cos 6^\circ+y\sin 6^\circ=3$ সরলরেখার উপর লম্ব হইবে এমন যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $x\sin 6^\circ-y\cos 6^\circ+k=0$.

এখন ঐ সরলরেখা (2, 1) বিন্দুগামী বলিয়া $2\sin 6^\circ-\cos 6^\circ+k=0$.
বা, $k=\cos 6^\circ-2\sin 6^\circ$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইবে

$$x \sin 6^\circ - y \cos 6^\circ + \cos 6^\circ - 2 \sin 6^\circ = 0,$$

বা, $(x-2) \sin 6^\circ - (y-1) \cos 6^\circ = 0.$

উদা. 5. Find the equation to the perpendicular bisector of the segment joining the points (4,−5) and (−7, 3).

[(4, −5) ও (−7, 3) বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।]

এখানে, (4, −5) ও (−7, 3) বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার

প্রবণতা (gradient) $= \dfrac{-5-3}{4-(-7)} = -\dfrac{8}{11}.$

সুতরাং উহার উপর কোন লম্বের gradient হইবে $\frac{11}{8}$.

আবার, ঐ লম্ব (4, −5) ও (−7, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক অংশের মধ্যবিন্দুগামী।

এখন ঐ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক অংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{4-7}{2}, \frac{-5+3}{2}\right)$ বা $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$।

অতএব লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল $y+1 = \frac{11}{8}\left(x+\frac{3}{2}\right)$,

বা, $16y - 22x - 17 = 0.$

উদা. 6. If the straight line $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ passes through the point of intersection of the lines $2x - y = 1$ and $3x - 4y + 6 = 0$ and is parallel to the line $4x + 3y - 6 = 0$, find a and b.

[C. U. 1948]

[যদি $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ সরলরেখা $2x - y = 1$ ও $3x - 4y + 6 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যায় এবং $4x + 3y - 6 = 0$ রেখার সমান্তরাল হয়, তবে a ও b এর মান নির্ণয় কর।]

$2x - y = 1$ ও $3x - 4y + 6 = 0$ সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া $x = 2$, $y = 3$ পাওয়া যায়।

∴ ঐ দুই সরলরেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 3)। এখন $4x + 3y - 6 = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ হইবে $4x + 3y + k = 0$. যেহেতু ইহা (2,3) বিন্দুগামী ∴ $4 \times 2 + 3 \times 3 + k = 0$, বা, $k = -17$. অতএব, সরলরেখার সমীকরণ $4x + 3y - 17 = 0$; ইহাকে intercept

আকারে লিখিলে দাঁড়ায় $\frac{x}{\frac{17}{4}}+\frac{y}{\frac{17}{3}}=1$, ইহা $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$এর সহিত অভিন্ন রেখা হইতে হইলে $a=\frac{17}{4}$ ও $b=\frac{17}{3}$ হইবে। অতএব, $a=\frac{17}{4}$, $b=\frac{17}{3}$.

উদা. 7. Find the equation to the straight line which passes through the point (5, 4) and the point of intersection of the lines $2x+3y-1=0$ and $3x-4y+7=0$.

[যে সরলরেখা $2x+3y-1=0$ ও $3x-4y+7=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু ও (5, 4) বিন্দু দিয়া যায় তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।]

১ম নিয়ম। $2x+3y-1=0$ ও $3x-4y+7=0$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাওয়া যায় $x=-1$ ও $y=1$. ∴ উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-1, 1)$।

এখন, (5, 4) ও $(-1, 1)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া যে সরলরেখা যাইবে তাহার সমীকরণ হইবে

$$\frac{y-4}{4-1}=\frac{x-5}{5-(-1)}, \quad \text{বা,} \quad \frac{y-4}{3}=\frac{x-5}{6}, \quad \text{বা,} \quad x-2y+3=0.$$

∴ $x-2y+3=0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

২য় নিয়ম। $2x+3y-1=0$ ও $3x-4y+7=0$ এই দুই সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে

$2x+3y-1+k(3x-4y+7)=0$. ইহা (5, 4) বিন্দুগামী হইলে

$2.5+3.4-1+k(3.5-4.4+7)=0$ হইবে,

বা, $21+6k=0$, ∴ $k=-\frac{7}{2}$.

∴ নির্ণেয় সমীকরণ হইবে $2x+3y-1-\frac{7}{2}(3x-4y+7)=0$,

বা, $x-2y+3=0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা 8. Find the equation of the line through the point of intersection of the lines $4x+y-4=0$ and $3x+2y-5=0$ and perpendicular to the line $x-2y+1=0$.

[$4x+y-4=0$ ও $3x+2y-5=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $x-2y+1=0$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।]

১ম নিয়ম। $4x+y-4=0$ ও $3x+2y-5=0$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাওয়া যায় $x=\frac{3}{5}$, $y=\frac{8}{5}$.

∴ ঐ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{3}{5}, \frac{8}{5})$.

এখন, $x-2y+1=0$ সরলরেখার উপর লম্ব হইবে এমন যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $2x+y+k=0$.

যেহেতু, ইহা $(\frac{3}{5}, \frac{8}{5})$ বিন্দুগামী, $\therefore\ 2\times\frac{3}{5}+\frac{8}{5}+k=0$, $\therefore\ k=-\frac{14}{5}$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ $2x+y-\frac{14}{5}=0$ অর্থাৎ $10x+5y-14=0$.

২য় নিয়ম। $4x+y-4=0$ ও $3x+2y-5=0$; এই দুই সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $4x+y-4+k(3x+2y-5)=0$, বা $(3k+4)x+(2k+1)y-(4+5k)=0\cdots(1)$.

এক্ষণে (1)-সরলরেখাটি $x-2y+1=0$ রেখার উপর লম্ব হইবে যদি $(3k+4)\times 1+(2k+1)\times -2=0$ হয় [অনুচ্ছেদ 23 (B) দেখ]

অর্থাৎ যদি $k=2$ হয়।

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ হইল $4x+y-4+2(3x+2y-5)=0$,

বা, $10x+5y-14=0$.

উদা. 9. (*a*) Find the equation of the straight line passing through the intersection of the lines $x-2y-b=0$ and $x+3y-2b=0$ and parallel to the line $3x+4y=0$.

[$x-2y-b=0$ ও $x+3y-2b=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $3x+4y=0$ রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।]

১ম নিয়ম। $x-2y-b=0$ ও $x+3y-2b=0$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া যায় $\left(\frac{7b}{5}, \frac{b}{5}\right)$.

এখন $3x+4y=0$ রেখাটির সমান্তরাল যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $3x+4y+k=0$, ইহা $\left(\frac{7b}{5}, \frac{b}{5}\right)$ বিন্দুগামী বলিয়া

$$3\times\frac{7b}{5}+\frac{4b}{5}+k=0 \text{ হইবে, } \therefore\ k=-5b.$$

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $3x+4y-5b=0$.

২য় নিয়ম। $x-2y-b=0$ ও $x+3y-2b=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হয়

$$(x-2y-b)+k(x+3y-2b)=0$$

বা, $(k+1)x+y(3k-2)-b(2k+1)=0\cdots\cdots(1)$.

এখন (1) সরলরেখাটি $3x+4y=0$ রেখার সমান্তরাল হইবে

যখন $\frac{k+1}{3}=\frac{3k-2}{4}$ হইবে [অনুচ্ছেদ 23 (B) দেখ]

বা, $k=2$ হইবে।

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $(2+1)x+(6-2)y-b(4+1)=0$

বা, $3x+4y-5b=0$.

উদা. 9. (*b*) Find the lines through the point of intersection of $y-2x+2=0$ and $y-3x+5=0$, which are at a distance of $\frac{7}{\sqrt{2}}$ from the origin. [U.P.B. 1942]

[যে সরলরেখাগুলি $y-2x+2=0$ ও $y-3x+5=0$এর ছেদবিন্দু দিয়া যায় এবং মূলবিন্দু হইতে যাহাদের দূরত্ব $\frac{7}{\sqrt{2}}$, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।]

প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া পাই $x=3$ এবং $y=4$.

∴ ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 4). ঐ ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ হইল $(y-4)=m(x-3)$, বা $mx-y+(4-3m)=0$.

মূলবিন্দু (0, 0) হইতে ঐ সরলরেখার লম্বদূরত্ব $=\frac{4-3m}{\sqrt{1+m^2}}$

এক্ষেত্রে, $\frac{4-3m}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}$, বা, $\frac{16+9m^2-24m}{1+m^2}=\frac{49}{2}$,

বা, $31m^2+48m+17=0$, বা, $(31m+17)(m+1)=0$,

$\therefore \quad m=-1$, বা $-\frac{17}{31}$.

$m=-1$ হইলে সমীকরণটি হইবে $y-4=-1(x-3)$, বা $x+y=7$;

এবং $m=-\frac{17}{31}$ হইলে সমীকরণটি হইবে $y-4=-\frac{17}{31}(x-3)$,

বা, $31y+17x=175$.

∴ নির্ণেয় সমীকরণ $x+y=7$ এবং $17x+31y=175$.

উদা. 10. (*a*) Prove that the lines $2x-y+8=0$, $3x+y+2=0$ and $4x+3y-4=0$ are concurrent.

[প্রমাণ কর যে $2x-y+8=0$, $3x+y+2=0$ ও $4x+3y-4=0$ রেখাগুলি সমবিন্দু।]

$2x-y+8=0$ ও $3x+y+2=0$ সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া গেল $(-2, 4)$।

এখন, যদি $(-2, 4)$ বিন্দু দ্বারা $4x+3y-4=0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, তবে তৃতীয় সরলরেখাও প্রথম দুইটির ছেদবিন্দুগামী হইবে, অর্থাৎ তিনটি সরলরেখাই সমবিন্দু হইবে।

এক্ষণে, $4x+3y-4=4(-2)+3(4)-4=-8+12-4=0$.

অতএব, দেখা গেল তৃতীয় সমীকরণটি $(-2, 4)$ দ্বারা সিদ্ধ হইল।

সুতরাং, তিনটি সরলরেখাই সমবিন্দু।

উদা. 10.(*b*). Prove that the straight lines $(b+c)x+ay-d=0$ $(c+a)x+by-d=0$ and $(a+b)x+cy-d=0$ are concurrent.

এখানে $(b+c)x+ay-d=0 \ldots(1)$

$(c+a)x+by-d=0 \ldots(2)$

এবং $(a+b)x+cy-d=0 \ldots(3)$

(1), (2) ও (3) সরলরেখাত্রয় সমবিন্দু হইবে যদি p, q, r এমন তিনটি ধ্রুবক সংখ্যা পাওয়া যায়, যে

আপনা হইতেই $p\{(b+c)x+ay-d\}+q\{(c+a)x+by-d\}$
$+r\{(a+b)x+cy-d\}=0$ হয়...(A)

এখানে x-এর সহগ $p(b+c)+q(c+a)+r(a+b) \ldots(4)$

y-এর সহগ $pa+qb+rc$ ... ... (5)

এবং ধ্রুবক পদ $(p+q+r)d$ ... ... (6)

এখন, p, q, r-এর মান এমন হওয়া চাই যে (4), (5) ও (6) প্রত্যেকটি রাশি পৃথক্ পৃথক্ ভাবে শূন্য হইবে।

স্পষ্টতঃই দেখা যাইতেছে, $p=b-c, q=c-a,$ এবং $r=a-b$ হইলে (4), (5) ও (6) প্রত্যেকেই শূন্য হয় অর্থাৎ (A)-ও তৎক্ষণাৎ শূন্য হয়।

অতএব, (1), (2) এবং (3) রেখাত্রয় সমবিন্দু।

উদা. 11. For what value of m will the lines $y=3x-1$, $2y=x+3$ and $3y=mx+4$ be concurrent ? [C. U. '40 and '55]

$y=3x-1$ ও $2y=x+3$ সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক পাই $(1, 2)$।

এখন, $3y=mx+4$, এই রেখাটি প্রথম দুইটি রেখার সহিত সমবিন্দু হইবে যখন তৃতীয় সমীকরণটি $(1, 2)$ বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ হইবে।

$$\therefore \quad 6=m+4, \quad \text{বা,} \quad m=2.$$

অতএব দেখা গেল তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হইবে যখন $m=2$ হইবে।

উদা. 12. Find the equation to the straight line which passes through the intersection of the straight lines $3x-4y+1=0$ and $5x+y-1=0$ and cuts off equal intercepts from the axes. [C. U. B.Sc. 1947]

[যে সরলরেখা $3x-4y+1=0$ ও $5x+y-1=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যায় এবং অক্ষদ্বয় হইতে সমান অংশদ্বয় ছিন্ন করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।]

$3x-4y+1=0$ ও $5x+y-1=0$ এই রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যাইবে এরূপ যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে

$$3x-4y+1+k(5x+y-1)=0,$$

$$\text{বা,}\quad (5k+3)x+(k-4)y-(k-1)=0\ldots(1)$$

ইহাকে ছেদিতাংশরূপ (intercept form) সমীকরণে সাজাইয়া পাওয়া যায় $\dfrac{x}{\dfrac{k-1}{5k+3}}+\dfrac{y}{\dfrac{k-1}{k-4}}=1.$

(1) সরলরেখাটি অক্ষদ্বয় হইতে সমান অংশ কাটিয়া লয়,

$$\therefore\ \frac{k-1}{5k+3}=\frac{k-1}{k-4},\ \text{বা,}\ 4k^2+3k-7=0,\qquad \therefore\ k=1,\ \text{বা}\ -\tfrac{7}{4}.$$

এখন দেখা যায় সমীকরণ-(1)এ $k=1$ বসাইলে ধ্রুবক পদ $k-1=0$ হয়, তাহাতে সরলরেখাটি মূলবিন্দুগামী হয় অর্থাৎ অক্ষদ্বয় হইতে কোন অংশই ছেদ করে না। সুতরাং এক্ষেত্রে $k=1$ হইতে পারে না।

অতএব, $k=-\frac{7}{4}$ ধরিয়া নির্ণেয় সমীকরণটি হইবে

$$(5\times-\tfrac{7}{4}+3)x+(-\tfrac{7}{4}-4)y-(-\tfrac{7}{4}-1)=0,$$

$$\text{বা,}\quad -\tfrac{23}{4}x-\tfrac{23}{4}y+\tfrac{11}{4}=0\ \text{অর্থাৎ}\ 23x+23y-11=0.$$

উদা. 13. Find the acute angle between the lines $2x+y-3=0$ and $x+3y+2=0$.

মনে কর, $2x+y-3=0$ ও $x+3y+2=0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণটি θ.

[22 (b) অনুচ্ছেদে, সূত্র (2)-তে দেখান হইয়াছে

$\theta=\tan^{-1}\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}$. এক্ষেত্রে কোণটি সূক্ষ্মকোণ,

$\therefore$ এমনভাবে a_1, b_1, a_2, b_2 মানগুলি লইতে হইবে যাহাতে $a_2b_1-a_1b_2$ ধনাত্মক হয়।]

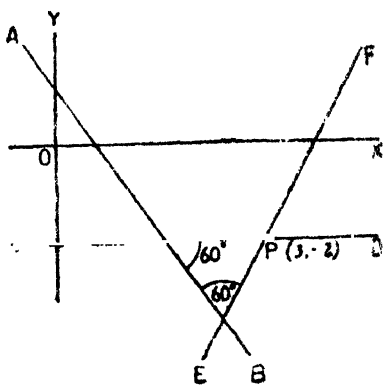
এখানে $\theta=\tan^{-1}\dfrac{2\times3-1\times1}{2\times1+3\times1}=\tan^{-1}1=45^\circ$

∴ নির্ণেয় কোণটি 45°.

উদা. 14. Find the equations to the straight lines which pass through (3, −2) and make an angle of 60° with the line $\sqrt{3}x+y=1$.

[যে সরলরেখাদ্বয় (3, −2) বিন্দু দিয়া যায় এবং $\sqrt{3}x+y=1$ রেখার সহিত 60° কোণ উৎপন্ন করে তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।]

[চিত্রে AB হইল সরলরেখা $\sqrt{3}x+y=1$, P হইল বিন্দু (3, −2), AB সরলরেখার সহিত 60° কোণ করিয়া CPD ও EPF দুইটি সরলরেখা আছে। ইহাদের সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে রাখিবে চিত্র অঙ্কন করিবার কোন প্রয়োজন নাই। কিভাবে দুইটি সরলরেখা প্রদত্ত সরলরেখার সহিত একই কোণে নত থাকে তাহা দেখাইবার জন্য চিত্র দেওয়া হইল।]

(চিত্র নং 25)

(3, −2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y+2=m(x-3)\cdots(1)$

যেহেতু (1)-রেখাটি, সরলরেখা $\sqrt{3}x+y=1$এর সহিত 60° কোণে নত আছে,

$$\tan 60^\circ=\frac{m-(-\sqrt{3})}{1+m(-\sqrt{3})}\cdots(\text{i}) \text{ এবং } \tan 60^\circ=\frac{-\sqrt{3}-m}{1+m(-\sqrt{3})}\cdots(\text{ii})$$

(i) হইতে পাওয়া যায়, $\sqrt{3}=\dfrac{m+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}m}$, ∴ $m=0$.

(ii) হইতে পাওয়া যায়, $\sqrt{3}=\dfrac{-m-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}m}$,

বা, $\sqrt{3}-3m=-m-\sqrt{3}$, ∴ $m=\sqrt{3}$.

এখন সমীকরণ-(1)-এ একবার $m=0$ ও আবার $m=\sqrt{3}$ বসাইয়া নির্ণেয় সমীকরণ পাওয়া যায়, $y+2=0$.

এবং $y+2=\sqrt{3}(x-3)$, বা $y-\sqrt{3}x+3\sqrt{3}+2=0$.

অতএব, $y+2=0$ এবং $y-\sqrt{3}x+3\sqrt{3}+2=0$ নির্ণেয় সমীকরণদ্বয়।

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে m-এর মান অজ্ঞাত। উহা $-\sqrt{3}$ হইতে বড় বা ছোট হইতে পারে।

$\therefore$ (i) ও (ii)তে m হইতে $-\sqrt{3}$ একবার বিয়োগ করা হইয়াছে এবং আর একবার $-\sqrt{3}$ হইতে m বিয়োগ করা হইয়াছে। ইহার ফলেই সম্ভাব্য দুইটি সরলরেখা পাওয়া গেল।

উদা. 15. Verify that the three lines $y=2$, $y-\sqrt{3}x=5$, $y+\sqrt{3}x=4$ form an equilateral triangle. [C. U. 1957]

Also, find the area of the triangle formed.

[প্রমাণ কর যে $y=2$, $y-\sqrt{3}x=5$ ও $y+\sqrt{3}x=4$ রেখাগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।]

সমীকরণ তিনটি $y=2$ ... (1)

$y=\sqrt{3}x+5$ ... (2)

এবং $y=-\sqrt{3}x+4$ ... (3)

সমীকরণ-(1) x-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা।

সমীকরণ-(2) এমন রেখা যাহার gradient $=\sqrt{3}$, সুতরাং $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ বলিয়া ইহা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত 60° কোণে নত।

সমীকরণ-(3) এমন একটি সরলরেখা যাহার gradient $=-\sqrt{3}$, সুতরাং ইহা x-এর ধনাত্মক দিকের সহিত 120° কোণে নত।

অতএব, (2) ও (3) সরলরেখাদ্বয় x-অক্ষের সমান্তরাল (1)-সরলরেখার সহিতও যথাক্রমে 60° ও 120° কোণে নত ; অর্থাৎ (2) ও (3) সরলরেখাদ্বয় পরস্পরের দিকে সরলরেখা-(1)-এর সহিত 60° কোণে নত।

দেখা যাইতেছে (1), (2) ও (3) সরলরেখা তিনটি দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের দুইটি কোণের প্রত্যেকটি $=60^\circ$, $\therefore$ উহার তৃতীয় কোণও 60° হইবে।

অতএব, ত্রিভুজটি সমবাহু ত্রিভুজ।

[এই অঙ্কটিতে (1), (2) ও (3)এর ছেদবিন্দু তিনটি বাহির করিয়া বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য সমান দেখাইয়াও ইহা একটি সমবাহু ত্রিভুজ প্রমাণ করা যায়।]

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য জানাই যথেষ্ট ; কারণ, সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ($a=$বাহুর দৈর্ঘ্য)।

এখানে, $y=2$ সরলরেখার সহিত (2) ও (3) সরলরেখাদ্বয় যে যে বিন্দুতে ছেদ করিবে তাহা স্থির করিতে (2) ও (3)-এ $y=2$ বসাইবে।

$\therefore$ (2) হইতে $x=-\sqrt{3}$ এবং (3) হইতে $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ পাওয়া যায়।

উভয় বিন্দুরই কোটি $=2$. সুতরাং, উভয় বিন্দুর দূরত্ব অর্থাৎ ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য $=\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}=\frac{2+3}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$.

অতএব, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{25}{12}\sqrt{3}$ বর্গ একক।

উদা. 16. Prove analytically that the perpendicular bisectors of the sides of any triangle are concurrent.

[স্থানাঙ্ক দ্বারা প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বসমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু।]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$।

BC বাহুর মধ্যবিন্দু D মনে কর। $\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইল

$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$ BC র gradient $\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}$.

সুতরাং BC-র লম্বসমদ্বিখণ্ডকের (অর্থাৎ D বিন্দুগামী ও BC-র উপর লম্বের)

সমীকরণ $y-\frac{y_2+y_3}{2}=-\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}\left(x-\frac{x_2+x_3}{2}\right)$

$$\left[\text{এখানে BC-র উপর লম্বের gradient } m=-\frac{1}{\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}}\right]$$

বা, $2x(x_2-x_3)+2y(y_2-y_3)-(x_2^2-x_3^2)-(y_2^2-y_3^2)=0\cdots(1)$

[সরল করিয়া]

অনুরূপে CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F ধরিয়া বাহু দুইটির লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ পাওয়া যায়

$2x(x_3-x_1)+2y(y_3-y_1)-(x_3^2-x_1^2)-(y_3^2-y_1^2)=0\cdots(2)$

এবং $2x(x_1-x_2)+2y(y_1-y_2)-(x_1^2-x_2^2)-(y_1^2-y_2^2)=0\cdots(3)$

(1), (2) ও (3) সমীকরণ তিনটির বামপক্ষ যোগ করিলেই শূন্য হয়। [অনুচ্ছেদ 28এর (B) অনুসারে এখানে $p=q=r=1$], সুতরাং (1), (2) ও (3) রেখা তিনটি সমবিন্দু।

অতএব, ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বসমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।

উদা. 17. Find the distance from (2, 3) measured along the line $3x-5y+9=0$ up to its point of intersection with $3x-2y=7$.

[(2, 3)-বিন্দু হইতে $3x-5y+9=0$ রেখা বরাবর $3x-2y=7$এর ছেদবিন্দু পর্যন্ত দূরত্ব নির্ণয় কর ।]

$3x-5y+9=0\cdots(1)$, বা, $y=\frac{3}{5}x+\frac{9}{5}$, $\therefore$ রেখাটির gradient $\frac{3}{5}$ অর্থাৎ, সরলরেখাটি x-অক্ষের সহিত θ কোণে নত থাকিলে, $\tan\theta=\frac{3}{5}$.

$$\therefore\ \frac{\sin\theta}{3}=\frac{\cos\theta}{5},\quad \therefore\ \frac{\sin^2\theta}{9}=\frac{\cos^2\theta}{25}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{9+25}=\frac{1}{34}$$

$$\therefore\ \frac{\sin\theta}{3}=\frac{\cos\theta}{5}=\frac{1}{\sqrt{34}};$$

সুতরাং $\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{34}}$ এবং $\cos\theta=\dfrac{5}{\sqrt{34}}$.

এখন মনে কর, (2,3) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$$\frac{x-2}{\cos\theta}=\frac{y-3}{\sin\theta}=r$$

[(2, 3) বিন্দু হইতে রেখা-(1) ও $3x-2y=7$ রেখার ছেদবিন্দু P (x, y) এর দূরত্ব $=r$; অনুচ্ছেদ 21 দেখ ।]

$\therefore\ x=2+r\cos\theta$ এবং $y=3+r\sin\theta$,

বা, $x=2+\dfrac{5}{\sqrt{34}}r$ এবং $y=3+\dfrac{3}{\sqrt{34}}r$.

এক্ষণে, P বিন্দুটি $3x-2y=7$ এরও একটি বিন্দু হওয়ায়

$$3\left(2+\frac{5r}{\sqrt{34}}\right)-2\left(3+\frac{3r}{\sqrt{34}}\right)=7,$$

বা, $6+\dfrac{15}{\sqrt{34}}r-6-\dfrac{6}{\sqrt{34}}r=7$, বা, $\dfrac{9}{\sqrt{34}}r=7$,

$\therefore\ r=\frac{7}{9}\sqrt{34}$, ইহাই নির্ণেয় দূরত্ব ।

[এখানে সমীকরণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিয়া ঐ ছেদবিন্দু হইতে (2, 3) এর দূরত্ব নির্ণয় করিলেও হইত ।]

উদা. 18. Show that the distance of the point (x_0, y_0) from the line $ax+by+c=0$ measured parallel to a line making an angle θ with x-axis is $-\dfrac{ax_0+by_0+c}{a\cos\theta+b\sin\theta}$. [C. U. 1954]

[প্রমাণ কর যে, x-অক্ষের সহিত θ কোণে নত সরলরেখা বরাবর আসিলে $ax+by+c=0$ হইতে (x_0, y_0) বিন্দুর দূরত্ব হয় $-\dfrac{ax_0+by_0+c}{a\cos\theta+b\sin\theta}$.]

x-অক্ষের সহিত θ কোণে নত সরলরেখার সমান্তরাল (x_0, y_0) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y-y_0=\tan\theta(x-x_0)$

$$\text{বা,}\quad \frac{x-x_0}{\cos\theta}=\frac{y-y_0}{\sin\theta}\ldots\ldots(1)$$

এখানে (1)-রেখা বরাবর (x_0, y_0) হইতে $ax+by+c=0$ রেখার দূরত্ব $=r$ ধরিলে পাওয়া যায় $\frac{x-x_0}{\cos\theta}=\frac{y-y_0}{\sin\theta}=r.$

$$\therefore\quad x=x_0+r\cos\theta \text{ এবং } y=y_0+r\sin\theta.$$

যেহেতু (x_0, y_0) বিন্দুটি $ax+by+c=0$ সরলরেখারও একটি বিন্দু.

স্তরাং, $a(x_0+r\cos\theta)+b(y_0+r\sin\theta)+c=0,$

$$\text{বা,}\quad r(a\cos\theta+b\sin\theta)=-(ax_0+by_0+c),$$

$$r=-\frac{ax_0+by_0+c}{a\cos\theta+b\sin\theta}$$

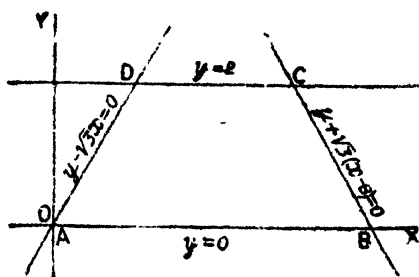
19. Verify that the four lines $y=0$, $y+\sqrt{3}(x-8)=0$ $y=2$ and $y-\sqrt{3}x=0$ form a trapezium, which is cyclic.

Find the co-ordinates of the four vertices and also the area of the trapezium.

[প্রমাণ কর যে, $y=0$, $y+\sqrt{3}(x-8)=0$, $y=2$ ও $y-\sqrt{3}x=0$ রেখা চারিটি একটি বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ম গঠন করে ; উহার শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক এবং উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।]

সমীকরণগুলি $y=0\cdots(1)$, $y+\sqrt{3}(x-8)=0\cdots\cdots(2)$,
$y=2\cdots(3)$ এবং $y-\sqrt{3}x=0.\cdots\cdots(4)$

এখানে, সমীকরণ-(1) হইল x-অক্ষ এবং সমীকরণ-(3) হইল x-অক্ষ হইতে 2 একক দূরে x-অক্ষের সহিত সমান্তরাল রেখা।

সমীকরণ (2) ও (4)-এর gradient বা mএর মান যথাক্রমে $-\sqrt{3}$ ও $\sqrt{3}$; স্তরাং এই দুই সরলরেখা x-অক্ষের সহিত অর্থাৎ $y=0$ সরলরেখার সহিত যথাক্রমে 120° ও 60° কোণে নত।

(চিত্র নং 26)

সুতরাং ইহারা $y=2$ রেখার সহিতও $120°$ ও $60°$ কোণে নত আছে। অতএব (1), (2), (3) ও (4) রেখা চতুষ্টয় দ্বারা উৎপন্ন চতুর্ভুজটির দুইটি বাহু সমান্তরাল ও অপর বাহু দুইটি তির্যক হওয়ায় চতুর্ভুজটি একটি ট্রাপিজিয়ম।

আবার, যেহেতু তির্যক বাহু দুইটি সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করিয়াছে সুতরাং ট্রাপিজিয়মটি বৃত্তস্থ।

মনে কর, (1) ও (4)-এর ছেদবিন্দু A, (1) ও (2)-এর ছেদবিন্দু B, (2) ও (3)-এর ছেদবিন্দু C এবং (3) ও (4)-এর ছেদবিন্দু D. [চিত্র দেখ]

(1) ও (4) সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া A বিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া গেল (0, 0),

(1) ও (2) সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া B বিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া গেল (8, 0),

(2) ও (3) সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া C বিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া গেল $\left(8-\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\right)$

এবং (3) ও (4) সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া D বিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া গেল $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\right)$.

$$\therefore \quad AB=8 \text{ এবং } CD=\sqrt{\left(8-\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+(2-2)^2}=8-\frac{4}{\sqrt{3}}$$

অতএব, ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}\times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি $\times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দূরত্ব

$$=\frac{1}{2}\left(8+8-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)\times 2=16-\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}(12-\sqrt{3}) \text{ বর্গ একক।}$$

20. Calculate the area of the triangle of which two vertices are (0, 0) and (9, 0) and the third vertex is the point of intersection of the lines $x+y-8=0$ and $7x-2y-2=0$.

[যে ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু (0, 0) ও (9, 0) এবং তৃতীয় শীর্ষবিন্দুটি $x+y-8=0$ ও $7x-2y-2=0$এর ছেদবিন্দু তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।]

মনে কর, দুইটি শীর্ষবিন্দু A(0,0) ও B(9,0), $\therefore$ AB বাহু $=9$ দৈর্ঘ্য একক।

তৃতীয় শীর্ষবিন্দু C ধরিলে $x+y-8=0$ ও $7x-2y-2=0$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া উহার স্থানাঙ্ক পাওয়া যায় (2, 6)। স্পষ্টতঃ C বিন্দু হইতে AB বাহুর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য C বিন্দুর কোটি 6.

অতএব, $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 9\times 6$ বর্গ একক $=27$ বর্গ একক।

Exercise 4

1. (*a*) Find the equation to the line parallel to the x-axis and passing through the point (4, 7).

[x-অক্ষের সমান্তরাল ও (4,7) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।]

(*b*) Find the equation to the line passing through the point (−3, 4) and parallel to the y-axis.

[(−3, 4) বিন্দুগামী ও y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।]

2. Find the angle between the lines :

(i) $2y-x=3$ and $y=\frac{1}{3}x+5$.

(ii) $y=2x+3$ and $3y=x+6$.

(iii) $ax-by+c=0$ and $(a-b)x-(a+b)y+c=0$.

(iv) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ and $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$.

(v) $x\cos 25^\circ+y\sin 25^\circ-7=0$ and $x\sin 25^\circ-y\cos 25^\circ+7=0$.

3. Find the co-ordinates of the point of intersection of the lines :

[নিম্নে প্রদত্ত রেখা দুইটির ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :—]

(i) $2x-3y+5=0$ and $7x+4y-3=0$ [Utkal, 1947]

(ii) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ and $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ [C. U. 1943]

(iii) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ and $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1$ [C. U. 1941]

Also find the equation to the straight line through the point of intersection and cutting both the axes at an angle of 45°.

[এক্ষেত্রে যে সরলরেখা এই ছেদবিন্দু দিয়া যায় এবং উভয় অক্ষের সহিত 45° কোণে নত থাকে, তাহারও সমীকরণ নির্ণয় কর।]

(iv) $x\cos\theta+y\sin\theta=p$ and $x\cos\phi+y\sin\phi=p$.

4. Find the equation to the straight line passing through :

[প্রদত্ত শর্তে নিম্নের প্রত্যেক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর :—]

(*a*) the point (3, 5) and parallel to the line $4x-3y+1=0$. [C. U. 1947]

[সরলরেখাটি (3, 5) বিন্দুগামী ও $4x-3y+1=0$ রেখার সমান্তরাল ।]

(*b*) the point (3, 4) and perpendicular to the line $4x-3y+1=0$. [C. U. 1956]

[সরলরেখাটি (3, 4) বিন্দুগামী ও $4x-3y+1=0$ রেখার উপর লম্ব ।]

(*c*) the point (3, 2) and the point of intersection of the lines $3x+y-5=0$ and $x+5y+3=0$. [C.U. 1942]

[সরলরেখাটি $3x+y-5=0$ ও $x+5y+3=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া ও (3, 2) বিন্দু দিয়া যায় ।]

(*d*) the point (1, 2) and the point of intersection of the lines $x+3y+1=0$ and $2x+7y+3=0$. [C. U. 1946]

[সরলরেখাটি (1,2) বিন্দু দিয়া এবং $x+3y+1=0$ ও $2x+7y+3=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যায় ।]

(*e*) the origin and the intersection of the straight lines $2x+3y=1$ and $x-y=2$. [C. U. 1933]

[সরলরেখাটি মূল বিন্দু দিয়া এবং $2x+3y=1$ ও $x-y=2$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যায় ।]

(*f*) the point of intersection of $25x+41y-8=0$ and $5x+7y+9=0$, and parallel to the lines $2x+3y+7=0$. [U. P. B. 1941]

[সরলরেখাটি $2x+3y+7=0$ রেখার সমান্তরাল এবং $25x+41y-8=0$ ও $5x+7y+9=0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়া যায় ।]

(*g*) the point of intersection of $x+2y=0$ and $y+4x+7=0$ and is perpendicular to the straight line $3x-y=0$. [C U. 1932]

[সরলরেখাটি $3x-y=0$ সরলরেখার উপর লম্ব এবং $x+2y=0$ ও $y+4x+7=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী ।]

(*h*) the point of intersection of the lines $x+2y+3=0$ and $3x+4y+7=0$ and perpendicular to the straight line $y-x=8$. [C. U. 1950 ; U. P. B. 1949]

[সরলরেখাটি $x+2y+3=0$ ও $3x+4y+7=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু দিয়া যায় এবং $y-x=8$ রেখার উপর লম্ব হয় ।]

(*i*) the origin and the point of intersection of the lines $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ and $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$. [U. P. B. 1948]

(*j*) the point of intersection of the lines $2x-3y+4=0$ and $3x+4y-5=0$, and perpendicular to the straight line $6x-7y+8=0$. [C. U. 1930, '44]

[সরলরেখাটি $2x-3y+4=0$ ও $3x+4y-5=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যায় এবং $6x-7y+8=0$ সরল রেখার উপর লম্ব হয়।]

(*k*) the point of intersection of the lines $2x-y+5=0$ and $x+y+1=0$ and the point of intersection of $2x+y-5=0$ and $x-y-7=0$.

5. Prove that the following sets of three lines are concurrent ; also find the respective points of concurrence.

[প্রমাণ কর যে নিম্নের প্রত্যেক ক্ষেত্রে সরলরেখা তিনটি সমবিন্দু এবং ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :—]

(*a*) $x+y+1=0$, $2x+3y+1=0$, $3x+4y+2=0$.

(*b*) $4x-3y-31=0$; $7x-5y-56=0$; $11x-9y-80=0$.

(*c*) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$; $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$; $x=y$.

(*d*) $ax+(b+c)y-d=0$; $bx+(c+a)y-d=0$; $cx+(a+b)y-d=0$.

(*e*) $2x-7y+11=0$; $3x-2y+1=0$; $x-12y+21=0$. [C. U. 1945]

6. (*a*) Find the value of p so that $3x+y-2=0$ $px+2y+3=0$ and $2x-y-3=0$ may be concurrent.

[p এর মান কত হইলে $3x+y-2=0$, $px+2y+3=0$ ও $2x-y-3=0$ সমবিন্দু হইবে ?]

(*b*) Find the value of k for which the three lines $2x-3y+k=0$, $3x-4y-1=0$ and $4x-5y-2=0$ may be concurrent.

[যদি $2x-3y+k=0$, $3x-4y-1=0$ ও $4x-5y-2=0$ রেখা তিনটি সমবিন্দু হয়, তবে k এর মান কত ?]

(*c*) Show that the line joining the origin to the point (2, 3) is concurrent with the straight lines $5x-3y=2$ and $x+y=10$. [Andhra. 1947]

[প্রমাণ কর যে মূলবিন্দু ও (2, 3) বিন্দু সংযোজক সরলরেখাটি $5x-3y=2$ ও $x+y=10$ সরলরেখাদ্বয়ের সহিত সমবিন্দু।]

(*d*) Verify that the three lines $x-y-7=0$, $x+2y+6=0$ and $2x+y-1=0$ pass through a common point and that this point is equidistant from $(5, -4)$, $(3, -2)$ and $(1, -6)$. [C. U. 1956]

[প্রমাণ কর যে $x-y-7=0$, $x+2y+6=0$ ও $2x+y-1=0$ একটি সাধারণ বিন্দু দিয়া যায় এবং ঐ বিন্দুটি $(5, -4)$, $(3, -2)$ ও $(1, -6)$ বিন্দুগুলি হইতে সমদূরবর্তী।]

7. Prove that the three lines given by $ax+by+c=0$, $bx+cy+a=0$ and $cx+ay+b=0$ will be concurrent if $a+b+c=0$.

[প্রমাণ কর যে $ax+by+c=0$, $bx+cy+a=0$ ও $cx+ay+b=0$ দ্বারা সূচিত রেখা তিনটি সমবিন্দু হইবে যদি $a+b+c=0$ হয়।]

8. Prove that the following pairs of lines are parallel :

(*a*) $3x+2y+5=0$ and $6x+4y-7=0$.

(*b*) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ and $bx+ay=c$.

9. Prove that the following pairs of lines are perpendicular to each other (পরস্পরের উপর লম্ব) :

(*a*) $4x-5y+7=0$ and $10x+8y+3=0$.

(*b*) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ and $\frac{2x}{5}-\frac{y}{2}=1$.

10. Find the equation of the straight line passing through the point $(3, 2)$ and the intersection of the lines $3x+y-5=0$ and $x+5y+3=0$. Find also the area of the triangle cut off from the co-ordinate axes by this line. [C. U. 1942]

[যে সরলরেখাটি $(3, 2)$-বিন্দু এবং $3x+y-5=0$ ও $x+5y+3=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যায় তাহার সমীকরণ এবং উহা দ্বারা অক্ষদ্বয় হইতে ছিন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।]

11. Find the equation of the line which divides internally the line joining $(-3, 7)$ to $(5, -4)$ in the ratio $4:7$ and is perpendicular to this line.

[একটি সরলরেখা $(-3, 7)$ ও $(5, -4)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার উপর লম্ব এবং উহাকে $4:7$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করিয়াছে। উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।]

12. Show that the area of the triangle formed by the straight lines whose equations are $y=m_1x+c_1$, $y=m_2x+c_2$ and $x=0$ is $\frac{1}{2}\cdot\frac{(c_1-c_2)^2}{m_2-m_1}$. [C. U. 1955]

[প্রমাণ কর যে $y=m_1x+c_1$, $y=m_2x+c_2$ ও $x=0$ সরলরেখা তিনটি দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}\cdot\frac{(c_1-c_2)^2}{m_2-m_1}$ হইবে।]

13. Show that the lines $(a+b)x+(a-b)y-2ab=0$, $(a-b)x+(a+b)y-2ab=0$ and $x+y=0$ form an isosceles triangle whose vertical angle is $2\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$

Determine the co-ordinates of its centroid. [C.U.]

[দেখাও যে $(a+b)x+(a-b)y-2ab=0$,

$(a-b)x+(a+b)y-2ab=0$ ও $x+y=0$ রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু এবং উহার শীর্ষকোণ $2\tan^{-1}(\frac{a}{b})$. উহার ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।]

14. (*a*) Prove that the diagonals of the parallelogram formed by the four straight lines $\sqrt{3}x+y=0$, $\sqrt{3}y+x=0$, $\sqrt{3}x+y=1$ and $\sqrt{3}y+x=1$ are at right angles to one another. [C. U. 1953]

[প্রমাণ কর যে $\sqrt{3}x+y=0$, $\sqrt{3}y+x=0$, $\sqrt{3}x+y=1$ ও $\sqrt{3}y+x=1$ সরলরেখা চারিটি দ্বারা উৎপন্ন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমকোণে ছেদ করে।]

(*b*) Prove that the diagonals of the parallelogram formed by the four straight lines $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ and $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=2$ are at right angles to one another. [C.U.]

[প্রমাণ কর যে $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ ও $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=2$ সরলরেখা চারিটি দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব।]

15. Find the equations to the straight lines :

(*a*) which pass through (3, 2) and are inclined at an angle of 45° to the straight line $x=2y+4$;

(*b*) passing through (7, 9) and inclined at an angle of 60° to the straight line $x-\sqrt{3}y-2\sqrt{3}=0$;

(*c*) which pass through the origin and are inclined at 75° to the straight line $x+y+\sqrt{3}(y-x)=a$;

(*d*) Find the equation to the line through the origin perpendicular to $x \cos\theta+y \sin\theta=p$.

[নিম্নের সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর :—

(*a*) রেখাটি (3, 2) বিন্দুগামী এবং $x=2y+4$ সরলরেখার সহিত 45° কোণে নত।

(*b*) রেখাটি (7, 9) বিন্দুগামী এবং $x-\sqrt{3}y-2\sqrt{3}=0$ সরলরেখার সহিত 60° কোণে নত।

(*c*) রেখাটি মূলবিন্দু দিয়া যায় এবং $x+y+\sqrt{3}(y-x)=a$ সরলরেখার সহিত 75° কোণ করে।

(*d*) রেখাটি মূলবিন্দুগামী এবং $x \cos\theta+y \sin\theta=p$এর উপর লম্ব।]

16. Through the point (3, 4) are drawn two straight lines each inclined at 45° to the straight line $x-y=2$. Find their equations and find the area included by the three lines.

[(3, 4) বিন্দু দিয়া অঙ্কিত দুইটি সরলরেখার প্রত্যেকটি $x-y=2$ সরলরেখার সহিত 45° কোণে নত আছে। উহাদের সমীকরণ এবং রেখা তিনটির অন্তর্গত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।]

17. Find the equations to the two straight lines which pass through the point (4, 5) and make equal angles with the two straight lines $3x=4y+7$ and $5y=12x+6$.

[(4, 5) বিন্দু দিয়া অঙ্কিত যে দুইটি সরলরেখা $3x=4y+7$ ও $5y=12x+6$এর সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।]

18. Two straight lines pass through the point $(-2, 5)$ such that one of them makes an angle of $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ with the given line $x-y+5=0$ and the given line makes an angle of $\tan^{-1}\frac{2}{3}$ with the other line. Find the equations to the two lines.

[$(-2, 5)$ বিন্দু দিয়া অঙ্কিত দুইটি সরলরেখার মধ্যে একটি প্রদত্ত $x-y+5=0$ রেখার সহিত $\tan^{-1}\frac{3}{4}$কোণে নত এবং প্রদত্ত রেখাটি অপরটির

সহিত $\tan^{-1} \frac{3}{4}$ কোণ করিয়াছে। ঐ অঙ্কিত রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।]

19. (*a*) Find the perpendicular distance from the origin of the perpendicular drawn from the point (1, 2) upon the straight line $x-\sqrt{3}y+4=0$.

[(1, 2)-বিন্দু হইতে $x-\sqrt{3}y+4=0$ সরলরেখার উপর লম্বের মূলবিন্দু হইতে লম্ব-দূরত্ব নির্ণয় কর।]

(*b*) Find the equations of two straight lines each 5 inches distant from the origin and inclined at an angle of 30° to the x-axis. What lengths do these lines intercept on the axes? [J. B. A.

[দুইটি সরলরেখার প্রত্যেকটি মূলবিন্দু হইতে 5 ইঞ্চি দূরবর্তী এবং x-অক্ষের সহিত 30° কোণে নত। উহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর। উহাদের দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ দুইটির দৈর্ঘ্য কত?]

20. (*a*) Find the distance from (3, 8) measured along the line $4x-3y+12=0$ to the point where this line intersects the line $4x+5y=60$.

[(3, 8)-বিন্দু হইতে $4x-3y+12=0$ রেখা বরাবর এবং উহার সহিত $4x+5y=60$ রেখার ছেদবিন্দু পর্যন্ত দূরত্ব কত?]

(*b*) Find the distance from the point (−2, 7) measured along the straight line $\frac{x}{12}+\frac{y}{6}=1$ up to its point of intersection with the line $y=x+2$.

[(−2, 7) বিন্দু হইতে $\frac{x}{12}+\frac{y}{6}=1$ সরলরেখা বরাবর উহার সহিত $y=x+2$ এর ছেদবিন্দু পর্যন্ত দূরত্ব নির্ণয় কর।]

21. Find the equation to the straight line which passes through the point P (4, 3) and is parallel to the line $5x-12y+7=0$; also determine the length intercepted on this line between the point P and the straight line $x+y=24$.

[$5x-12y+7=0$ রেখার সমান্তরাল P (4, 3) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ এবং P ও $x+y=24$ রেখার মধ্যবর্তী উহার ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।]

22. Find the area of the triangle, two of whose vertices are the points (3. 0) and (15, 0) and the third vertex is the point of intersection of the lines $4x+3y=0$ and $5x+4y-1=0$.

[যে ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু (3, 0) ও (15, 0) এবং তৃতীয় শীর্ষবিন্দুটি $4x+3y=0$ ও $5x+4y-1=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।]

23. Show that the lines $y=0$, $\sqrt{3}y+x-10=0$, $y=\sqrt{3}$ and $\sqrt{3}y-x=0$ form a cyclic trapezium. Calculate the co-ordinates of the vertices and also the area of the trapezium.

[প্রমাণ কর যে $y=0$, $\sqrt{3}y+x-10=0$, $y=\sqrt{3}$ ও $\sqrt{3}y-x=0$ রেখা চারিটি একটি বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ম উৎপন্ন করে। উহার কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।]

24. Find the equations to the diagonals of the rectangle the equations of whose sides are $x=a$, $x=a'$, $y=b$ and $y=b'$. [C. U. 1951]

[$x=a$, $x=a'$, $y=b$ ও $y=b'$ বাহুবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।]

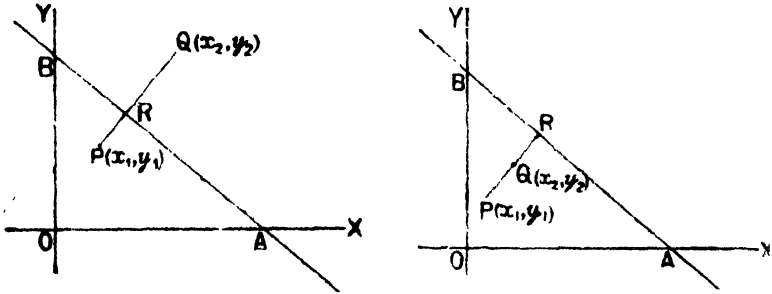
25. Show that the point of intersection of the straight lines $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ is the vertex of a square whose adjacent sides are along the axes of co-ordinates unless $a+b=0$. [C. U. 1952]

[প্রমাণ কর যে যদি না $a+b=0$ হয়, তবে $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ও $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুটি এরূপ একটি বর্গক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দু হইবে যাহার সংলগ্ন বাহুদ্বয় অক্ষদ্বয়ের উপর অবস্থিত।]

26. The equations of two sides of a square are $5x+12y-10=0$ and $5x+12y+29=0$, and another side passes through the pt. $(-3, 5)$. Find the equations of the remaining sides. [T. P. '69]

[কোন বর্গক্ষেত্রের দুইটি বাহুর সমীকরণ যথাক্রমে $5x+12y-10=0$ ও $5x+12y+29=0$ এবং অন্য একটি বাহু $(-3, 5)$ বিন্দুগামী। অবশিষ্ট বাহুদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।]

29. প্রদত্ত একটি সরলরেখার সম্পর্কে একটি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়।

[To find the position of a point in relation to a given straight line.]

(চিত্র নং 27)

মনে কর, প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ $ax+by+c=0$ এবং ইহা অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রথমতঃ মনে কর, P(x_1, y_1) ও Q(x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় AB রেখার উভয় পার্শ্বে আছে [প্রথম চিত্র]

PQ যুক্ত করিলে উহা যেন AB রেখাকে R বিন্দুতে ছেদ করিল। মনে কর, R বিন্দুতে PQ রেখা $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হইল অর্থাৎ $\frac{PR}{QR}=\frac{m}{n}$.

$\therefore$ R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$.

যেহেতু, R বিন্দু AB রেখার উপর অবস্থিত,

$$\therefore \quad a.\frac{mx_2+nx_1}{m+n}+b.\frac{my_2+ny_1}{m+n}+c=0,$$

বা, $\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}=-\frac{m}{n}$ [সরল করিয়া]......(1)

দ্বিতীয়তঃ মনে কর, P(x_1, y_1) ও Q(x_2, y_2) AB রেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত [দ্বিতীয় চিত্র]।

এখানে PQ যুক্ত করিয়া বর্ধিত করিলে ABকে R বিন্দুতে ছেদ করে।

সুতরাং PQ রেখা R বিন্দুতে $m : n$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত হইল মনে কর.

অর্থাৎ, $\frac{PR}{QR}=\frac{m}{n}$.

$\therefore$ R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$.

যেহেতু, R বিন্দু AB সরলরেখার উপর অবস্থিত,

$$\therefore \quad a.\frac{mx_2-nx_1}{m-n}+b.\frac{my_2-ny_1}{m-n}+c=0,$$

বা, $$\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}=+\frac{m}{n}$$ [সরল করিয়া]······(2)

যেহেতু $\frac{m}{n}$ ধনাত্মক, $\therefore$ $\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}$ অনুপাতটি (1)এ ঋণাত্মক এবং (2)এ ধনাত্মক। ইহা হইতে বেশ বুঝা গেল যে, প্রথম ক্ষেত্রে ax_1+by_1+c ও ax_2+by_2+c রাশি দুইটি বিপরীত চিহ্ন যুক্ত এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে উহারা একই চিহ্নযুক্ত হইবে।

অতএব, (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দুইটি $ax+by+c=0$ সরল রেখার একই পার্শ্বে থাকিবে যখন ax_1+by_1+c ও ax_2+by_2+c রাশি দুইটি একই চিহ্নযুক্ত হইবে। কিন্তু বিন্দু দুইটি বিপরীত পার্শ্বে থাকিলে, ঐ রাশি দুইটি বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

উদাহরণ 1. Find whether the given points P and Q lie on the same side or on the opposite sides of the given line L.

[নিম্নে প্রদত্ত P ও Q বিন্দু দুইটি প্রদত্ত L রেখার একই পার্শ্বে অথবা দুই বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত ?]

(a) P(2, 3), Q(−5, −2) and $L \equiv 4x-5y+9=0$.

(b) P(−1, 4), Q(2, −5) and $L \equiv 3x+y-2=0$.

(a) $4x-5y+9$ রাশিতে Pএর স্থানাঙ্ক (2, 3) বসাইয়া পাওয়া যায়,

$4\times2-5\times3+9=8-15+9=+2$ (ধনাত্মক)।

এবং $4x-5y+9$ রাশিতে Q-এর স্থানাঙ্ক (−5, −2) বসাইয়া পাওয়া যায়,

$4\times-5-5\times-2+9=-20+10+9=-1$ (ঋণাত্মক)।

রাশির মান দুইটি পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

$\therefore$ P ও Q বিন্দু দুইটি রেখা L এর দুই বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

(b) $3x+y-2$ রাশিতে Pএর স্থানাঙ্ক (−1, 4) বসাইয়া পাওয়া যায়,

$3\times-1+4-2=-3+4-2=-1$ (ঋণাত্মক)।

এবং $3x+y-2$ রাশিতে Qএর স্থানাঙ্ক (2, −5) বসাইয়া পাওয়া যায়,

$3\times2+(-5)-2=6-5-2=-1$ (ঋণাত্মক)।

রাশির মান দুইটি একই চিহ্নযুক্ত।

∴ P ও Q বিন্দু দুইটি রেখা L-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত।

অনুসিদ্ধান্ত : কোন একটি বিন্দু, প্রদত্ত সরলরেখার কোন পার্শ্বে আছে নির্ণয় করিতে সরলরেখার যে পার্শ্বে মূলবিন্দু আছে সেই পার্শ্বে অথবা তাহার বিপরীত পার্শ্বে বিন্দুটি আছে তাহাই নির্ণয় করা হয়।

ইহা করিতে হইলে সমীকরণের রাশিটিতে মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0) ও প্রদত্ত বিন্দুর স্থানাঙ্ক বসাইয়া রাশিটির চিহ্ন দেখিতে হয়। যখন উভয় ক্ষেত্রে একই চিহ্ন হয় তখন বলা হয় যে সরলরেখার যে পার্শ্বে মূলবিন্দু আছে সেই পার্শ্বে-ই বিন্দুটিও আছে (origin side) এবং যখন উভয় ক্ষেত্রে বিপরীত চিহ্ন হয় তখন বলা হয় বিন্দুটি, সরলরেখার যে পার্শ্বে মূলবিন্দু আছে তাহার বিপরীত দিকে আছে (non-origin side)।

উদাহরণ 2. Find whether the point $(-2, -7)$ is on the same side or opposite sides of the straight line $7y-24x=10$ as the origin.

[$7y-24x=10$ সরলরেখার যে পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত, $(-2, -7)$ বিন্দুটি সেই পার্শ্বে অথবা বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত তাহা নির্ণয় কর।]

এখানে $7y-24x-10$ রাশিতে (0, 0) বসাইয়া পাওয়া যায়,

$7\times0-24\times0-10=-10$ (ঋণাত্মক);

এবং $7y-24x-10$ রাশিতে $(-2, -7)$ বসাইয়া পাওয়া যায়,

$7\times(-7)-24\times(-2)-10=-49+48-10=-11$ (ঋণাত্মক)।

রাশির মান দুইটি একই চিহ্নযুক্ত।

∴ প্রদত্ত সরলরেখার যে পার্শ্বে মূলবিন্দু আছে বিন্দুটিও সেই পার্শ্বেই অবস্থিত।

30. বহিঃস্থ একটি বিন্দু হইতে প্রদত্ত একটি সরল রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয়।

[To find the length of the perpendicular let fall from a given point upon a given straight line.]

(*a*) **যখন সরল রেখার সমীকরণ : $ax+by+c=0$.**

(i) **প্রথম প্রণালী।**

মনে কর, প্রদত্ত $ax+by+c=0\cdots\cdots$(i) রেখার বহিঃস্থ একটি বিন্দু $P(x_1, y_1)$.

P হইতে সরলরেখা (i)-এর উপর PM লম্ব টান। মনে কর, M বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_2, y_2).

PM-এর দৈর্ঘ্য 'p_1'ই নির্ণেয় লম্ব-দূরত্ব।

সরল রেখা (i)-এর উপর লম্ব হইবে এমন যে কোন সরলরেখার সমীকরণ, $bx-ay+k=0$; ইহা (x_1, y_1) বিন্দুগামী বলিয়া $bx_1-ay_1+k=0$,

বা, $k=ay_1-bx_1$.

$\therefore$ PM-রেখার সমীকরণ, $bx-ay+ay_1-bx_1=0$.

বা, $b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$.

এই রেখাটি যেহেতু M (x_2, y_2) বিন্দুগামী,

$\therefore \quad b(x_2-x_1)-a(y_2-y_1)=0 \quad \cdots$(ii)

আবার, যেহেতু M (x_2, y_2) বিন্দুটি সরলরেখা (i)-এর উপর অবস্থিত,

$\therefore$ ঐ বিন্দু দ্বারা সমীকরণ (i) সিদ্ধ হইবে।

অর্থাৎ $ax_2+by_2+c=0$ ইহার উভয় পক্ষে $-ax_1-by_1$ যুক্ত করিয়া পাওয়া যায়,

$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c=-ax_1-by_1$

বা, $a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)=-(ax_1+by_1+c) \cdots\cdots$(iii)

(ii) ও (iii)-এর উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া যুক্ত কর—

$\therefore \quad (a^2+b^2)\{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\}=(ax_1+by_1+c)^2$,

বা, $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=\dfrac{(ax_1+by_1+c)^2}{a^2+b^2}$;

কিন্তু দূরত্ব PM $=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$\therefore \quad PM^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=\dfrac{(ax_1+by_1+c)^2}{a^2+b^2}$.

$\therefore \quad p_1=PM=\dfrac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \quad \cdots$(A).

$\therefore$ লম্বের নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $=\dfrac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \cdots\cdots$(A)

(ii) **দ্বিতীয় প্রণালী।**

মনে কর, $P(x_1, y_1)$ প্রদত্ত বিন্দু ও $LL_1 \equiv ax+by+c=0$ প্রদত্ত রেখা। এই রেখা x-অক্ষ ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

P বিন্দু হইতে LL_1 রেখার লম্ব-দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে।

ঐ লম্ব-দূরত্ব $= p_1$ ধর।

প্রদত্ত সমীকরণে পর্যায়ক্রমে $y=0$ ও $x=0$ বসাইয়া অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ

$OA = -\frac{c}{a}$ ও $OB = -\frac{c}{b}$ পাওয়া যায়। ['O' মূল বিন্দু।]

OAB সমকোণী ত্রিভুজের AB অতিভুজ,

$$\therefore \quad AB^2 = OA^2 + OB^2 = \left(-\frac{c}{a}\right)^2 + \left(-\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2b^2},$$

$$\therefore \quad AB = \pm\frac{c}{ab}\sqrt{a^2+b^2}.$$

PAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} AB \times p_1 = \pm\frac{c}{2ab}\sqrt{a^2+b^2} \times p_1 \cdots$(i)

আবার, P, A ও B বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে,

$(x_1, y_1), \left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ ও $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$;

$$\therefore \quad \triangle PAB = \frac{1}{2}\left[x_1\left\{0-\left(-\frac{c}{b}\right)\right\} + \left(-\frac{c}{a}\right)\left\{\left(-\frac{c}{b}\right) - y_1\right\} + 0(y_1 - 0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{cx_1}{b} + \frac{c^2}{ab} + \frac{cy_1}{a}\right] = \frac{c}{2ab}(ax_1 + by_1 + c) \cdots \text{(ii)}$$

$\therefore$ (i) ও (ii) হইতে পাওয়া যায়,

$$\pm\frac{c}{2ab}\sqrt{ab^2+b^2} \times p_1 = \frac{c}{2ab}(ax_1 + by_1 + c)$$

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় লম্ব-দূরত্ব } p_1 = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \cdots\cdots \text{(A)}$$

[**দ্রষ্টব্য :** লম্বের দৈর্ঘ্যই মাত্র যখন প্রয়োজন হইবে তখন হরের শুধু + চিহ্নই যথেষ্ট। গণিত শাস্ত্রের প্রচলিত নিয়ম অনুসারে, সরল রেখার অবস্থান যে কোন পাদেই হউক না কেন মূল বিন্দু হইতে ঐ রেখার লম্ব-দূরত্ব সতত ধনাত্মক হইবে। আবার, বিন্দুটি যখন সরলরেখার উপর অবস্থিত হয় তখন ঐ দূরত্ব শূন্য হয়। সুতরাং বিন্দুটি যখন সরল রেখার যে পার্শ্বে মূল বিন্দু আছে তাহার বিপরীত পার্শ্বে থাকিবে তখন সঙ্গত কারণেই আশা করা যায়, লম্বের দৈর্ঘ্যের চিহ্ন পরিবর্তিত হইয়া '—' ঋণাত্মক হইবে।

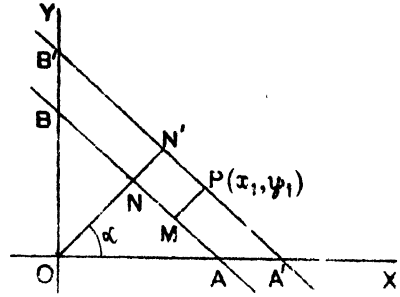
এই কারণেই লম্বের দৈর্ঘ্যের সহিত ± চিহ্ন আছে।]

(*b*) **যখন সরলরেখার সমীকরণ** $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$.

(চিত্র নং 28)

মনে কর, প্রদত্ত বিন্দু P (x_1, y_1) ও প্রদত্ত রেখা AB $\equiv x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$.

P হইতে AB-র লম্ব-দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে। চিত্র অনুসারে, ON রেখা x-অক্ষের সহিত α কোণে নত আছে। মনে কর, ON $= p$.

মনে কর, PM$\perp$AB ও PM $= p_1$.

P বিন্দুর মধ্য দিয়া AB-র সমান্তরাল করিয়া A′B′ টান। মনে কর, বর্ধিত ON রেখা A′B′কে N′ বিন্দুতে ছেদ করিল।

অঙ্কন অনুসারে, NN′ $=$ PM $= p_1$,

$$\therefore \quad ON' = p + p_1$$

এবং AB-র সমান্তরাল সরল রেখার সমীকরণ $x \cos \alpha + y \sin \alpha = ON'$,

কিন্তু ইহা (x_1, y_1) বিন্দুগামী হইলেই A′B′-এর সমীকরণ হইবে।

$\therefore$ A′B′-এর সমীকরণ হইবে, $x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha = p + p_1$,

$\therefore \quad p_1 = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p.$

আবার, p বিন্দুটি সরল রেখার যে পার্শ্বে মূল বিন্দু আছে সেই পার্শ্বে লইলে ON′ $=$ ON $-$ NN′ $= p - p_1$ হইবে।

সুতরাং তখন $p_1 = p - x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha$ হইবে।

অতএব, এক্ষেত্রেও $p_1 = \pm(x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p)$ ······(B)

উপরের সূত্র হইতেও (A) নিম্নলিখিতভাবে পাওয়া যায়।

$ax + by + c = 0 \cdots$(i)

$$\text{বা,} \quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

$\left[\text{প্রত্যেককে } \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ দ্বারা গুণ করিয়া।}\right]$

এখন রেখা-(i) ও $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ রেখা অভিন্ন বলিয়া পাওয়া যায়,

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ এবং } -p = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$P(x_1, y_1)$ বিন্দু হইতে নির্ণেয় লম্বের দৈর্ঘ্য

$$p_1 = \pm(x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p)$$
$$= \pm\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x_1 + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y_1 + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$
$$= \pm\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

31. দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of the st. line bisecting the angle between two straight lines.]

মনে কর, সরল রেখা দুইটি $AB \equiv a_1x+b_1y+c_1=0$

এবং $CD \equiv a_2x+b_2y+c_2=0$.

উহারা যেন পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

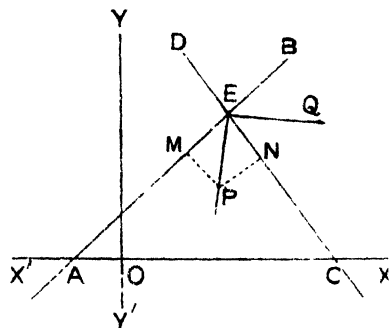
এখন AEC কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর যে কোন একটি বিন্দু $P(h, k)$ লওয়া হইল। সুতরাং উভয় রেখা হইতেই P বিন্দু সমদূরবর্তী। অর্থাৎ AB ও CD হইতে P-এর লম্ব-দূরত্ব PM ও PN-এর মান সমান হইবে।

(চিত্র নং 29).

চিত্র অনুসারে, মূল বিন্দু AEC কোণের মধ্যে অবস্থিত ; সুতরাং উভয় সরলরেখা AB ও CD-র যে পার্শ্বে মূল বিন্দু আছে, P বিন্দুও সেই পার্শ্বেই অবস্থিত। অতএব, এক্ষেত্রে উভয় লম্ব-দূরত্বের চিহ্ন + ধনাত্মক হইবে।

∴ AEC কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত সমস্ত বিন্দুর ক্ষেত্রেই

$$\frac{a_1h+b_1k+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \frac{a_2h+b_2k+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}},$$

আবার, BEC কোণের ক্ষেত্রে মূল বিন্দুটি কোণের মধ্যে অবস্থিত নহে। এই কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর যখন বিন্দুটি থাকিবে (চিত্রে Q বিন্দুর অবস্থানের মত) তখন মূল বিন্দু ও সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত বিন্দুটি একটি রেখার (এখানে AB) একই পার্শ্বে এবং অপর রেখার (এখানে CD) বিপরীত

পার্শ্বে থাকিবে। সুতরাং এক্ষেত্রে উভয় রেখা হইতে বিন্দুটির লম্ব-দূরত্বের মান সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

∴ এক্ষেত্রে BEC কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত সমস্ত বিন্দুর ক্ষেত্রেই $\dfrac{a_1h+b_1k+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=-\dfrac{a_2h+b_2k+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

অতএব, P (h, k) বিন্দুর সঞ্চারপথই হইবে প্রদত্ত রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ।

∴ সমদ্বিখণ্ডকের নির্ণেয় সমীকরণ হইল

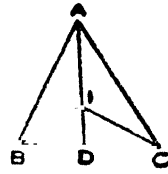
$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \quad \cdots\text{(C)}$$

32. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) ও (x_3, y_3) এবং উহার বিপরীত বাহুগুলি যথাক্রমে a, b, c হইলে ঐ ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয়।

[To find the co-ordinates of the in-centre of the $\triangle$ABC when the vertices are respectively (x_1, y_1), (x_2, y_2) and (x_3, y_3) and the opposite sides are a, b and c.]

ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি যথাক্রমে A$\equiv(x_1, y_1)$, B$\equiv(x_2, y_2)$ ও C$\equiv(x_3, y_3)$ এবং বাহু BC$=a$, বাহু CA$=b$ ও বাহু AB$=c$.

(চিত্র নং 30)

মনে কর, A কোণের সমদ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং B ও C কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর I বিন্দুতে ADতে মিলিত হইয়াছে। এখানে I-বিন্দুই ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র। I-বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে।

∵ $\angle$A-র সমদ্বিখণ্ডক AD, $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB}{AC}=$

∴ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{bx_2+cx_3}{b+c}, \dfrac{by_2+cy_3}{b+c}\right)$.

আবার, ABD ত্রিভুজের $\angle$B-এর সমদ্বিখণ্ডক BI,

∴ $\dfrac{AI}{DI}=\dfrac{AB}{BD}\cdots\cdots$(i)

এবং ACD ত্রিভুজের ∠C-এর সমদ্বিখণ্ডক CI,

$\therefore\quad \frac{AI}{DI}=\frac{AC}{CD}\cdots\cdots(ii)$

(i) ও (ii) হইতে পাওয়া যায়,

$$\frac{AI}{DI}=\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}=\frac{AB+AC}{BD+CD}=\frac{AB+AC}{BC}=\frac{c+b}{a}$$

$\therefore$ I-বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে,

$$\bar{x}=\frac{(c+b)\frac{(bx_2+cx_3)}{b+c}+ax_1}{c+b+a}=\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c},$$

এবং $$\bar{y}=\frac{(c+b)\frac{(by_2+cy_3)}{b+c}+ay_1}{c+b+a}=\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}.$$

অতএব, ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রের নির্ণেয় স্থানাঙ্ক হইল

$$\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)\cdots(D)$$

উদাহরণ। Find the in-centre (অন্তঃকেন্দ্র) of the triangle whose vertices are $(-1, -2)$, $(-1, 3)$ and $(11, -2)$.

এখানে $A\equiv(-1, -2)$, $B\equiv(-1, 3)$ ও $C\equiv(11, -2)$

$$a=BC=\sqrt{(-1-11)^2+(3+2)^2}=\sqrt{144+25}$$
$$=\sqrt{169}=13 \text{ একক।}$$

$$b=CA=\sqrt{(11+1)^2+(-2+2)^2}=\sqrt{144+0}$$
$$=12 \text{ একক।}$$

$$c=AB=\sqrt{(-1+1)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{0+25}$$
$$=5 \text{ একক।}$$

$\therefore$ অন্তঃকেন্দ্রের নির্ণেয় স্থানাঙ্ক হইল

$$\left(\frac{13\times-1+12\times-1+5\times11}{13+12+5}, \frac{13\times-2+12\times3+5\times-2}{13+12+5}\right)$$

বা, $(1, 0)$.

উদাহরণমালা 5

উদা. 1. Find the length of the perpendicular from the point (3, 1) on the line $5x-12y+1=0$.

সূত্রানুসারে লম্ব $p=\dfrac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. এখানে $a=5$, $b=-12$, $c=1$, $x_1=3$, $y_1=1$.

এক্ষেত্রে, লম্বটির দৈর্ঘ্য $=\dfrac{5\times3-12\times1+1}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{13^2}}=\dfrac{4}{13}$.

[**দ্রষ্টব্য :** এইভাবে লম্বের দৈর্ঘ্য বাহির করিবার সময় উহা কখনও কখনও ঋণাত্মক হইবে, তখন উহার ধনাত্মক মানটিকেই দৈর্ঘ্য ধরিবে।]

উদা. 2. Find the perpendicular distance of the point $(-3, -5)$ from the str. line $x-2y-5=0$. On which side of the straight line does the point lie ? Find the co-ordinates of the image of the above point with respect to the said straight line.

[সরলরেখা $x-2y-5=0$ হইতে $(-3, -5)$ বিন্দুর লম্ব দূরত্ব কত ? ঐ রেখার কোন্ পার্শ্বে ঐ বিন্দুটি অবস্থিত ? ঐ রেখাসম্পর্কে ঐ বিন্দুটির প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।]

$(-3, -5)$ বিন্দু হইতে $x-2y-5=0\cdots$(i) রেখার

লম্ব-দূরত্ব $=\dfrac{-3-2(-5)-5}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{10-8}{\sqrt{5}}=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$ একক।

এখানে লম্বের চিহ্ন '+' ধনাত্মক কিন্তু ধ্রুবকপদ '5'-এর চিহ্ন '−' ঋণাত্মক অর্থাৎ উহারা বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

অতএব, সরলরেখা (i)-এর যে পার্শ্বে মূলবিন্দু আছে প্রদত্ত বিন্দুটি তাহার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

রেখা-(i)-এর উপর লম্ব হইবে এমন যে কোন সরলরেখার সমীকরণ, $2x+y+k=0$. $\because$ ইহা $(-3, -5)$ বিন্দুগামী,

$\therefore\ 2(-3)+(-5)+k=0$ বা $k=11$.

অতএব, লম্ব-রেখার সমীকরণ, $2x+y+11=0\cdots$(ii)

এখন (i) ও (ii) সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া পাওয়া যায়,

$$x=-\frac{17}{5},\ y=-\frac{21}{5}.$$

অর্থাৎ $(-3, -5)$ বিন্দু হইতে রেখা-(i)-এর উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{17}{5}, -\frac{21}{5}\right)$

মনে কর, নির্ণেয় প্রতিবিম্ব-বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (α, β).

$\because$ প্রতিবিম্ব-বিন্দুটি সরলরেখার যে পার্শ্বে $(-3, -5)$ বিন্দু আছে তাহার বিপরীত পার্শ্বেও একই দূরত্বে থাকিবে, সুতরাং প্রদত্ত বিন্দু ও উহার প্রতিবিম্ব-বিন্দুর সংযোজক-রেখার মধ্যবিন্দু হইবে প্রদত্ত বিন্দু হইতে সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু।

$$\therefore \quad -\frac{17}{5} = \frac{-3+\alpha}{2}, \quad \text{বা,} \quad \alpha = -\frac{19}{5},$$

$$\text{এবং} \quad -\frac{21}{5} = \frac{-5+\beta}{2}, \quad \text{বা,} \quad \beta = -\frac{17}{5}.$$

অতএব, প্রতিবিম্ব-বিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক হইল $\left(-\frac{19}{5}, -\frac{17}{5}\right)$

উদা. 3. Find the equation of the straight line midway between the straight lines $9x+6y-7=0$ and $3x+2y+6=0$. [Mad. 1948]

[$9x+6y-7=0$ ও $3x+2y+6=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ঠিক মধ্যস্থলে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।]

[**দ্রষ্টব্য :** এরূপ প্রশ্নের সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হইবেই। এখন উভয় রেখা হইতে সমদূরবর্তী ও উহাদের সমান্তরাল রেখাই উদ্দিষ্ট রেখা হইবে। $\therefore$ প্রদত্ত রেখা দুইটি x-অক্ষকে বা y-অক্ষকে যে যে বিন্দুতে ছেদ করিবে উদ্দিষ্ট রেখাটি ঐ দুই বিন্দুর মধ্য বিন্দুগামী হইবে।]

$$9x+6y-7=0 \ldots \text{(i)} \quad \text{বা,} \quad y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{6}.$$

$\therefore$ রেখা-(i) y-অক্ষকে $\left(0, \frac{7}{6}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$$\text{আবার,} \quad 3x+2y+6=0 \cdots \text{(ii)} \quad \text{বা,} \quad y = -\frac{3}{2}x - 3.$$

$\therefore$ রেখা-(ii) y-অক্ষকে $(0, -3)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

ছেদবিন্দুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(0, \frac{\frac{7}{6}-3}{2}\right) \text{ বা, } \left(0, -\frac{11}{12}\right).$$

উদ্দিষ্ট রেখা (i) ও (ii) এর সমান্তরাল হইবে।

মনে কর, উহার সমীকরণ, $y=-\frac{3}{2}x+k$.

$\because$ ইহা $\left(0, -\frac{11}{12}\right)$ বিন্দুগামী, $\therefore \; -\frac{11}{12}=k$,

অতএব, নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $y=-\frac{3}{2}x-\frac{11}{12}$,

অর্থাৎ, $18x+12y+11=0$.

উদা. 4. Prove that the origin lies inside the triangle whose vertices are (2, 1), (3, −2) and (−4, −1).

[প্রমাণ কর যে মূলবিন্দুটি (2, 1), (3, −2) ও (−4, −1) শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজের ভিতরে অবস্থিত।]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে A(2, 1), B(3, −2) ও C(−4, −1).

$\therefore$ AB বাহুর সমীকরণ, $y-1=\frac{1-(-2)}{2-3}(x-2)$,

বা, $3x+y-7=0$.

BC বাহুর সমীকরণ, $y+2=\frac{-2-(-1)}{3-(-4)}(x-3)$

বা, $x+7y+11=0$.

এবং CA বাহুর সমীকরণ, $y+1=\frac{-1-1}{-4-2}(x+4)$,

বা, $x-3y+1=0$.

এখন, A (2, 1) হইতে BC-র উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$$=\frac{2+7\times1+11}{\sqrt{1^2+7^2}}=\frac{20}{5\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\times\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$ একক।

এবং মূলবিন্দু (0, 0) হইতে BC-র লম্ব-দূরত্ব

$$=\frac{11}{\sqrt{50}}=\frac{11\times\sqrt{2}}{\sqrt{100}}=\frac{11}{10}\sqrt{2}$$ একক।

উভয় লম্বের দৈর্ঘ্যই ধনাত্মক। $\therefore$ A ও মূলবিন্দু, BC-বাহুর একই পার্শ্বে অবস্থিত।

B (3, −2) হইতে CA-র উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$$=\frac{3-3\times(-2)+1}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$ একক

এবং মূলবিন্দু (0, 0) হইতে CA-র লম্ব-দূরত্ব

$$=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{1}{10}\sqrt{10} \text{ একক।}$$

উভয় লম্বের দৈর্ঘ্যই ধনাত্মক। ∴ B ও মূলবিন্দু, CA-বাহুর একই পার্শ্বে অবস্থিত।

আবার, C(−4, −1) হইতে AB-র উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$$=\frac{3\times(-4)+1\times(-1)-7}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{20}{\sqrt{10}}=-2\sqrt{10} \text{ একক},$$

এবং মূলবিন্দু (0, 0) হইতে AB-র লম্ব-দূরত্ব

$$=\frac{-7}{\sqrt{10}}=-\frac{7}{10}\sqrt{10} \text{ একক।}$$

এক্ষেত্রে উভয় লম্বের দৈর্ঘ্যই ঋণাত্মক; ∴ C ও মূলবিন্দু, AB-বাহুর একই পার্শ্বে অবস্থিত।

অতএব, মূলবিন্দুটি ABC ত্রিভুজের মধ্যে অবস্থিত।

উদা. 5. Find the equations to the bisectors of the angles between the straight lines: $8x-6y+11=0$ and $12x-5y-6=0$. Mention which bisector lies in the angle which contains the origin.

[$8x-6y+11=0$ ও $12x-5y-6=0$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। মূলবিন্দুটি যে কোণে অবস্থিত কোন্ সমদ্বিখণ্ডকটি সেই কোণস্থ তাহার উল্লেখ কর।]

উভয় রেখার অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ,

$$\frac{8x-6y+11}{\sqrt{8^2+6^2}}=\pm\frac{12x-5y-6}{\sqrt{12^2+5^2}}$$

বা, $13(8x-6y+11)=\pm10(12x-5y-6)$.

ডানপক্ষে '+' চিহ্ন লইয়া একটি সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$16x+28y-203=0$ ······(i)

আবার, ডানপক্ষে '−' চিহ্ন লইয়া দ্বিতীয় সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$224x-128y+83=0$ ······(ii)

এখানে প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের ধ্রুবক পদ দুইটি বিপরীত চিহ্নযুক্ত [+11 ও −6]; সুতরাং ডানপক্ষে '−' চিহ্ন লইয়া যে সমীকরণ পাওয়া গিয়াছে উহাই উদ্দিষ্ট সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইবে।

∴ যে কোণের মধ্যে মূলবিন্দু আছে সেই কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল $224x-128y+83=0$.

উদা. 6. Find the distance between the parallel lines $4x+3y=8$ and $4x+3y+12=0$.

[$4x+3y=8$ ও $4x+3y+12=0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে লম্ব-দূরত্ব নির্ণয় কর।]

যেহেতু সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল, সুতরাং মূলবিন্দু হইতে লম্ব অঙ্কিত করিলে উহা উভয় সরলরেখার উপর লম্ব হইবে।

$4x+3y=8$, বা, $4x+3y-8=0 \cdots (1)$ এই সরলরেখার উপর মূলবিন্দু (0, 0) হইতে লম্বের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{-8}{\sqrt{4^2+3^2}} = -\dfrac{8}{5}$.

মূলবিন্দু (0, 0) হইতে দ্বিতীয় রেখা $4x+3y+12=0 \ldots (2)$এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{12}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{12}{5}$.

যেহেতু, সরলরেখা দুইটির উপর মূলবিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য দুইটি বিপরীত চিহ্নযুক্ত, সুতরাং বুঝিতে হইবে যে সরলরেখা দুইটি মূলবিন্দুর দুই পার্শ্বে অবস্থিত।

অতএব, উভয় সরলরেখার মধ্যে দূরত্ব (অর্থাৎ লম্ব-দূরত্ব) $= \frac{12}{5} + \frac{8}{5} = 4$.

অন্য নিয়ম। দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার দূরত্ব বলিলে উহাদের যে-কোন একটির উপরিস্থিত যে-কোন বিন্দু হইতে অপর সরলরেখার লম্ব-দূরত্ব বুঝায়।

প্রদত্ত প্রথম সমীকরণে $y=0$ ধরিলে $x=2$ পাওয়া যায়। সুতরাং প্রথম সরলরেখার উপরিস্থিত একটি বিন্দু (2, 0)।

এক্ষণে, (2, 0) বিন্দু হইতে $4x+3y+12=0$ সরলরেখার

লম্ব-দূরত্ব $= \dfrac{4x+3y+12}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{4\times2+3\times0+12}{5} = \dfrac{20}{5} = 4$.

অতএব, প্রদত্ত সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব $=4$.

উদা. 7. Find the equation to the straight line passing through the origin and the point of intersection of the lines $x-y=4$ and $y+7x+20=0$, and prove that it bisects the angle between them [U. P. B. 1921]

[মূলবিন্দু এবং $x-y=4$ ও $y+7x+20=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু-গামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে ঐ রেখাটি ঐ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।]

$x-y=4 \cdots(1)$ ও $y+7x+20=0 \cdots(2)$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $x-y-4+k(y+7x+20)=0$.

অর্থাৎ $(7k+1)x+(k-1)y+20k-4=0 \cdots(3)$ যেখানে k একটি ধ্রুবক।

$\because$ এই (3)-সরলরেখাটি মূলবিন্দু দিয়া গিয়াছে, $\therefore$ ইহার ধ্রুবক পদটি $=0$ হইবে, অর্থাৎ $20k-4=0$, বা, $k=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x-y-4+\frac{1}{5}(y+7x+20)=0$,

বা, $y=3x \ldots(4)$

যেহেতু, (4)-সরলরেখা মূলবিন্দুগামী, সুতরাং উহা (1) ও (2) সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক হইতে হইলে উহা (1) ও (2)-এর অন্তর্ভুক্ত যে কোণটির মধ্যে মূলবিন্দু আছে সেই কোণের সমদ্বিখণ্ডক হইবে।

$\therefore$ সমীকরণ (1) ও (2)এর ধ্রুবক পদ দুইটিকে ধনাত্মক করিয়া (দ্বিতীয়টিতে ধনাত্মক আছে) সাজাইয়া সমীকরণ দুইটি হয় $y-x+4=0$ এবং $y+7x+20=0$.

অতএব, উহাদের অন্তর্ভূক্ত যে কোণটির মধ্যে মূলবিন্দু আছে তাহার সমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ হয় $\dfrac{y-x+4}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=+\dfrac{y+7x+20}{\sqrt{1^2+7^2}}$

বা, $\dfrac{y-x+4}{\sqrt{2}}=\dfrac{y+7x+20}{5\sqrt{2}}$, বা, $\dfrac{y-x+4}{1}=\dfrac{y+7x+20}{5}$,

বা, $5y-5x+20=y+7x+20$,

বা, $4y=12x$, বা, $y=3x$.

অতএব, প্রমাণিত হইল যে মূলবিন্দু ও প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর মধ্য দিয়া যে সরলরেখা গিয়াছে তাহা ঐ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

উদা. 8. If the three lines $x+y=0$, $x-3y=0$ and $x-2y=1$ form a triangle, find the equation of the perpendicular let fall on $x+y=0$ from the opposite vertex.

[যদি $x+y=0$, $x-3y=0$ ও $x-2y=1$ রেখা তিনটি একটি ত্রিভুজ গঠন করে, তবে $x+y=0$ রেখার উপর বিপরীত শীর্ষবিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।]

এখানে, $x+y=0$...(1) সরলরেখার বিপরীত শীর্ষবিন্দু অপর দুইটি প্রদত্ত সমীকরণের ছেদবিন্দু। ঐ ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইল

$x-3y+k(x-2y-1)=0$ (এখানে k একটি ধ্রুবক),

বা, $(k+1)x-(2k+3)y-k=0\cdots(2)$

(1) ও (2) পরস্পর লম্ব হইবে যদি $(k+1)\times1-(2k+3)\times1=0$ হয়

[অনুচ্ছেদ 24 (B) দেখ]

অর্থাৎ যদি $k=-2$ হয়।

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x-3y-2(x-2y-1)=0$,

বা, $y-x+2=0$.

উদা. 9. (*a*) Find the foot (পাদবিন্দু) of the perpendicular from the point (2,—2) to the line $3x-y+2=0$.

এখানে, প্রদত্ত সমীকরণ $3x-y+2=0$, বা, $y=3x+2$.

$\therefore$ ইহার gradient $m_1=3$.

অতএব, $y=3x+2$ রেখার উপর যে কোন লম্বরেখার gradient $m_2=-\frac{1}{3}$ হইবে।

$\therefore$ $(2,-2)$ বিন্দু হইতে $y=3x+2$ সরলরেখার উপর লম্বের সমীকরণ হইবে $y-(-2)=-\frac{1}{3}(x-2)$, বা $3y+x+4=0$.

ঐ লম্বের পাদবিন্দুটি $3x-y+2=0$ এবং $3y+x+4=0$ সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দু, সুতরাং পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হইবে।

ঐ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাই, $x=-1$, $y=-1$.

$\therefore$ পাদবিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $(-1,-1)$.

উদা. 9. (*b*) Find the orthocentre (লম্ববিন্দু) of the triangle whose vertices are (1, 5), (7, 2) and (4, 9).

মনে কর, ত্রিভুজ ABCএর শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক A (1, 5), B (7, 2) এবং C (4, 9). A বিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $y-5=m(x-1)\cdots(1)$.

BC বাহুর উপর gradient $=\frac{9-2}{4-7}=-\frac{7}{3}$.

$\therefore$ (1)-রেখা BC বাহুর উপর লম্ব হইবে যখন $m=\frac{3}{7}$ হইবে।

অতএব, A (1, 5) শীর্ষবিন্দুগামী বাহুর উপর লম্বের সমীকরণ হইল

$y-5=\frac{3}{7}(x-1)$, বা $3x-7y+32=0\cdots(2)$.

আবার, B(7, 2) বিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $y-2=m(x-7)$.

$$\text{AC বাহুর gradient}=\frac{9-5}{4-1}=\frac{4}{3}.$$

∴ AC বাহুর উপর B শীর্ষবিন্দুগামী লম্বের সমীকরণ হইবে

$$y-2=-\tfrac{3}{4}(x-7), \text{ বা, } 3x+4y-29=0\cdots(3).$$

এখন, (2) ও (3) এই দুই লম্বের ছেদবিন্দুই হইবে △ABC-র লম্ববিন্দু।

(2) ও (3) সমাধান করিয়া পাওয়া যায় $x=\frac{25}{11}$, $y=\frac{61}{11}$.

অতএব, লম্ববিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $(\frac{25}{11}, \frac{61}{11})$.

উদা. 10. Prove that in any triangle perpendiculars drawn from the vertices upon the opposite sides are concurrent.

[প্রমাণ কর যে, যে-কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বগুলি সমবিন্দু।]

মনে কর, ত্রিভুজ ABC-র শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) এবং C (x_3, y_3).

$$\text{BC বাহুর gradient}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}.$$

∴ শীর্ষবিন্দু A হইতে BC বাহুর উপর লম্বের সমীকরণ হইবে

$$y-y_1=-\frac{x_3-x_2}{y_3-y_2}(x-x_1),$$

বা, $y(y_3-y_2)+x(x_3-x_2)-\{y_1(y_3-y_2)+x_1(x_3-x_2)\}=0 \cdots(1)$

অনুরূপে, B ও C বিন্দু হইতে CA ও AB বাহুর উপর লম্বের সমীকরণ হইবে, যথাক্রমে

$$y(y_1-y_3)+x(x_1-x_3)-\{y_2(y_1-y_3)+x_2(x_1-x_3)\}=0\cdots(2)$$

এবং $y(y_2-y_1)+x(x_2-x_1)-\{y_3(y_2-y_1)+x_3(x_2-x_1)\}=0\cdots(3)$

এখন দেখা যাইতেছে (1), (2) ও (3) সমীকরণ তিনটির বামপক্ষ যোগ করিলেই শূন্য হয়, সুতরাং (1), (2) ও (3) সরলরেখা তিনটি সমবিন্দু।

[অনুচ্ছেদ 28 (B) দেখ। এখানে $p=q=r=1$]

অতএব, ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বত্রয় সমবিন্দু।

উদা. 11. Find the internal bisectors of the angles of the triangle whose sides are $x=0$, $y=0$ and $3x+4y-12=0$, and also find its in-centre.

[যে ত্রিভুজের বাহুগুলি $x=0$, $y=0$ ও $3x+4y-12=0$, তাহার অন্তঃকোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় ও অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর।]

স্পষ্টতঃই $x=0 \cdots (1)$ y-অক্ষের ও $y=0 \cdots (2)$ x-অক্ষের সমীকরণ, এবং $3x+4y-12=0 \cdots (3)$ x-ও y-অক্ষের ধনাত্মক দিকে ছেদ করিয়া গিয়াছে। $\therefore$ অক্ষদ্বয় ত্রিভুজটির দুইটি বাহু, উহাদের ১ম ও ৩য় পাদের সমকোণদ্বয়কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া যে রেখা যাইবে তাহাই ত্রিভুজটির একটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক হইবে। অতএব বুঝা গেল ঐ সমদ্বিখণ্ডটি মূলবিন্দুগামী বলিয়া ধ্রুবক পদটি শূন্য হইবে এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $45°$ কোণে নত থাকিবে বলিয়া $m=1$.

$\therefore$ ঐ সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইবে $y=x$.

আবার, (1) ও (3) বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণটির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইবে $x=\dfrac{-3x-4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}}$, বা, $5x=-3x-4y+12$,

অর্থাৎ $2x+y-3=0$.

এক্ষণে, (2) ও (3) বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণটির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইবে $y=\dfrac{-3x-4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}}$, বা, $5y=-3x-4y+12$,

অর্থাৎ $x+3y-4=0$.

অতএব, নির্ণেয় সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের সমীকরণ হইল

$y=x$, $2x+y-3=0$ এবং $x+3y-4=0$. ইহাদের যে কোন দুইটির ছেদবিন্দু হইবে অন্তঃকেন্দ্র। যে কোন সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাই $x=1$, $y=1$. $\therefore$ অন্তঃকেন্দ্র হইল $(1, 1)$ বিন্দু।

উদা. 12. Find that equations to the bisectors of angles between that straight lines, $x=y$ and $x+y=1$.

Identify that bisector of the angle which includes the point $(2, 1)$. [H. S. Tech. 1965]

[$x=y$ ও $x+y=1$ সরলরেখা দুইটির অন্তর্ভূত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। $(2, 1)$ বিন্দুটি যে কোণের অন্তর্ভূত তাহার সমদ্বিখণ্ডক কোনটি দেখাও]

উভয় রেখার অন্তর্ভূ'ত কোণের সমদ্বিখণ্ডদ্বয়ের সমীকরণ হয়

$$\frac{x-y}{\sqrt{2}}=\pm\frac{x+y-1}{\sqrt{2}},$$

বা, $\quad x-y=\pm(x+y-1).$

ডানপক্ষের '+' চিহ্ন ধরিয়া একটি সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$2y-1=0\cdots(i)$$

ডানপক্ষের '−' চিহ্ন ধরিয়া অপর সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$2x-1=0\cdots(ii)$$

(2, 1) বিন্দু হইতে $x+y-1=0$ রেখার লম্ব-দূরত্ব $=\dfrac{2+1-1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত। কিন্তু সমীকরণের ধ্রুবক পদ [−1] ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত। সুতরাং (2, 1) বিন্দুটি এই রেখার যে পার্শ্বে মূলবিন্দু আছে তাহার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। ∴ প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের যে কোণের মধ্যে মূলবিন্দু নাই, সেই কোণের মধ্যে (2, 1) বিন্দুটি আছে।

অতএব, উদ্দিষ্ট সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল $2y-1=0$.

উদা. 13. Find the equations of the bisectors of the angles between the two straight lines $4x-3y+1=0$ and $12x-5y+7=0$.

Find out that bisector which bisects the acute angle between the two given st. lines.

[$4x-3y+1=0$ ও $12x-5y+7=0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূ'ত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডক দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উহাদের মধ্যে কোন্‌টি অন্তর্ভূ'ত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক তাহা স্থির কর।]

প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূ'ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ,

$$\frac{4x-3y+1}{\sqrt{4^2+3^2}}=\pm\frac{12x-5y+7}{\sqrt{12^2+5^2}}$$

বা, $\quad 13(4x-3y+1)=\pm5(12x-5y+7).$

ডানপক্ষের '+' চিহ্ন লইয়া একটি সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$4x+7y+11=0\cdots\cdots(i)$$

এবং ডানপক্ষের '−' চিহ্ন লইয়া অপর সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$7x-4y+3=0\cdots\cdots(ii)$$

মনে কর, (ii)-সমদ্বিখণ্ডকটি $12x-5y+7=0$ বাহুর সহিত θ-কোণে নত আছে।

$\therefore \quad \tan\theta=\dfrac{\frac{12}{5}-\frac{7}{4}}{1+\frac{12}{5}\times\frac{7}{4}}$ [এখানে বাহুটির প্রবণতা $=\frac{12}{5}$ ও সমদ্বিখণ্ডক (ii)এর প্রবণতা $=\frac{7}{4}$।]

$=\frac{13}{104}=\frac{1}{8}$ [ইহা 1 অপেক্ষা কম।]

$\therefore \quad \theta<45^\circ$. যে কোণকে $7x-4y+3=0$ সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে ঐ কোণ $=2\theta$. $\therefore \quad 2\theta<90^\circ$, সুতরাং সূক্ষ্মকোণ।

অতএব, প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের নির্ণেয় সমীকরণ হইল $7x-4y+3=0$.

উদা. 14. The straight line $2x+3y=1$ bisects an angle between a pair of straight lines of which one is $x+2y=1$; find the equation of the other line.

[$2x+3y=1$ সরলরেখা যে সরলরেখাযুগলের অন্তর্ভূক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক তাহাদের একটি $x+2y=1$; অপরটির সমীকরণ নির্ণয় কর।]

এখানে কোণটির একটি বাহুর সমীকরণ, $x+2y=1 \cdots$(i)

ও কোণটির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ, $2x+3y=1 \cdots$(ii)

(i) ও (ii) সমাধান করিয়া উহাদের ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া যায়,

$(-1, 1)$.

$\therefore \quad$ অপর বাহুর সমীকরণ, $y-1=m(x+1) \cdots$(iii).

এখানে বাহু-(i) যে কোণে সমদ্বিখণ্ডক-(ii)এর সহিত নত আছে, সমদ্বিখণ্ডক-(ii) সেই একই কোণে বাহু-(iii)এর সহিত নত থাকিবে।

মনে কর, (ii)এর সহিত (i) θ-কোণে নত আছে।

$\therefore \quad \tan\theta=\dfrac{-\frac{1}{2}-(-\frac{2}{3})}{1+(-\frac{1}{2})(-\frac{2}{3})}$ [$\because$ (i)এর প্রবণতা $=-\frac{1}{2}$ ও (ii)এর প্রবণতা $=-\frac{2}{3}$]

$=\frac{1}{8}$.

$\therefore \quad \dfrac{1}{8}=\dfrac{-\frac{2}{3}-m}{1+(-\frac{2}{3})(m)}=\dfrac{-2-3m}{3-2m}, \quad \therefore \quad m=-\frac{19}{22}$.

অতএব, বাহুটির নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$y-1=-\frac{19}{22}(x+1)$ [(iii)-তে $m=-\frac{19}{22}$ ধরিয়া।]

বা, $19x+22y-3=0$.

উদা. 15. Find the bisectors of the interior angles of the triangle whose sides are given by the equations :

$3x+4y-6=0$, $12x-5y-3=0$ and $4x-3y+12=0$.

Hence, find the in-centre of the triangle.

[একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ $3x+4y-6=0$, $12x-5y-3=0$ ও $4x-3y+12=0$; উহার অন্তঃকোণগুলির সমদ্বিখণ্ডক তিনটি নির্ণয় কর এবং তাহা হইতে উহার অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর।]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে

$$BC \equiv 3x+4y-6=0 \quad \cdots(i)$$

$$CA \equiv 12x-5y-3=0 \quad \cdots(ii)$$

ও $$AB \equiv 4x-3y+12=0 \quad \cdots(iii)$$

এখন (ii) ও (iii) সমাধান করিয়া A বিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া যায় $(\frac{69}{16}, \frac{39}{4})$

(iii) ও (i) ,, ,, B ,, ,, ,, ,, $(-\frac{6}{5}, \frac{12}{5})$

এবং (i) ও (ii) ,, ,, C ,, ,, ,, ,, $(\frac{2}{3}, 1)$.

A, B ও C শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্কত্রয় যথাক্রমে উহাদের বিপরীত বাহুগুলির সমীকরণে অর্থাৎ BC, CA ও AB-র সমীকরণে বসাইয়া যে মানগুলি পাওয়া যায় তাহাদের চিহ্নগুলি যথাক্রমে, +, −, ও + হয়।

এখন যেহেতু ত্রিভুজের অন্তঃকোণের সমদ্বিখণ্ডকগুলি পরস্পর যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দু অর্থাৎ ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র, বাহুগুলির যে পাশে উহাদের বিপরীত শীর্ষবিন্দুগুলি আছে, সেই একই পাশে অবস্থিত ; সুতরাং ঐ বিন্দু (অন্তঃকেন্দ্র) হইতে বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্যগুলিও একই চিহ্নযুক্ত হইবে।

∴ A-কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ, $\dfrac{12x-5y-3}{-\sqrt{12^2+5^2}} = \dfrac{4x-3y+12}{\sqrt{4^2+3^2}}$

বা, $112x-64y+141=0$.

B-কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ, $\dfrac{4x-3y+12}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{3x+4y-6}{\sqrt{3^2+4^2}}$,

বা, $x-7y+18=0$.

এবং C-কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{3x+4y-6}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{12x-5y-3}{-\sqrt{12^2+5^2}},$$

বা, $33x+9y-31=0$.

ইহারাই ত্রিভুজের অন্তঃকোণগুলির তিনটি সমদ্বিখণ্ডক।

ইহাদের যে কোন দুইটির ছেদ বিন্দুই হইবে প্রদত্ত ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র। শেষের দুইটি সমীকরণ হইতে বজ্রগুণন দ্বারা পাওয়া যায়,

$$\frac{x}{-7\times-31-9\times18}=\frac{y}{18\times33-(-31)\times1}=\frac{1}{1\times9-(-7)\times33}$$

বা, $\frac{x}{217-162}=\frac{y}{594+31}=\frac{1}{9+231}$, বা, $\frac{x}{11}=\frac{y}{125}=\frac{1}{48}$.

$\therefore \quad x=\frac{11}{48}$ ও $y=\frac{125}{48}$.

অতএব, নির্ণেয় অন্তঃকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\frac{11}{48}, \frac{125}{48})$.

[**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** যখন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকিবে তখন 32 অনুচ্ছেদ-এর সূত্র (D) সাহায্যে, উহার নিম্নের প্রদত্ত উদাহরণের ন্যায় অঙ্ক কষিতে হইবে, কিন্তু যখন ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ দেওয়া থাকিবে তখন উপরে প্রদত্ত উদাহরণের ন্যায় অঙ্ক কষাই ভাল।]

উদা. 16. Prove analytically that the bisectors of the interior angles of a triangle meet in a point.

[স্থানাঙ্ক দ্বারা প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের অন্তঃকোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের বাহুগুলি,

$AB \equiv x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1=p_1$......(i)

$BC \equiv x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2=p_2$......(ii)

$CA \equiv x\cos\alpha_3+y\sin\alpha_3=p_3$......(iii)

প্রমাণ করিতে হইবে যে ত্রিভুজের অন্তঃকোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু। প্রথমতঃ ধরা যাক্ মূলবিন্দু ত্রিভুজের মধ্যে আছে।

(i) ও (ii)এর অন্তর্গত B কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হয়

$$\frac{x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1}{\sqrt{\cos^2\alpha_1+\sin^2\alpha_1}}=\pm\frac{x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2}{\sqrt{\cos^2\alpha_2+\sin^2\alpha_2}}$$

$\therefore$ B-কোণের মধ্যে মূল বিন্দু অবস্থিত এবং দুইটি ধ্রুবক পদই ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত, সুতরাং ডানপক্ষের '+' চিহ্ন লইয়া B-কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

∴ B-কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$x(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)+y(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)-(p_1-p_2)=0 \ldots \text{(iv)}$$

অনুরূপভাবে, (ii) ও (iii) হইতে C-কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$x(\cos\alpha_2-\cos\alpha_3)+y(\sin\alpha_2-\sin\alpha_3)-(p_2-p_3)=0 \ldots \text{(v)},$$

এবং (iii) ও (i) হইতে A-কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$x(\cos\alpha_3-\cos\alpha_1)+y(\sin\alpha_3-\sin\alpha_1)-(p_3-p_1)=0 \ldots \text{(vi)}.$$

স্পষ্টতঃ দেখা যাইতেছে যে (iv), (v) ও (vi)এর বামপক্ষগুলির যোগ করিলে আপনা হইতেই উহা শূন্য হয়।

সুতরাং কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় পরস্পর একই বিন্দুতে মিলিত হইবে। আবার, যখন মূলবিন্দু ত্রিভুজের মধ্যে থাকিবে না, ঐরূপ অবস্থায় মাত্র একটি অন্তঃকোণের মধ্যেই মূলবিন্দু থাকিবে, অপর দুইটি অন্তঃকোণের বাহিরে মূলবিন্দু থাকিবে। সুতরাং ঐ দুই ক্ষেত্রে সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় করিতে বর্গমূলের ঋণাত্মক চিহ্ন লইতে হইবে।

ধরা যাক্ মাত্র B-কোণের মধ্যেই মূলবিন্দু আছে। সুতরাং এরূপক্ষেত্রে সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের সমীকরণ হইবে

$$x(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)+y(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)-(p_1-p_2)=0 \ldots \text{(vii)}$$

$$x(\cos\alpha_2+\cos\alpha_3)+y(\sin\alpha_2+\sin\alpha_3)-(p_2+p_3)=0 \ldots \text{(viii)}$$

$$x(\cos\alpha_3+\cos\alpha_1)+y(\sin\alpha_3+\sin\alpha_1)-(p_3+p_1)=0 \ldots \text{(ix)}$$

এখন যেহেতু (ix)এর বামপক্ষকে -1 দ্বারা গুণ করিয়া ঐ গুণফল, (vii) ও (viii)এর বামপক্ষের যোগফলের সহিত যোগ করিলে দেখা যায় যে উহা শূন্য হয়, সুতরাং এক্ষেত্রেও কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় পরস্পর একই বিন্দুতে মিলিত হইবে। অতএব, ত্রিভুজের অন্তঃকোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।

Exercise 5

1 (*a*) Find on which side of the straight line $3x+4y+5=0$ lies the point $(2, -2)$.

[$3x+4y+5=0$ সরলরেখার কোন্ পার্শ্বে $(2, -2)$ বিন্দু অবস্থিত ?]

(*b*) Find on which side of the straight line $5x-9y+7=0$ lies the point $(0, 3)$.

[$(0, 3)$-বিন্দুটি $5x-9y+7=0$ সরলরেখার কোন পার্শ্বে অবস্থিত তাহা নির্ণয় কর।]

2. (*a*) Find whether the points A $(0, -4)$ and B $(-3, 1)$ lie on fhe same side or on the opposite sides of the line $6x+7y+12=0$.

[A $(0, -4)$ ও B $(-3, 1)$ বিন্দু দুইটি $6x+7y+12=0$ রেখার একই পার্শ্বে অথবা দুই বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত তাহা নির্ণয় কর।]

(*b*) Find whether the points P $(3, 1)$ and Q $(-4, -1)$ lie on the same side or on the opposite sides of the line $3x-4y+7=0$.

[P $(3, 1)$ ও Q $(-4, -1)$ বিন্দুদ্বয় $3x-4y+7=0$ রেখার একই পার্শ্বে অথবা বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত ?]

3. (*a*) Find the distance of the point $(-3, 4)$ from the line $2x-3y+1=0$.

(*b*) Find the distance of the point $(1, 0)$ from the straight line $5x+12y-8=0$.

4. Find the lengths of the altitudes of the triangle having the vertices $(-2, 1)$, $(1, 4)$ and $(3, -1)$.

[যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি $(-2, 1)$, $(1, 4)$ ও $(3, -1)$ তাহার উচ্চতাগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।]

5. Show that the point $(1, 1)$ is equidistant from the lines $3x+4y=12$, $5x-12y+20=0$ and $4x-3y=6$.

6. If the sum of the perpendiculars dropped from a variable point P on the two straight lines $x+y-5=0$ and $3x-2y+7=0$ be always equal to 10, prove that P must move on a right line. [C. U. 1950]

[যদি একটি চলমান P বিন্দু হইতে $x+y-5=0$ ও $3x-2y+7=0$ সরলরেখা দুইটির উপর লম্বদ্বয়ের সমষ্টি সতত 10 হয়, তবে প্রমাণ কর যে Pকে একটি সরলরেখায় চলিতে হইবে।]

7. In $\triangle ABC$, $2x+y+1=0$, $2x+3y+1=0$ and $3x+4y+3=0$ represent the sides BC, CA and AB respectively. Find the equation of the altitude through A.

[যদি $2x+y+1=0$, $2x+3y+1=0$ ও $3x+4y+3=0$ দ্বারা $\triangle ABC$-এর যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহু সূচিত হয়, তবে উহার A বিন্দুগামী উচ্চতার সমীকরণ নির্ণয় কর।]

8. Find the orthocentre of the triangle whose sides are given by $x-y+1=0$, $3x+y-17=0$ and $x+5y+13=0$.

[যে ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ $x-y+1=0$, $3x+y-17=0$ ও $x+5y+13=0$ তাহার লম্ববিন্দু নির্ণয় কর।]

9. Find the foot (পাদবিন্দু) of the perpendicular from the point $(3, -2)$ to the straight line $2x-y+7=0$.

10. Find the equations to the straight lines bisecting the angles between the following pairs of straight lines :—

[নিম্নের সরলরেখাযুগলের অন্তর্ভূক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর :—]

(*a*) $8x-6y+11=0$ and $12x-5y-6=0$

(*b*) $4y+3x-12=0$ and $3y+4x-24=0$

(*c*) $x \cos\theta+y \sin\theta=p_1$ and $x \cos\phi+y \sin\phi=p_2$.

11. Find the distance between the parallel lines

[নিম্নে প্রদত্ত সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব কত নির্ণয় কর।]

(*a*) $3x+4y=6$ and $3x+4y+5=0$

(*b*) $y=mx+c_1$ and $z=mx+c_2$.

12. What are the points on the axis of x whose perpendicular distance from the straight line $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ is a ?

[C. U. 1951]

[x-অক্ষস্থিত কোন্ বিন্দুগুলির $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ সরলরেখা হইতে লম্বদূরত্ব a-এর সমান ?]

12. (*a*) If p be the perpendicular distance of the origin from a straight line whose intercepts on the axes are a and b, show that $\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

[একটি সরলরেখাদ্বারা অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদিতাংশ a ও b এবং ঐ রেখা হইতে মূলবিন্দুর দূরত্ব p হইলে, প্রমাণ কর যে $\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.]

13. Find the equations of the two st. lines drawn through the point $(0, a)$, on which the perpendiculars let fall from the point $(2a, 2a)$ are each of length a. [C. U. 1953]

[$(0, a)$ বিন্দু দিয়া অঙ্কিত যে দুইটি সরলরেখার উপর $(2a, 2a)$ বিন্দু হইতে লম্বের প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য a, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।]

14 Express the condition that the perpendicular dropped from the point $(3, -2)$ on the line $lx+my+n=0$ may be of constant length 5. [C. U. 1956]

[যে সর্তে $(3, -2)$ বিন্দু হইতে $lx+my+n=0$ রেখার উপর লম্বের ধ্রুবক দৈর্ঘ্য 5 হইবে, তাহা নির্ণয় কর।]

15. Show that the perpendiculars let fall from any point of the straight line $7x-9y+10=0$ upon the two straight lines $3x+4y=5$ and $12x+5y=7$ are equal to each other. [C. U. 1952]

[প্রমাণ কর যে $7x-9y+10=0$ সরলরেখাস্থিত যে কোন বিন্দু হইতে $3x+4y=5$ ও $12x+5y=7$ সরলরেখা দুইটির উপর লম্বগুলি পরস্পর সমান।]

16. Find the equation of the st. line which lies midway between the point $(2, -1)$ and the st. line $3x-2y+5=0$. [J. B. A.]

[$(2, -1)$ বিন্দু ও $3x-2y+5=0$ সরলরেখার মধ্যপথে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।]

17. Find the equations to the str. lines bisecting the angles between the following pair of str. lines and identify that bisector which bisects the angle in which the origin lies :

[নিম্নে প্রদত্ত সরলরেখাযুগলের অন্তর্ভূক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং মূলবিন্দু যে কোণের অন্তর্ভুক্ত তাহার সমদ্বিখণ্ডক কোন্‌টি তাহা দেখাও ।]

(i) $2y=3x-1$ and $3y=2x+1$

(ii) $x+\sqrt{3}y=6+2\sqrt{3}$ and $x-\sqrt{3}y=6-2\sqrt{3}$.

(iii) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ and $x\cos\beta+y\sin\beta=q$.

18, Find the equation of the bisector (সমদ্বিখণ্ডক) of

(*a*) the acute angle (সূক্ষ্মকোণ) between the str. lines

$5x-12y+20=0$ and $4x-3y=6$.

(*b*) the obtuse angle (স্থূলকোণ) between the str. lines,

$4x-3y+1=0$ and $12x-5y+7=0$.

19. Prove that the origin lies inside the triangle whose vertices are $(4, 5)$, $(-4, 3)$ and $(-1, -3)$.

20. Find the bisector of that angle beween the str. lines $4x-3y-6=0$ and $3x+4y=12$ which contains the point $(3, -2)$.

[$4x-3y-6=0$ ও $3x+4y=12$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত যে কোণের মধ্যে $(3, -2)$ বিন্দু অবস্থিত তাহার সমদ্বিখণ্ডক নির্ণয় কর ।]

21. Find the foot of the perpendicular from the point $(-2, 6)$ on the straight line $2x+3y-1=0$.

What are the co-ordinates of the point which is the image of $(-2, 6)$ with respect to the given line ?

[H. S. Tech. 1965]

[$(-2, 6)$ বিন্দু হইতে $2x+3y-1=0$ সরলরেখার উপর লম্বের পাদবিন্দু নির্ণয় কর । ঐ প্রদত্ত সরলরেখার সম্পর্কে $(-2, 6)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর ।]

22. Find the equations to the straight lines which are

[নিম্নে নির্দিষ্ট সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর :]

(*a*) at a distance of 6 from the origin and which pass through the point $(3, 6)$.

[রেখাগুলি $(3, 6)$ বিন্দুগামী এবং মূলবিন্দু হইতে উহাদের দূরত্ব 6.]

(*b*) at a distance of 5 from the origin and which pass through the point of intersection of the lines $3x-y-20=0$ and $x-2y-5=0$. [H. S. 1968 (Compl.)]

[মূলবিন্দু হইতে রেখাগুলির দূরত্ব 5 এবং উহার $3x-y-20=0$ ও $x-2y-5=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া গিয়াছে।]

23. Prove analytically that the altitudes of an equilateral triangle are equal.

[স্থানাঙ্ক দ্বারা প্রমাণ কর যে সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতাগুলি সমান।]

24. (*a*) Find the ortho-centre of the triangle whose vertices are $(5,-4)$, $(3,-2)$ and $(1,-6)$.

[একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি $(5,-4)$, $(3,-2)$ ও $(1,-6)$; উহার লম্ববিন্দু নির্ণয় কর।]

(*b*) If two of the vertices of a triangle be $(3, 0)$, $(0, 2)$ and the orthocentre of the triangle be $\left(\frac{6}{5}, \frac{9}{5}\right)$, find the third vertex.

[একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু $(3, 0)$ ও $(0, 2)$ এবং লম্ববিন্দুটি $(\frac{6}{5}, \frac{9}{5})$, উহার তৃতীয় শীর্ষবিন্দুটি নির্ণয় কর।]

25. The straight line $7x-9y+5=0$ bisects an angle between a pair of straight lines of which one is $5x-12y=2$; find the equation of the other straight line.

[$7x-9y+5=0$ সরলরেখা যে সরলরেখাযুগলের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডক তাহাদের একটি হইল $5x-12y=2$, অপরটির সমীকরণ নির্ণয় কর।]

26. Find the bisectors of the interior angles of the triangle formed by the straight lines :

$$3x+5y-15=0,\ x+y-4=0 \text{ and } 2x+y-6=0.$$

[$3x+5y-15=0$, $x+y-4=0$ ও $2x+y-6=0$ রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের অন্তঃকোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় নির্ণয় কর।]

27. (*a*) Find the in-centre of the triangle whose vertices are given by $(-36, 18)$, $(48, -45)$ and $(12, 32)$.

[একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি $(-36, 18)$, $(48,-45)$ ও $(12, 32)$; উহার অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর।]

(*b*) Find the bisectors of the interior angles of the triangle whose sides are given by

$11x+2y-13=0$, $22x-19y-3=0$ and $x-2y-119=0$.

Hence, find the in-centre of the triangle.

[যে ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ $11x+2y-13=0$, $22x-19y-3=0$ ও $x-2y-119=0$, তাহার অন্তঃকোণগুলির সমদ্বিখণ্ডক তিনটি এবং তাহা হইতে ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর।]

28. Prove analytically that the bisectors of two exterior angles of a triangle and that of the third interior angle meet in a point.

[স্থানাঙ্ক দ্বারা প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের দুইটি বহিঃস্থকোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় ও তৃতীয় অন্তঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক সমবিন্দু।]

উত্তরমালা

MENSURATION

Exercise 1

1 52 বর্গ ফু., 24 ঘন ফু., $\sqrt{29}$ ফু. **2.** 150 বর্গ সে. মি., 125 ঘন সে.মি., 5 $\sqrt{3}$ সে. মি. **3.** 54 বর্গ সে. মি., 27 ঘন সে. মি. **4.** 2·5 ফু.
5. 236 বর্গ সে. মি. **6.** 5196·15 ঘন ই. (প্রায়) **7.** 15ই., 9ই., 6ই.
8 13 ই. **9.** 11 ফু. **10.** 12288 **11.** 6টা. 13 আ. 9 পা.
12. 9 ঘন ফু. ; 3182 ঘন ই. **13.** 25 মি. **13.** (*a*) 12 মি.
14. 10·392 ই. **15.** $\frac{16}{21}$ আ., $1\frac{7}{9}$ আউন্স **17.** $314\frac{1}{2}$ ঘন ফু.
18. 91 ঘন গ. 7 ঘন ফু. **19.** 27072 **20.** 16 ফুট, 8 ফুট।

Exercise 2

1 3 বর্গ ফু. **2.** 432 ঘন সে. মি. **4.** $10\frac{1}{3}$ ফু., 172 বর্গ ফু.
5 10 ফু. **6.** 935·3 ঘন ফু. **7.** 880 ঘন ফু. **8.** 370·764 বর্গ ফু.
9 6363·96 ঘন ফু. **10.** 1 বর্গ ফু. **11.** 600 ঘন মি.
12. 180 $\sqrt{3}$ ঘন ফু. **14.** 240 ঘন সে. মি. **15.** 80 বর্গ ফু., 64 ঘন ফু.
16. 360 ঘন সে. মি., 432 বর্গ সে. মি. **17.** 5 টাকা
18. 4 সে. মি., 144 ঘন সে. মি. **19.** 8 সে. মি., 1152 ঘন সে. মি.।

Exercise 3

1 (3) 13ই. (2) $204\frac{2}{7}$ বর্গ ই. (3) $282\frac{6}{7}$ বর্গ ই. (4) $314\frac{2}{7}$ ঘন ই.
2. 30ই., 29·79 ই. (প্রায়) **3.** $204\frac{2}{7}$ বর্গ সে. মি , $314\frac{2}{7}$ ঘন সে. মি.
4. 7 সে. মি. **5.** 1 ফু. **6.** $427\frac{3}{7}$ বর্গ সে. মি., $1005\frac{5}{7}$ ঘন সে. মি.
7. 236 28 বর্গ ফু. (প্রায়) **8.** $37\frac{5}{7}$ ঘন ই. **9.** 1930·971 ঘন ই.
10. $116\frac{97}{154}$ ঘন ফু. **11.** $427\frac{3}{7}$ বর্গ ফু., $1005\frac{5}{7}$ ঘন ফু.
12. $37\frac{5}{7}$ ঘন ফু. $47\frac{1}{7}$ বর্গ ফুট **14.** 391·9 ঘন সে. মি.
15. 962·5 ঘন সে. মি.।

ALGEBRA

Exercise 1

1. $a-3b=0$ 2. $mn=10$ 3. $ab'-a'b=0$

4. $a^6-a^3=1$ 5. $(ab+d)^2=(a^2-b+c)(b^2-bc+ad$

6. $ab=1$ 7. $c^2-bc+ab^2=0$ 8. $a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}=4$. 9. $ab=$

10. $a^2+2c-b=0$ 11. $(a+b)^{\frac{2}{3}}+(a-b)^{\frac{2}{3}}=2$

12. $p^3-3pq+2r=0$ 13. $m^3-3lm-n=0$

14. $a^4-2a^2b^2-b^4+2c^4=0$

15. $a(b_1c_2-b_2c_1)+b(c_1a_2-c_2a_1)+c(a_1b_2-a_2b_1)=0$

16. $a^2+b^2+c^2+2abc=1$ 17. $b^4c^4+c^4a^4+a^4b^4=a^2b^2c^2d$

18. $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$ 19. $x^2+y^2=a^2$

21. $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=a^2$ 22. $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$.

Exercise 2

1. 34 2. 1 3. 3 4. $a, a+d, a+2d, \ldots$

5. $5, 2, -1, -4, \ldots$ 6. -26 7. $35, 3r-1$

8. $-30, 10-2n$ 9. $3\frac{1}{4}$ 10. (i) $a=\frac{1}{n}+1$, (ii) $\frac{n^2-n+1}{n}$

11. 9th 12. 6th, 11th 13. না 14. 16th

15. 38 16. -49 17. 9, 0 18. 2, 5, 8,...

19. $\frac{d(p-1)-c(q-1)}{p-q}, \frac{c-d}{p-q}$ 20. 0 21. $\frac{r(a-b)-(aq-bp)}{p-q}$

Exercise 3

1. 15 2. 4 3. -9 4. x^2+a^2 5. 2

6. $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ 7. 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36

8. 68, 132, 196, 260 9. 6 10. 7.

Exercise 4

1. 100 2. $\frac{n}{2}(3n+7)$ 3. -96 4. 290 5.

6. $\frac{n+1}{2}$ 7. 378 8. $(n-1)(2n-3)$ 9. $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$

10. $19(\sqrt{2}+18)$ 11. 3927 12. -144 13. 900

14. 19096 15. 4080 16. $n(2n+1)$ 17. 247

18. $\frac{1}{2}n(n+1)$ 19. 6867 20. 7500 21. 2940

22. 861 23. -368 24. 1763 25. 11

26. 19 27. 551 28. 1, 2

29. 5, 9, 13,... 30. 3, 10 ; অথবা, -1, 12 31. $(2r-1)^2$

32. 2747 34. (a) 792988 35. 5, 12, 19 ; বা, 19, 12, 5

36. 1, 4, 7, 10 ; বা 10, 7, 4, 1

37. $\frac{n}{2}(a+c)$ 39. n^2 40. $\frac{1}{3}n(4n^2+6n-1)$

41. $\frac{n}{2}(4n^2+17n+21)$ 42. $\frac{n}{2}(6n^2+21n+23)$

43. $\frac{n}{12}(n+1)(n+2)(3n+5)$ 44. $\frac{n}{3}(n^2+6n+11)$

45. $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ 46. $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

47. $\frac{1}{4}n(n+5)(n^2+5n+10)$ 48. $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

49. $\frac{n}{4(n+1)}$ 50. $\frac{n}{3(n+3)}$ 51. (a). $\frac{1}{3}(4n^3+18n^2-n)$,

(b). $\frac{-r(r+1)}{2}$ (যদি r যুগ্ম হয়,), $\frac{r(r+1)}{2}$ (যদি r বিজোড় হয়),

(c). $(n+1)(2n+1)$; (d). $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$; (e). $\frac{1}{3}n(4n^2-1)$

55. $2\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{2}$; অথবা $8\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ 58. 25

59. 9, 16 60. 50500 গজ 61. 9 দিন

62. 36 বৎসর পরে, $18\frac{1}{2}$ গজ 63. 10 মাস 64. 15 ঘণ্টা।

Exercise 5

1. 128 2. 6561 3. $\frac{1024}{3125}$ 4. $\frac{1}{3^{n-1}}$ 5. $\frac{1}{2^{n-5}}$

6. $3(-3)^{p-1}$ 7. $\frac{1}{81}$ 8. $\frac{1}{32}$ 9. 1, 2, 4, 8,...

10. $\frac{1}{256}$ 11. $\frac{1}{6561}$ 12. 3, 2 13. 9ম পদ

14. 7ম পদ 15. 512, 2^{n-1} 16. $\left(\frac{a^{n-q}}{b^{n-p}}\right)^{\frac{1}{p-q}}$

Exercise 6

1. ± 25 2. $\pm\frac{1}{4}$ 3. ± 9 4. ± 4 5. $\pm x^2y^2$; ± 9

6. 12, 36, 108 ; অথবা $-12, 36, -108$ 7. 15, 45

8. 225, 2025, 18225 ; অথবা $-225, 2025, -18225$

9. $\frac{1}{3}, 1, 3$; অথবা $-\frac{1}{3}, 1, -3$ 10. $\frac{27}{8}, \frac{9}{4}, \frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}$; অথবা $-\frac{27}{8}, \frac{9}{4}, -\frac{3}{2}, 1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{81}, -\frac{32}{243}$

16. 32, 18 ; অথবা 18, 32.

Exercise 7

1. 255 2. $255\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{2}(3^n - 1)$ 4. $\frac{1}{4}(1-3^{2n})$

5. $3\frac{63}{64}$ 6. $\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$ 7. $\frac{19682}{3-\sqrt{3}}$ 8. $1\frac{511}{512}$

9. $\frac{5}{9}\left(1-\frac{1}{10^{n-1}}\right)$ 10. $\frac{1}{6}-\frac{2}{3.10^n}$ 11. -255 12. $1\frac{255}{256}$

13. $\frac{2}{3}\{1-(-\frac{1}{2})^n\}$ 14. $-\frac{(a+b)^2}{2b(a-b)}\left\{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^r-1\right\}$

15. $\frac{63}{2}(2+\sqrt{2})$ 16. $\frac{1}{3}(1-2^{2p})$ 17. 1524

18. $\frac{31}{16}(\sqrt{2}+1)$ 19. $7\frac{127}{128}$ 20. $2^{n+1}-2$ 21. $\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$

22. 1530 23. 582 24. 10টি 25. 8টি 26. 6টি

27. $21\frac{63}{64}$ 28. 4921 29. $3\frac{63}{64}$ বা $\frac{85}{64}$ 30. 1092

31. $\frac{5}{2}(2^{25}-1)$ 32. 6138 33. 25500 34. 1, 4, 16.

Exercise 8

3. $\frac{70}{81}(10^n-1)-\frac{7n}{9}$ 4. $\frac{20}{81}(10^n-1)-\frac{2n}{9}$

5. $\frac{2n}{9}-\frac{2}{81}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$ 6. $n.2^n$ 7. $2^{n+1}-n-2$

8. $\frac{3}{4}(3^n-1)-\frac{n}{2}$ 10. $2^{n+1}-2+n(n+1)$

11. 3, 6, 12 ; অথবা 12, 6, 3 12. $\frac{3^{n+1}-3-2n}{4.3^{n-1}}$

13. 2, 5, 8 ; অথবা 26, 5, -16 14. $\frac{y^2-xz}{x+z-2y}$

19. 4, 8, 16 ; অথবা 16, 8, 4. 22. 73 24. 757.

Exercise 9

1. $\frac{2}{5}$, $2\frac{1}{2}$, $b=\frac{2}{5}a^3$. 2. 25, ± 15, $y=\frac{900}{x^2}$ 3. 2
5. $R=k+k^1v^2$. 6. (i) $\sqrt[3]{a}$, (ii) t^2.
8. $x=\frac{3}{10}\frac{y}{z}$; 9. 10. $b=2a+\frac{3}{a}$; 7. 11. 10 বা 8
12. 16 : 49 13. $38\frac{1}{2}$ বর্গ ফু. 14. $\frac{ab}{c}$ 15. $\frac{27}{5}$ দিন
16. $20\frac{1}{4}$ ফু. 17. $x \propto \frac{b^4}{a}$ 19. 256 ফু.
20. $20m.$ per hr. 21. $d=4$. 22. 64 : 45 24. 325 টাকা
25. 80 ফু. 26. (i) P=22. (ii) W=68.
27. 112 28. 35 : 32 29. 45 বর্গ ফু. 30. 7 ফু.
31. $9(\sqrt{3}-1)$ সেন্টি মি. 32. 49 33. 120 টাকা।

Exercise 10 (A)

1. (i) 4 (ii) 4 (iii) $-\frac{4}{5}$ (iv) $-\frac{2}{3}$ (v) 4 (vi) -3
2. (i) $2\sqrt{3}$ (ii) $2\sqrt{5}$ (iii) ·008 (iv) a (v) 27
7. $m=\frac{n}{n-1}$ 12. (b) $\frac{1}{5}(a+3b)$ and $\frac{1}{5}(a-2b)$
(c) $a=7$ (d) $x=100$ or $\frac{1}{100}$
13. (b) (i) 0 (ii) log 2.

Exercise 10 (B)

1. (i) 9 (ii) 8 (iii) 18 (iv) 38 (v) 48 (vi) 65.
2. (i) 58 (ii) 24 (iii) 47 (iv) 4 (v) 14 (vi) 79.
3. (i) 1·6532126 (ii) 1·5765060 (iii) $\bar{2}$·1760913
(iv) $\bar{2}$·6346787 (v) $\bar{1}$·9345759 (vi) ·3861209.
4. (a) 3·3922160 (b) $\bar{6}$·2007583.
5. (i) 1·485 (ii) 3·954 (iii) -3.
6. log 3 7. (a) ·06974 (b) 259·569 8. 1·197342
9. (a) $\bar{2}$·7780766 (b) 1. 10. (a) $\bar{1}$·3686646 (b) 4·9381073.
11. (a) 772·153 (b) ·00146737. 12. 12·5
13. (a) 6618 (b) 55·8 বৎসর (প্রায়)
14. (a) ·63 (b) 1·59 (c) 1·77 (d) ·03
(e) $x=·41$, $y=5·66$ (f) $x=-1·34$; $y=-·30$.

Exercise 11

1. (a) $\pm(4\sqrt{2}+3)$ (b) $\pm(3\sqrt{3}-1)$ (c) $\pm\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$

   (d) $\pm\sqrt[4]{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ (e) $\pm\sqrt[4]{7}(\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}})$ (f) $\pm\left(3+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

2. (a) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3x-1}+\sqrt{x-2})$

   (b) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{x^4-x^2+1})$

   (c) $\pm(\sqrt{3}+\sqrt{5+2\sqrt{2}})$ (d) $\pm(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})$

   (e) $\pm\{\sqrt{(x-y)}+\sqrt{z}\}$

3. (a) $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1$

   (b) $9\sqrt{3}-9.\sqrt[3]{2}+3\sqrt{3}.\sqrt[3]{4}-6+2\sqrt{3}.\sqrt[3]{2}-2.\sqrt[3]{4}$ (c) $\sqrt[3]{2}-1$

   (d) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{z}+\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{z}-\sqrt{x}+\sqrt{y})$

4. (a) $3+2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}$ (b) $\frac{25-18\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{4}}{29}$

   (c) $\frac{3+\sqrt{15}+2\sqrt{6}}{6}$ (d) $\frac{\sqrt[3]{3}+1}{2}$

5. $\frac{35}{33}$ 7. 5·99 8. 2 10. 3·66.

Exercise 12

1. $\left.\begin{array}{l}x=5\\y=7\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=7\\y=5\end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=5\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=5\\y=2\end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{l}x=3\\y=2\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=-1\\y=6\end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{3}\\y=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=\frac{5}{2}\\y=-\frac{5}{3}\end{array}\right\}$

5. $x=\frac{3}{5},\ y=\frac{4}{5}$

6. $\left.\begin{array}{l}x=4\\y=3\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=-\frac{7}{2}\\y=-\frac{9}{2}\end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{l}x=\frac{3}{2}+\sqrt{2}\\y=\frac{3}{2}-\sqrt{2}\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=\frac{3}{2}-\sqrt{2}\\y=\frac{3}{2}+\sqrt{2}\end{array}\right\}$

8. $\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{5}(1+2\sqrt{5a-1})\\y=\frac{1}{5}(2-\sqrt{5a-1})\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{5}(1-2\sqrt{5a-1})\\y=\frac{1}{5}(2+\sqrt{5a-1})\end{array}\right\}$

9. $\left.\begin{array}{l}x=1\\y=9\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=9\\y=1\end{array}\right\}$

10. $\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{5}\\y=5\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=\frac{4}{5}\\y=20\end{array}\right\}$

11. $\left.\begin{array}{l}x=1\\y=3\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=3\\y=1\end{array}\right\}$

12. $\left.\begin{array}{l}x=5\\y=7\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=\frac{11}{9}\\y=-\frac{13}{3}\end{array}\right\}$

13. $\left.\begin{array}{l}x=5\\y=4\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=4\\y=5\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=-4\\y=-5\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=-5\\y=-4\end{array}\right\}$

14. $\left.\begin{array}{l}x=1\\y=2\end{array}\right\}$ বা $\begin{array}{l}x=-\frac{20}{13}\\y=\frac{37}{13}\end{array}$ 15. $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=\pm 2\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=-2\\y=\pm\frac{1}{2}\end{array}\right\}$

16. $\left.\begin{array}{l}x=1\\y=2\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\y=1\end{array}\right\}$ 17. $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=1\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\\y=-\frac{1}{4}\end{array}\right\}$

18. $\left.\begin{array}{l}x\ \ 1\\y\ \ 2\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=-\frac{1}{3}\\y=-\frac{2}{3}\end{array}\right\}$

19. $x=\dfrac{1\pm 2\sqrt{5b-1}}{5}, y=\dfrac{2\pm\sqrt{5b-1}}{5}$ 20. $\left.\begin{array}{l}x=8\\y=4\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=4\\y=8\end{array}\right\}$

21. $x=7, y=5$; বা $x=-5, y=-7$

22. $\left.\begin{array}{l}x=7\\y=5\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=5\\y=7\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=-7\\y=-5\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=-5\\y=-7\end{array}\right\}$

23. $x=9, y=4$, বা $x=4, y=9$

24. $x=2, y=5$; বা $x=-2, y=-5$

25 $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=1\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=1\\y=2\end{array}\right\}$ 26. $\left.\begin{array}{l}x=6\\y=10\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=4\\y=15\end{array}\right\}$

27. $\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\y=1\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=-1\\y=-\frac{1}{2}\end{array}\right\}$ 28. $\left.\begin{array}{l}x=a\\y=b\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=2a-b\\y=2b-a\end{array}\right\}$

29. $x=\dfrac{b\pm\sqrt{a^2+ab+b^2}}{a+b}, y=\dfrac{a\mp\sqrt{a^2+ab+b^2}}{a+b}$

30. $\left.\begin{array}{l}x=3\\y=6\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=6\\y=3\end{array}\right\}$ 31. $\left.\begin{array}{l}x=9\\y=4\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=4\\y=9\end{array}\right\}$

32. $\left.\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=2a\\y=2b\end{array}\right\}$ 33. $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=0\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=-12\\y=-\frac{28}{3}\end{array}\right\}$

TRIGONOMETRY

Exercise 1

1. $60°, \frac{1}{2}$ 2. $45°, 1$ 3. $30°, \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 4. 1   5. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

6. $\sqrt{3}$ 7. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 8. -1 9. $-\sqrt{2}$ 10. -2

11. $-\sqrt{3}$ 12. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 13. 0   14. 1   19. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

20. $\pm\frac{15}{17}$ 21. 0 22. $-\tan 38°$ 23. $-\cos 30°$

24. $-\sin\frac{\pi}{9}$ 25. $120°, 300°, -60°, -240°$ 26. $60°, 120°$

27. $30°, 150°$ 28. $30°, 330°$ 29. $60°, 90°, 270°, 300°$

30. $30°, 150°$ 31. $45°, 135°, 225°, 315°$

32. (i) $\pm\frac{1}{2}$ (ii) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (iii) ± 1

33. (i) $240°$ (ii) $330°$ (iii) $405°$ 34. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

35. -10 36. (i) $\sin\theta, -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) 3 39. -1.

Exercise 2

1. (i) $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ (ii) $2+\sqrt{3}$ (iii) $-(2+\sqrt{3})$

2. $\sin A\cos B\cos C - \cos A\sin B\cos C + \cos A\cos B\sin C$
$+\sin A\sin B\sin C$

3. $\sqrt{2}$ 4. $\frac{33}{65}$ 5. $-\frac{85}{36}$ 6. $-\frac{278}{29}$ 27. 0 28. 1.

Exercise 3

1. $\sin 7\theta + \sin 3\theta$ 2. $\sin 15\theta + \sin\theta$ 3. $\frac{1}{2}(\cos 6\theta + \cos\theta)$

4. $\cos(2A-B) - \cos(4A+B)$ 5. $\sqrt{3}\cos 20°$

6. $-2\cos 5\theta\sin 2\theta$ 7. $2\cos 5A\cos 2A$

8. $2\sin 8\theta\sin\theta$ 9. 0 10. $\frac{1}{2}$ 11. $\frac{1}{8}$ 12. [illegible]

13. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 29. $4\sin(B+C)\sin(C+A)\sin(A+B)$.

30. $\sin(A+B+C)+\sin(A-B-C)+\sin(A+B-C)$
$+\sin(A-B+C)$

32. $4\sin A\sin B\sin C$ 34. $\frac{3}{4}$ 35. $\tan 4A$

37. $\pm\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4(a^2-b^2)}}$.

Exercise 4

1. $\frac{3}{4}$ 2. $-\frac{23}{27}$ 3. $\frac{1}{7}$

4. (i) 2; (ii) $\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}, \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$ 25. $\frac{3}{2}$.

Exercise 5

1. $\frac{1}{4}\{\sqrt{3+\sqrt5}-\sqrt{5-\sqrt5}\}$, $\frac{1}{4}\{\sqrt{3+\sqrt5}+\sqrt{5-\sqrt5}\}$

3. $\frac{\sqrt5+1}{8}$ **4.** $\frac{3}{4}$ 5. $\frac{1}{2}$ 8. $\frac{16}{305}$, $\frac{49}{305}$

10. $\frac{1}{16}$ 11. $\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$, $\pm\sqrt{\left(\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)}$

12. $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\{-\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}\}$,

$\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\{-\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}\}$

21. No ; $2\sin\frac{\theta}{2}=-\sqrt{1+\sin\theta}+\sqrt{1-\sin\theta}$

24. $\frac{2}{\sqrt5}$, $\frac{1}{\sqrt5}$ **25.** $2\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}$.

CO-ORDINATE GEOMETRY

Exercise 1

1. (i) 13 (ii) 5 (iii) $4\sqrt{13}$ (iv) 10 (v) $\sqrt{2(a^2+b^2)}$
2. (a) $\sqrt{10}$ (b) 25 (c) 13 (d) 10 (e) $\sqrt{m^2+n^2}$
(f) $2\sqrt{b^2+d^2}$ (g) $(\cos\theta-\sin\theta)\sqrt2$ (h) $2\sqrt{a^2+b^2}$
3. (i) $(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ (ii) $(2, -1)$ (iii) $(\frac{7}{2}, -\frac{7}{2})$
4. (a) $(\frac{12}{7}, \frac{2}{7})$ (b) $(0, -\frac{11}{5})$ (c) $(-11, 16)$ (d) $(9, 8)$
5. $(3, 2\frac{2}{3})$ **6.** (i) 4 : 5 (ii) 3 : 2 (externally) **7.** 5 বা -1
8. 9 বা -3 **9.** 7 বা 17 **9.** (a) (8, 3) ; 13 একক **21.** $(\frac{3}{2}, 5)$
22. (3, 4) **23.** $3x+y=4$ **24.** (i) 11, (ii) $8\frac{1}{2}$, (iii) $22\frac{1}{2}$
(vi) -3 (v) $\frac{1}{2}\sin\theta$ (vi) 0 25. $\sqrt{41}$, $(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$
26. (1, 3) **27.** (3, 4) **27.** (a) (2, -11) **28.** $3\sqrt2$, 3, 3
29. 3 **29.** (a) $\frac{17\sqrt{13}}{13}$ **30.** -6 **32.** (i) 5·5 বর্গ একক
(ii) 9 বর্গ একক (iii) 10 বর্গ একক (iv) 17 বর্গ একক
33. (3, 4) ; 5 **35** (e) (5, 2), (5, 12) **39.** $1\frac{3}{8}$.

Exercise 2

1. $2x-y=4$
2. $6x+8y=25$
3. $2x-3=0$
4. $2y-3x=4$
5. $3x^2+4y^2-16y-16x+32=0$
6. $y^2=2x-1$
7. $x^2+y^2-10x-24y=0$
8. $x^2+y^2=k^2-a^2$
9. $2x-y+8=0$
10. $x+y=k$
11. $\frac{a}{2x}+\frac{b}{2y}=1.$

Exercise 3

1. (i) 3 (ii) $\frac{1}{7}$ (iii) $\frac{a}{b}$ (iv) -3 (v) 0.

2. (i) $-\frac{3}{2}$, (3, 0) (ii) 3, $(-2, 0)$ (iii) -1 ; (0, 0)
(iv) 2, $(-\frac{3}{2}, 0)$ (v) $-\cot\theta$, $(-r\sin\theta, 0)$.

3. (i) 90°, the line coincides with y-axis (ii) 45°, (0, 1)
(iii) 135°, (0, -5) (iv) 60°, (0, 2) (v) $\tan^{-1}\frac{3}{4}$, $(0, \frac{1}{4})$

4. (i) -3 and $\frac{2}{3}$ (ii) $-\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{4}$
(iii) $-r\operatorname{cosec}\theta$ and $r\sec\theta$.

5. (i) $2x+3y=6$ (ii) $4x+5y+20=0$ (iii) $3x-5y=9$
(iv) $5x-9y+13=0$ (v) $bx+ay=a$
(vi) $b^2x\cos\alpha+a^2y\sec\alpha=ab$.

6. (i) $9x+8y=29$ (ii) $bx-ay+ab=0$
(iii) $\frac{x}{c}\cos\frac{C+D}{2}+\frac{y}{d}\sin\frac{C+D}{2}=\cos\frac{C-D}{2}$
(iv) $2x-(p_1+p_2)y+2\alpha p_1p_2=0$
(v) $\frac{x}{h}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{y}{k}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
(vi) $3x+y=5$.

7. (i) $6x+11y-9=0$, $11x+2y-71=0$ and $5x-9y+47=0$
(ii) $x+y=3$, $12x-5y=70$ and $5x-12y+70=0$
(iii) $2x+5y=0$, $11x-y-57=0$ and $3x-2y=0$.

8. (i) $x\cos 30°+y\sin 30°=4$
(ii) $x\cos 135°+y\sin 135°=7$
(iii) $x\cos 225°+y\sin 225°=2\sqrt{2}$
(iv) $-\frac{6}{\sqrt{205}}x+\frac{13}{\sqrt{205}}y=\frac{19}{\sqrt{205}}$.

9. (i) 1 (ii) 2 (iii) $\frac{7}{\sqrt{13}}$ (iv) $\frac{ab}{\sqrt{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)}}$

10. (a) $y=\sqrt{3}x+1$ (b) $x\sqrt{3}+y=10$
(c) $x+y+2=0$ (d) $x-y+1=0$
(e) $x-y+1=0$, (1, 2) (f) $3x-2y+30=0$
(g) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ (h) $x+y=5$
(i) $x(c-a)+y(d-b)=c^2+d^2-a^2-b^2$.

11. $9x-2y+1=0$. 12. $2x-3y=0$ and $8x-3y=0$.
13. $3x+2y-12=0$ or $x+y=5$.
14. $x+10y-28=0$. 16. $x+\sqrt{3}y=\pm 6$.
17. $x-y+1=0$; (1, 2) 18. $\frac{x}{3}-\frac{y}{3}=1$

19. (a) কোণ$=\tan^{-1}(-\frac{4}{3})$, y-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে 3.
(b) $2\sqrt{10}$ (c) 2, $\frac{1}{3}$ 20. $3x+11y-15=0$.
21. (i) $x'^2=4y'$ (ii) $2x'^2+3y'^2-12x'+9y'+14=0$.
22. $x'^2+y'^2+4x'+3y'+7=0$, $x'^2+2cx'+y'^2=0$.

Exercise 4

1. (a) $y=7$ (b) $x+3=0$ 2. (i) $\tan^{-1}\frac{1}{7}$
(ii) 45° (iii) 45° (iv) $\tan^{-1}\frac{a^2-b^2}{2ab}$ (v) 90°.

3. (i) $(-\frac{11}{26}, \frac{41}{26})$ (ii) $(1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{5})$ (iii) $(\frac{20}{9}, \frac{20}{9})$, $9x+9y=40$
(iv) $\left(p\cos\frac{\theta+\phi}{2}\sec\frac{\theta-\phi}{2}, p\sin\frac{\theta+\phi}{2}\sec\frac{\theta-\phi}{2}\right)$

4. (a) $4x-3y+3=0$ (b) $3x+4y-25=0$
(c) $y-3x+7=0$ (d) $3x+y-5=0$
(e) $3x+7y=0$ (f) $12x+18y+11=0$
(g) $x+3y-1=0$ (h) $x+y+2=0$. (i) $x=y$
(j) $119x+102y-125=0$ (k) $2x+3y+1=0$.

5. (a) $(-2, 1)$ (b) $(13, 7)$ (c) $\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ab}{a+b}\right)$
(d) $\left(\frac{d}{a+b+c}, \frac{d}{a+b+c}\right)$ (e) $\left(\frac{15}{17}, \frac{31}{17}\right)$.

6. (a) -1. (b) 0. 10. $3x-y=7$, $8\frac{1}{6}$ বর্গ একক।

11. $121y-88x=371$ 13. $\left(\frac{b}{3}, \frac{b}{3}\right)$

15. (a) $3x-y=7$ এবং $x+3y=9$.
(b) $x=7$ এবং $x+\sqrt{3}y=7+9\sqrt{3}$.
(c) $x=0$ এবং $y+\sqrt{3}x=0$. (d) $y=x\tan\theta$.

16. $x=3$; $y=4$; $4\frac{1}{2}$ বর্গ একক।

17. $9x-7y-1=0$ এবং $7x+9y-73=0$.

18. $7x-y+19=0$ এবং $x-5y+27=0$.

19. (a) $\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})$ (b) $\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}y=\pm 5$, 10 ও $\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

20. (a) $\frac{5}{4}$ (b) $\frac{7\sqrt{5}}{3}$ 21. $5x-12y+16=0$; 13.

22. 24 বর্গ একক। 23. (0, 0), (10, 0), (7, $\sqrt{3}$) এবং (3, $\sqrt{3}$) , $7\sqrt{3}$ বর্গ একক

24. $x(b-b')-y(a-a')=a'b-ab'$,
$x(b-b')+y(a-a')=ab-a'b'$.

26. $12x-5y+61=0$, $12x-5y+100=0$.

Exercise 5

1. (a) মূলবিন্দুর দিকে (b) মূলবিন্দুর বিপরীত দিকে

2. (a) বিপরীত দিকে (b) বিপরীত দিকে।

3. (a) $\frac{17\sqrt{13}}{13}$ (b) $\frac{3}{13}$ 4. $\frac{7}{\sqrt{2}}$, $\frac{21}{\sqrt{29}}$, $\frac{21}{\sqrt{29}}$.

7. $x-2y+11=0$ 8. (3, 0) 9. (−3, 1)

10. (a) $224x-128y+83=0$ এবং $16x+28y-203=0$.
(b) $y-x+12=0$ এবং $7y+7x-36=0$.
(c) $x(\cos\theta-\cos\phi)+y(\sin\theta-\sin\phi)=p_1-p_2$,
এবং $x(\cos\theta+\cos\phi)+y(\sin\theta+\sin\phi)=p_1+p_2$.

11. (a) $\frac{11}{5}$ (b) $\frac{c_1-c_2}{\sqrt{1+m^2}}$.

12. $\left[\frac{a}{b}(b\pm\sqrt{a^2+b^2}), 0\right]$

13. $y=a$ এবং $4x-3y+3a=0$

14. $(3l-2m+n)^2=25(l^2+m^2)$. 16. $6x-4y-3=0$

17. (i) $x=y$; $x+y-2=0$ (প্রথম) (ii) $x=6$; $y=2$ (দ্বিতীয়)

(iii) $x(\cos\alpha-\cos\beta)+y(\sin\alpha-\sin\beta)=p-q$;

$x(\cos\alpha+\cos\beta)+y(\sin\alpha+\sin\beta)=p+q$ (প্রথম).

18. (a) $7x-9y+2=0$. (b) $4x+7y+11=0$.

20. $7x+y=18$. 21. $(-4, 3)$; $(-6, 0)$.

22. (a) $y=6$ এবং $4x+3y-30=0$.

(b) $4x-3y-25=0$ এবং $3x+4y-25=0$.

24. (a) $(\frac{11}{3}, -\frac{10}{3})$ (b) $(\frac{6}{5}, -\frac{4}{5})$ 25. $4x-3y+5=0$

26. $x(3+\sqrt{17})+y(5+\sqrt{17})=15+4\sqrt{17}$,

$x(2\sqrt{34}-3\sqrt{5})+y(\sqrt{34}-5\sqrt{5})=6\sqrt{34}-15\sqrt{5}$,

এবং $x(4+\sqrt{10})+y(2+\sqrt{10})=12+4\sqrt{10}$.

27. (a) $(\frac{5}{2}, 11)$ (b) $x+2y+97=0$; $7x-9y-310=0$,

$253x-69y-184=0$; এবং $(-11, -43)$.

APPENDIX

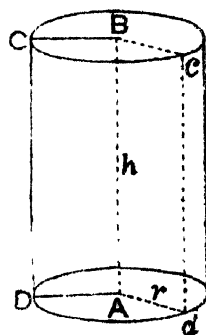
MENSURATION

দ্রষ্টব্য : Circular cylinder ও Sphere কোর গণিতের সিলেবাসের অন্তর্ভুক্ত বলিয়া এই পুস্তকে আগে দেওয়া হয় নাই ; এইগুলি সম্বন্ধে H. S. পরীক্ষায় প্রশ্ন থাকে বলিয়া পরিশিষ্টরূপে এই সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে :

Circular cylinder (বৃত্তাকার চোঙ)

1. আয়তক্ষেত্রের একটি বাহুকে অক্ষ (axis) করিয়া আয়তক্ষেত্রটিকে ঘুরাইলে যে ঘন উৎপন্ন হয় তাহাকে **লম্ব বৃত্তাকার চোঙ** (right circular cylinder) বলে।

ইহার উদাহরণস্বরূপ বালির কৌটা, ড্রাম, গোটা পেন্সিল, উপর্যুপরি স্থাপিত পয়সার স্তূপ প্রভৃতি ধরা যাইতে পারে।

ABCD আয়তক্ষেত্রটির AB বাহুকে স্থির রাখিয়া বা অক্ষ ধরিয়া উহাকে ঘুরাইলে CD ঘুরিয়া আসিয়া একটি বক্রতলবিশিষ্ট লম্ব বৃত্তাকার চোঙ উৎপন্ন করিবে। এইজন্য CDকে উৎপাদকরেখা (generating line) এবং ABকে অক্ষ বলা হয়। C ও D যথাক্রমে B ও A হইতে সতত সমদূরবর্তী থাকিবে। অতএব, ইহারা দুইটি সমান্তরাল বৃত্ত অঙ্কিত করিবে। এই দুই বৃত্তকে প্রান্ততল (ends) বলে। সুতরাং লম্ব বৃত্তাকার চোঙের প্রান্ততলদ্বয় দুইটি বৃত্ত। AB এই দুই তলের উপর লম্ব। AB রেখাকে চোঙটির উচ্চতা বলে। চোঙটি যে তলের উপর দণ্ডায়মান থাকে তাহাকে চোঙটির ভূমি বলে।

চিত্র নং 1

2. লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল

একটি ফাঁপা চোঙের বক্রপৃষ্ঠের গায়ে খাড়াভাবে সরলরেখা টানিয়া চোঙটিকে ঐ রেখা বরাবর কাটিয়া উহাকে ছড়াইয়া দিলে উহার বক্রপৃষ্ঠটি একটি সমতলে পরিণত হয়। ঐ সমতল অবশ্যই একটি আয়তক্ষেত্র হইবে এবং

চোঙটির পরিধি ও উচ্চতা ঐ আয়তক্ষেত্রের দুইটি বাহু অর্থাৎ দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ হইবে। অতএব, বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = ভূমির পরিধি × উচ্চতা।

কোন লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা h ও ব্যাসার্ধ r হইলে

(ক) চোঙের **বক্রপৃষ্ঠের** (curved surface-এর) **ক্ষেত্রফল**

$=$ ভূমির পরিধি × উচ্চতা $= 2\pi rh$ বর্গ একক।

(খ) উহার সমগ্র পৃষ্ঠের (whole surface-এর) ক্ষেত্রফল

$=$ বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল + প্রান্তদ্বয়ের ক্ষেত্রফল

$= (2\pi rh + 2\pi r^2)$ বর্গ একক ($\because$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$)

$= 2\pi r(h+r)$ বর্গ একক।

(গ) চোঙের ঘনফল (volume) = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$= \pi r^2 h$ ঘন একক।

উদাহরণমালা A

[$\pi = \frac{22}{7}$ ধরিবে]

উদা. 1. The height of a right circular cylinder is 1 m. 4 dm. and the diameter of the base is 5 m. Find the area of the curved surface of the cylinder.

[একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 1 মি. 4 ডেসি মি. এবং ভূমির ব্যাস 5 মিটার। উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।]

বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$; এখানে r (ব্যাসার্ধ) $= \frac{1}{2}$ ব্যাস $= \frac{5}{2}$ মি.,

এবং h (উচ্চতা) $= 1$ মি. 4 ডেসি মি. $= \frac{7}{5}$ মিটার,

$\therefore$ নির্ণেয় বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{5}{2}$ মি. $\times \frac{7}{5}$ মি.

$= 22$ বর্গ মিটার।

উদা. 2. The height of a cylindrical column is 9 metres and the radius of the base is 1·75 metres. Find the area of the whole surface.

[একটি চোঙাকার স্তম্ভের উচ্চতা 9 মিটার এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 1·75 মিটার। উহার সমগ্র তলপরিমাণ কত ?]

এখানে ব্যাসার্ধ $= 1{\cdot}75$ মি. $= \frac{7}{4}$ মি. ; উচ্চতা $= 9$ মি.।

$\therefore$ স্তম্ভটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{4}$ মি. $\times 9$ মি.

$= 99$ বর্গ মিটার।

আবার, ∵ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=\pi r^2$,

∴ ইহার বৃত্তাকার প্রান্তভলদ্বয়ের ক্ষেত্রফল $=2\pi r^2$

$=2\times\frac{22}{7}\times(\frac{7}{4})^2$ বর্গ মি. $=19\frac{1}{4}$ বর্গ মি.

∴ সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল $=(99+19\frac{1}{4})$ বর্গ মি. $=118\frac{1}{4}$ বর্গ মি.

$=118$ বর্গ মি. 25 বর্গ ডেসি মিটার।

3. Find the radius of the base of a cylindrical column, 8 metres high, whose curved surface is 2464 square metres.

[কোন চোঙাকার স্তম্ভের উচ্চতা 8 মিটার এবং বক্রতলের ক্ষেত্রফল 2464 বর্গ মিটার হইলে উহার ভূমির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।]

চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $=2\pi rh$.

এখানে ঐ প্রদত্ত ক্ষেত্রফল $=2464$ বর্গ মি. এবং উচ্চতা $h=8$ মি.

∴ $2\pi rh=2464$ বর্গ মি. ($r=$ব্যাসার্ধ),

বা, $2\times\frac{22}{7}\times r\times 8$ মি. $=2464$ বর্গ মি.,

∴ $r=\frac{2464\times 7}{2\times 22\times 8}$ মি. $=49$ মি.

∴ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ $=49$ মিটার।

উদা. 4. The height of a right circular cylinder is 16 metres and the radius of the base is 3 m. 5 dm. Find its volume.

[একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 16 মিটার এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 3 মি. 5 ডেসি মিটার হইলে উহার ঘনফল কত ?]

চোঙটির ঘনফল = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা $=\pi r^2 h$.

এখানে $r=3\frac{1}{2}$ মি., $h=16$ মি.

∴ নির্ণেয় ঘনফল $=\frac{22}{7}\times(\frac{7}{2})^2\times 16$ ঘন মি. $=616$ ঘন মিটার।

উদা. 5. The diameter of the base of a cylindrical pillar is 7 metres and its height is 12 metres. Find the cost of constructing it at Rs. $2\frac{1}{3}$ per cubic metre.

[একটি চোঙাকার স্তম্ভের ভূমির ব্যাস 7 মিটার এবং উচ্চতা 12 মিটার। প্রতি ঘন মিটারে $2\frac{1}{3}$ টাকা হারে উহার নির্মাণ খরচ কত হইয়াছিল ?]

এখানে $r=\frac{7}{2}$ মিটার, $h=12$ মিটার,

∴ স্তম্ভটির ঘনফল $=\pi r^2 h=\frac{22}{7}\times(\frac{7}{2})^2\times 12$ ঘন মি.

$=22\times 7\times 3$ ঘন মিটার. ;

প্রতি ঘন মিটারের খরচ $=2\frac{1}{3}$ টা. $=\frac{7}{3}$ টাকা।

∴ নির্ণেয় নির্মাণ খরচ $=\frac{7}{3}$ টা. $\times 22\times 7\times 3=1078$ টাকা।

উদা. 6. An iron pipe is 3 inches in bore, $\frac{1}{2}$ inch thick and 20 feet long. Find its weight supposing that a cubic inch of iron weighs 4·526 ounces. [R. U. S.]

[অর্ধ ইঞ্চি পুরু লৌহপাতে প্রস্তুত একটি নলের ভিতরের ব্যাস 3 ইঞ্চি ও দৈর্ঘ্য 20 ফুট। এক ঘন ইঞ্চি লৌহের ওজন 4·526 আউন্স হইলে ঐ নলটির ওজন কত ?]

নলটির দৈর্ঘ্য = 20 ফুট = 240 ইঞ্চি।

নলটির ভিতরের ব্যাসার্ধ $\frac{3}{2}$ ইঞ্চি, লৌহ পাতটি $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি পুরু বলিয়া নলটির বাহির পর্যন্ত ব্যাসার্ধ হইবে $(\frac{3}{2}+\frac{1}{2})$ বা 2 ইঞ্চি।

∴ নলটি নিরেট হইলে উহার গোলাকার প্রান্তের ক্ষেত্রফল হইত $\frac{22}{7}\times 2^2$ বর্গ ইঞ্চি $=\frac{88}{7}$ বর্গ ইঞ্চি,

এবং উহার ফাঁপা ভিতরের গোলাকার প্রান্তের ক্ষেত্রফল

$=\frac{22}{7}\times(\frac{3}{2})^2$ বর্গ ই., $=\frac{99}{14}$ বর্গ ইঞ্চি।

∴ লৌহ পাতটির ঘনফল $=(\frac{88}{7}-\frac{99}{14})$ বর্গ ই. × দৈর্ঘ্য

$=\frac{11}{2}$ বর্গ ই. × 240 ই. = 1320 ঘন ইঞ্চি।

এক ঘন ইঞ্চি লৌহ পাতের ওজন = 4·526 আউন্স,

নির্ণেয় ওজন = 4·526 আ. × 1320 $=\frac{4·526\times 1320}{16}$ পাউণ্ড

= 373·395 পাউণ্ড।

উদা. 7. The curved surface of a cylinder is 1000 square centimetres and the diameter of the base is 20 cms. ; find the volume of the cylinder. Also find the height to the nearest millimetre. [C. U. '34]

[একটি চোঙের বক্রতল 1000 বর্গ সেণ্টিমিটার এবং ভূমির ব্যাস 20 সেণ্টি মিটার। উহার ঘনফল কত ? আসন্ন মিলিমিটার পর্যন্ত উহার উচ্চতা নির্ণয় কর।]

চোঙটির ভূমির পরিধি $=2\pi r=20\pi$ সে. মি.

[∵ $2r$ (ব্যাস) = 20 সে. মি.]

চোঙের নির্ণেয় উচ্চতা = $(1000 \div 20\pi)$ সে. মি. $=\frac{50}{\pi}$ সে মি.

$=\frac{50}{3·1416}$ সে. মি. [$\pi=3·1416$ ধরিয়া]

= 15 সে. মি. 9 মিলি মি. (আসন্ন)।

আবার, চোঙটির ঘনফল $=\pi r^2 h=\pi\times(10)^2\times\frac{50}{\pi}$ ঘন সে. মি.

= 5000 ঘন সেণ্টিমিটার।

উদা. 8. The curved surface of a cylindrical pillar is 264 square metres and its volume is 924 cubic metres. Find the diameter and the height of the pillar.

[একটি চোঙাকার স্তম্ভের বক্রতল 264 বর্গ মিটার ও ঘনফল 924 ঘন মিটার। উহার ব্যাস ও উচ্চতা নির্ণয় কর।]

মনে কর, স্তম্ভটির ব্যাসার্ধ ও উচ্চতা যথাক্রমে r ও h মিটার।

∴ প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই $2\pi rh = 264$...(1) এবং $\pi r^2 h = 924$...(2)

(2)কে (1) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $\frac{\pi r^2 h}{2\pi rh} = \frac{924}{264}$, বা, $\frac{r}{2} = \frac{7}{2}$.

∴ $r = 7$. ∴ নির্ণেয় ব্যাস $= 2r = 14$ মিটার।

আবার, (1) হইতে পাই $2\pi \times 7 \times h = 264$,

বা, $2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times h = 264$, বা, $44h = 264$, ∴ $h = 6$.

∴ নির্ণেয় উচ্চতা = 6 মিটার।

উদা. 9. How many pieces of coin $\frac{1}{4}$ cm. thick and 2 cm. in diameter can be made by melting a rectangular parallelepiped of metal with dimensions 22 cm., 6 cm. and 4 cm. ?

[22, 6 ও 4 সেন্টি মিটার মাত্রাবিশিষ্ট একটি ধাতু নির্মিত আয়তঘন গলাইয়া $\frac{1}{4}$ সে. মিটার পুরু 2 সে. মিটার ব্যাসের কতগুলি মুদ্রা প্রস্তুত করা যায় ?]

ধাতব আয়তঘনটির ঘনফল $= 22 \times 6 \times 4$ ঘন সে. মি., এবং

প্রত্যেক মুদ্রার ঘনফল $= \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times (1)^2 \times \frac{1}{4}$ ঘন সে. মি.

$= \frac{11}{14}$ ঘন সে. মি.

∴ নির্ণেয় মুদ্রাসংখ্যা $= (22 \times 6 \times 4) \div \frac{11}{14} = 672$.

উদা. 10. A thick hollow cylindrical pipe is 6 inches in length, and its whole surface (outer and inner curved surfaces and the plane edges) is 308 sq. inches. If the external diameter of the pipe is 8 inches, and if its material weighs 4 ozs. per cubic inch, find its weight. [$\pi = \frac{22}{7}$] [H. S. '60]

[একটি পুরু ফাঁপা চোঙাকার ধাতুনির্মিত নলের দৈর্ঘ্য 6 ইঞ্চি এবং সমগ্রতলের (ভিতর ও বাহিরের বক্রতল ও প্রান্তদ্বয়ের) ক্ষেত্রফল 308 বর্গ ইঞ্চি। উহার বাহিরের ব্যাস 8 ইঞ্চি এবং এক ঘন ইঞ্চি ধাতুর ওজন 4 আউন্স হইলে, নলটির ওজন কত ?]

মনে কর, নলটি x ইঞ্চি পুরু।

$\because$ ইহার বাহির পর্যন্ত ব্যাসার্ধ 4 ইঞ্চি, $\therefore$ ইহার ভিতরের ব্যাসার্ধ $(4-x)$ ইঞ্চি।

$\because$ সর্তানুসারে বাহির ও ভিতরের বক্রতলের এবং প্রান্ত তলদ্বয়ের ক্ষেত্রফল $= 308$ বর্গ ইঞ্চি,

$\therefore \quad 2\pi \times 4 \times 6 + 2\pi(4-x) \times 6 + 2\{\pi.4^2 - \pi(4-x)^2\} = 308,$

বা, $\quad 2\pi(24+24-6x) + 2\pi(16-16+8x-x^2) = 308,$

বা, $\quad 2\pi(48-6x+8x-x^2) = 308,$

বা, $\quad \frac{44}{7}(48+2x-x^2) = 308,\quad$ বা, $\; 48+2x-x^2 = \frac{308 \times 7}{44} = 49,$

বা, $\quad x^2-2x+1=0,\quad$ বা, $\;(x-1)^2=0,\quad \therefore \quad x=1$ ইঞ্চি.

$\therefore \quad$ নলটির ভিতরের ব্যাসার্ধ $=(4-1)$ ই. $=3$ ইঞ্চি।

$\therefore \quad$ নলটির ধাতুর ঘনফল $=(\pi \times 4^2 \times 6 - \pi \times 3^2 \times 6)$ ঘন ই.

$= \frac{22}{7} \times 6(4^2-3^2)$ ঘন ই. $= \frac{22}{7} \times 6 \times 7$ ঘন ই. $= 132$ ঘন ই।

$\therefore \quad$ নলটির নির্ণেয় ওজন $= 4$ আউন্স $\times 132 = \frac{4 \times 132}{16}$ পা. $= 33$ পাউণ্ড।

উদা. 11. A right circular cylinder and a right circular cone have equal bases and equal heights If their curved surfaces are in the ratio 8 : 5, show that the radius of the base is to its heiget as 3 : 4. [H. S. '63]

[একটি লম্ব বৃত্তকার চোঙ ও শঙ্কুর সমান ভূমি ও সমান ব্যাস। উহাদের বক্রতল দুইটির অনুপাত 8 : 5 হইলে, প্রমাণ কর যে ভূমির ব্যাসার্ধ ও উচ্চতার অনুপাত 3 : 4.]

মনে কর, চোঙ ও শঙ্কু উভয়েরই ভূমির ব্যাসার্ধ ও উচ্চতা যথাক্রমে r ও h.

চোঙটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$ এবং শঙ্কুটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r\sqrt{r^2+h^2}$.

$\therefore \quad$ প্রদত্ত সর্তানুসারে $\dfrac{2\pi rh}{\pi r\sqrt{r^2+h^2}} = \dfrac{8}{5},\;$ বা,

বা, $\quad \dfrac{h^2}{r^2+h^2} = \dfrac{16}{25},\;$ বা, $\; 9h^2 = 16r^2,\;$ বা, $\; \dfrac{r^2}{h^2} = \dfrac{9}{16},\; \therefore \dfrac{r}{h} = \dfrac{3}{4}.$

$\therefore \quad$ ভূমির ব্যাসার্ধ : উচ্চতা $= 3 : 4.$

উদা. 12. The volumes of a right circular cylinder and a right circular cone standing on the same base are as 3 : 2. Show that the height of the cone is double the height of the cylinder. [C. Pre. U. '63]

[একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙ ও শঙ্কুর ভূমি দুইটি সমান এবং ঘনফলদ্বয়ের অনুপাত 3 : 2 : প্রমাণ কর যে শঙ্কুটির উচ্চতা চোঙের উচ্চতার দ্বিগুণ।]

মনে কর, h ও h' যথাক্রমে চোঙের ও শঙ্কুর উচ্চতা এবং উহাদের সাধারণ ভূমির ব্যাসার্ধ r.

একণে, চোঙটির ঘনফল $= \pi r^2 h$ এবং শঙ্কুটির ঘনফল $= \frac{1}{3}\pi r^2 h'$.

প্রদত্ত সর্তানুসারে $\frac{\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi r^2 h'} = \frac{3}{2}$, বা, $\frac{h}{\frac{1}{3}h'} = \frac{3}{2}$.

বা $\frac{h}{h'} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$, $\therefore h' = 2h$.

$\therefore$ শঙ্কুটির উচ্চতা চোঙটির উচ্চতার দ্বিগুণ।

উদা. 13. A vertical cylindrical vessel of radius 1 foot is partly filled with water, and into it is plunged a soild cone whose height is equal to the diameter of the base. If, when the cone is completely immersed, the water rises 4 inches find the dimensions of the cone.

[একটি উলম্ব চোঙাকার পাত্রের ব্যাসার্ধ এক ফুট এবং উহা আংশিকভাবে জলপূর্ণ আছে। উহার মধ্যে একটি ঘন শঙ্কু সম্পূর্ণ নিমজ্জিত করায় জলতল 4 ইঞ্চি উত্থিত হইল। শঙ্কুটির উচ্চতা উহার ভূমির ব্যাসের সমান হইলে, উহার মাত্রাগুলি নির্ণয় কর।]

যদি শঙ্কুটির উচ্চতা h হয়, তবে সর্তানুসারে উহার ভূমির ব্যাসার্ধ হইবে $\frac{1}{2}h$

$\therefore$ শঙ্কুর ঘনফল $= \frac{1}{3}\pi(\frac{1}{2}h)^2 \times h = \frac{1}{12}\pi h^3$.

আবার, শঙ্কুটি চোঙাকার পাত্রের জলে সম্পূর্ণ নিমজ্জিত হইলে, জলতল 4 ইঞ্চি উত্থিত হয়।

$\because$ শঙ্কু কর্তৃক অপসারিত জলের ঘনফল $=$ শঙ্কুটির ঘনফল,

$\therefore$ এখানে অপসারিত জলের ঘনফল $= 1$ ফুট ব্যাসার্ধ ও 4 ইঞ্চি উচ্চতা বিশিষ্ট চোঙের ঘনফল $= \pi r^2 h = \pi \times (12)^2 \times 4$ ঘন ই.

$\therefore$ $\frac{1}{12}\pi h^3 = \pi \times 12^2 \times 4$, বা, $h^3 = 12^3 \times 4$,

$\therefore$ $h = 12\sqrt[3]{4}$ ইঞ্চি $= 12 \times 1{\cdot}58$ ই. (আসন্ন)

$= 19$ ইঞ্চি (আসন্ন)।

অতএব, শঙ্কুটির উচ্চতা $= 19$ ইঞ্চি (আসন্ন)

এবং ভূমির ব্যাসার্ধ $= \frac{1}{2}h = \frac{1}{2} \times 19$ ই. $= 9{\cdot}5$ ইঞ্চি (আসন্ন)।

Exercise A

[Take $\pi = \frac{22}{7}$]

[$\pi = \frac{22}{7}$ ধরিবে]

1. The length of a hollow right cylinder is 10 metres and the diameter of the base is 7 metres. Find the area of its curved surface.

[একটি ফাঁপা লম্ব চোঙের দৈর্ঘ্য 10 মিটার এবং ভূমির ব্যাস 7 মিটার। উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল কত ?]

2. The circumference of the base of a cylindrical column is 4 ft. 7 in. and its height is 12 yards. Find the area of its curved surface.

[একটি চোঙাকার স্তম্ভের ভূমির পরিধি 4 ফুট 7 ইঞ্চি এবং উচ্চতা 12 গজ। উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।]

3. Find the volume and the area of the curved surface of a right circular cylinder of height 4 ft. and radius of whose base is 3 feet. [C. U. '39]

[একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 4 ফুট এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 3 ফুট। উহার ঘনফল ও বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।]

4. The diameter of the ends of a right circular cylinder is 2m. 8 dm. Find the area of its two ends.

[একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের প্রান্তীয় ব্যাস 2 মিটার 8 ডেসি মিটার, উহার প্রান্তদ্বয়ের ক্ষেত্রফল কত ?]

5. The height of a right circular cylinder is 12 cm, and the diameter of the base is 7 cm. Find the area of the whole surface.

[একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 12 সেন্টিমিটার এবং ভূমির ব্যাস 7 সেন্টিমিটার। উহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।]

6. The height of a cylindrical pillar is 14m. and its curved surface 264 square metres. Find the radius of its base.

[একটি চোঙাকার স্তম্ভের উচ্চতা 14 মিটার এবং উহার বক্রতল 264 বর্গ মিটার। উহার ভূমির ব্যাসার্ধ কত ?]

7. The height of a right circular chimney is 30 ft. and the radius of the base is 1 ft. 2 in. What is the cost of painting its curved surface at 2 as. per square foot ?

[একটি লম্ব বৃত্তাকার চিমনির উচ্চতা 30 ফুট এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 1 ফুট 2 ইঞ্চি। প্রতি বর্গফুটে 2 আনা হিসাবে উহার বক্রতলটি রং করিতে কত ব্যয় হইবে ?]

8. If it costs Rs. 41. 25P. to polish the curved surface of a cylindrical pillar 15 metres high at 25 P. per square metre find the radius of its base.

[একটি 15 মিটার উচ্চ চোঙাকার স্তম্ভের বক্রতলটি রং করিতে 41 টাকা 25 পয়সা ব্যয় হইল। প্রতি বর্গ মিটারে 25 পয়সা ব্যয় হইলে ভূমির ব্যাসার্ধ কত ?

9. The diameter of a right circular cylinder 14m. high is 6 metres. Find its volume.

[14 মিটার উচ্চ একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভূমির ব্যাস 6 মিটার। উহার ঘনফল নির্ণয় কর।]

10. The volume of a cylindrical pillar 1 Dm. 4m. high is 539 cubic metres. Find the diameter of the base.

[1 ডেকামিটার 4 মিটার উচ্চ একটি চোঙাকার স্তম্ভের ঘনফল 539 ঘন মিটার, উহার ভূমির ব্যাস কত ?]

11. The diameter of the base of a cylindrical pillar is 4 metres and its height is 21 metres. Find the cost of constructing the pillar at 1·6 rupees per cubic metre.

[একটি চোঙাকার স্তম্ভের ভূমির ব্যাস 4 মিটার এবং উহার উচ্চতা 21 মিটার। প্রতি ঘন মিটারে 1·6 টাকা হিসাবে উহার নির্মাণ খরচ কত ?]

12. A cubic inch of gold is drawn into a wire, 1000 yds long, find the diameter of the wire to the nearest thousandth of an inch. [C. U. '58]

[এক ঘন ইঞ্চি স্বর্ণকে 1000 গজ দীর্ঘ একটি সরু তারে পরিণত করা হইল। ঐ তারের ব্যাস এক ইঞ্চির আসন্ন সহস্রাংশ পর্যন্ত নির্ণয় কর।]

13. The external and internal radii of the base of a hollow circular cylinder are 14 cm. and 7 cm. respectively Find the area of one of its ends.

[কোন ফাঁপা বৃত্তাকার চোঙের ভূমির বাহিরের ও ভিতরের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 14 ও 7 সে. মিটার। উহার একটি প্রান্তের ক্ষেত্রফল কত ?]

14. Find the weight of a cast-iron pipe whose length is 9 feet, the bore 3 in. and thickness of the metal is 1 inch. A cubic inch of cast-iron weighs $\frac{1}{4}$ lb [R. U. S.]

[এক ইঞ্চি পুরু লৌহপাতে নির্মিত কোন ফাঁপা নলের দৈর্ঘ্য 9 ফুট ও ভিতরের ব্যাস 3 ইঞ্চি। এক ঘন ইঞ্চি পাতের ওজন $\frac{1}{4}$ পাউণ্ড হইলে নলটির ওজন কত ?]

15. 11 cubic centimetres of iron is drawn into a wire 56 cm. long. Find the radius of the end of the wire.

[11 ঘন সেন্টিমিটার লৌহকে পিটিয়া 56 সেন্টিমিটার দীর্ঘ একটি তার প্রস্তুত করা হইল। তারটির প্রান্তীয় ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।]

16. Find the cubic inches of material in a cylindrical tube, the radius of the outer surface being 10 inches, the thickness 2 inches and the height 9 inches. [R. U. S.]

[9 ইঞ্চি উচ্চ ও 2 ইঞ্চি পুরু একটি ধাতু নির্মিত চোঙাকার নলের বাহির দিক পর্যন্ত ব্যাসার্ধ 10 ইঞ্চি। ইহাতে কত ঘন ইঞ্চি ধাতু আছে ?]

Sphere (গোলক)

3. কোন অর্ধবৃত্তের ব্যাসকে অক্ষ করিয়া অর্ধবৃত্তটিকে ঘুরাইলে যে ঘন উৎপন্ন হয় তাহাকে গোলক (sphere) বলে। ইহা একটি তলদ্বারা বেষ্টিত।

এই অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধই গোলকের ব্যাসার্ধ হয়।

গোলাকার মার্বেল, খেলিবার বল প্রভৃতি গোলকের দৃষ্টান্ত।

কোন গোলকের ব্যাসার্ধ r হইলে

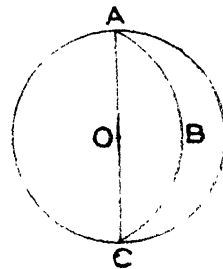
(ক) গোলকের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল

$$= \pi \times (\text{ব্যাস})^2$$

$$= 4\pi r^2 \text{ বর্গ একক ;}$$

অথবা, বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = উৎপাদক বৃত্তের পরিধি × ব্যাস

$$= 2\pi r \times 2r \text{ বর্গ একক।}$$

(খ) গোলকের ঘনফল $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক।

উদাহরণমালা B

[$\pi = \frac{22}{7}$ ধরিবে]

উদা. 1. Find the surface and the volume of a sphere whose diameter is 14 metres.

[14 মিটার ব্যাসবিশিষ্ট গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল ও ঘনফল কত ?

এখানে r (ব্যাসার্ধ) = 7 মি.,

∴ নির্ণেয় বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times (7)^2$ বর্গমি. = 616 বর্গ মি. ।

নির্ণেয় ঘনফল $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (7)^3$ ঘন মি. = $1437\frac{1}{3}$ ঘন মিটার ।

উদা. 2. The surface of a sphere is 9856 sq. cm. Find its diameter. [কোন গোলকের পৃষ্ঠতল 9856 বর্গ সে. মি., উহার ব্যাস কত ?

গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$,

এখানে $4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 9856$ বর্গ সে. মি.,

বা, $r^2 = \frac{9856 \times 7}{4 \times 22}$ বর্গ সে. মি. = 784 বর্গ সে. মি.

∴ $r = \sqrt{784}$ সে. মি. = 28 সে. মি.

∴ নির্ণেয় ব্যাস $= 2r = 56$ সেন্টিমিটার ।

উদা. 3. There are as many cubic inches in the volume of a sphere as there are square inches in the area of its curved surface. Find the radius of the sphere.

[একটি গোলকের পৃষ্ঠতল যত বর্গইঞ্চি উহার ঘনফল তত ঘন ইঞ্চি. গোলকটির ব্যাসার্ধ কত ?]

মনে কর, গোলকটির ব্যাসার্ধ $= r$ ইঞ্চি ।

∴ ইহার পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গ ইঞ্চি,

এবং ইহার ঘনফল $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন ইঞ্চি,

∴ সর্তানুসারে $\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2$, বা, $\frac{r^3}{r^2} = \frac{4\pi}{\frac{4}{3}\pi}$, ∴ $r = 3$.

∴ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ = 3 ইঞ্চি ।

উদা. 4. Find the radius of a sphere whose surface is equal to the curved surface of a right circular cylinder having height and diameter each 10 metres in length.

[একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা ও ব্যাস প্রত্যেকটি 10 মিটার। যে গোলকের পৃষ্ঠতল চোঙটির বক্রতলের সমান তাহার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর ।]

চোঙটির ব্যাসার্ধ = 5 মিটার,

উহার বক্রতল $= 2\pi rh = 2\pi \times 5 \times 10$ বর্গ মি. $= 100\pi$ বর্গ মিটার।

আবার, গোলকের পৃষ্ঠতল $= 4\pi r^2$ (rকে গোলকের ব্যাসার্ধ ধরিয়া)।

$\therefore$ সর্তানুসারে $4\pi r^2 = 100\pi$ বর্গ মি., বা, $r^2 = 25$ বর্গ মিটার।

$\therefore$ $r = 5$ মিটার। $\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ = 5 মিটার।

উদা. 5. A leaden sphere 1 inch in diameter is beaten into a circular sheet of uniform thickness equal to $\frac{1}{100}$ inch. Find the radius of the sheet.

[এক ইঞ্চি ব্যাসের একটি লৌহ গোলককে পিটিয়া $\frac{1}{100}$ ইঞ্চি পুরু একটি বৃত্তাকার পাত প্রস্তুত করা হইল। ঐ পাতের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।]

গোলকের ব্যাসার্ধ $= \frac{1}{2}$ ইঞ্চি।

$\therefore$ ইহার ঘনফল $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(\frac{1}{2})^3$ ঘন ই. $= \frac{1}{6}\pi$ ঘন ইঞ্চি।

মনে কর, লৌহ পাতটির ব্যাসার্ধ r ইঞ্চি।

$\therefore$ উহার ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ ই. এবং উহা $\frac{1}{100}$ ইঞ্চি পুরু বলিয়া

উহার ঘনফল $= \pi r^2 \times \dfrac{1}{100}$ ঘন ই. $= \dfrac{\pi r^2}{100}$ ঘন ই.

$\dfrac{\pi r^2}{100} = \dfrac{\pi}{6}$, বা, $r^2 = \dfrac{100}{6}$ বর্গ ই., $\therefore$ $r = \sqrt{\dfrac{50}{3}}$ ই. $= 4.0825$ ই.

নির্ণেয় ব্যাসার্ধ $= 4.0825$ ইঞ্চি (আসন্ন)।

উদা. 6. How many spherical bullets each 5 dm. in diameter can be cast from a rectangular block of lead 11 m. by 10 m. by 5 m. ?

[11 মি. × 10 মি. × 5 মি. পরিমাণ আয়তাকার সীসাখণ্ড হইতে 5 ডেসি মিটার ব্যাসের কতগুলি গুলী নির্মাণ করা যায় ?]

সীসাখণ্ডের ঘনফল $= 11$ মি. $\times 10$ মি. $\times 5$ মি. $= 550$ ঘন মিটার,

$\therefore$ গুলীসমূহের মোট ঘনফল $= 550$ ঘন মিটার।

একটি গুলীর ব্যাসার্ধ $= \frac{5}{2}$ ডেসি মি. $= \frac{1}{4}$ মিটার,

$\therefore$ একটি গুলীর ঘনফল $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (\frac{1}{4})^3$ ঘন মি.

$$= \frac{11}{7 \times 24} \text{ ঘন মি.}$$

$\therefore$ নির্ণেয় গুলীর সংখ্যা $= (550$ ঘ. মি. $\div \frac{11}{7\times 24}$ ঘ. মি. $) = 8400.$

উদা. 7. The external and internal radii of a sphere are 6 cm. and 3 cm. respectively ; find the volume.

[একটি গোলকের বাহিরের ও ভিতরের দিকের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 6 ও 3 সেন্টিমিটার। উহার ঘনফল নির্ণয় কর।]

এখানে গোলকটির ঘনফল হইবে যথাক্রমে 6 সে. মি. ও 3 সে. মি. ব্যাসার্ধের দুইটি এককেন্দ্রীয় গোলকের ঘনফলদ্বয়ের অন্তরের সমান।

$\therefore$ গোলকটির নির্ণেয় ঘনফল $= \frac{4}{3}\pi \times (6)^3 - \frac{4}{3}\pi \times (3)^3$

$= \frac{4}{3}\pi(6^3 - 3^3) = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 189$ ঘন সে. মি.

$= 792$ ঘন সেন্টিমিটার।

উদা. 8. A solid sphere of radius 4 cms. is blown into a hollow sphere of uniform thickness, radius of whose external surface is 5 cms. Find the thickness of the hollow sphere.

[$\sqrt[3]{61} = 3\cdot94$.]

[4 সেন্টিমিটার ব্যাসার্ধের একটি নিরেট গোলককে গলাইয়া 5 সে. মিটার বহির্ব্যাসার্ধবিশিষ্ট ও সমভাবে পুরু একটি ফাঁপা গোলক প্রস্তুত করা হইল দ্বিতীয় গোলকটি কত পুরু ?] [প্রদত্ত আছে $\sqrt[3]{61} = 3\cdot94$]

নিরেট গোলকটির ঘনফল $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi.4^3$ ঘন সে. মি. ;

ফাঁপা গোলকের ঘনফল $= \frac{4}{3}\pi.5^3$ ঘন সে. মি.।

মনে কর, ফাঁপা গোলকটি d সে. মি. পুরু, সুতরাং এই গোলকের ব্যাসার্ধ হইবে $(5-d)$ সেন্টিমিটার। এক্ষণে, এই ফাঁপা গোলকের ঘনফল = সমগ্র গোলকটির ঘনফল − উহার নিরেট অংশের ঘনফল,

$\therefore \quad \frac{4}{3}\pi(5-d)^3 = \frac{4}{3}\pi.5^3 - \frac{4}{3}\pi.4^3$,

বা, $(5-d)^3 = 5^3 - 4^3 = 125 - 64 = 61$, $\therefore 5 - d = \sqrt[3]{61} = 3\cdot94$.

$\therefore \quad d = 5 - 3\cdot94 = 1\cdot06$.

$\therefore$ ফাঁপা গোলকটি 1·06 সেন্টিমিটার পুরু।

উদা. 9. The external diameter of a sphere, made of iron sheet 2 inches thick, is one foot. If one cubic foot of iron weighs 450 lbs., find the weight of the shere.

[একটি গোলকের বাহির দিকের ব্যাস এক ফুট এবং উহা 2 ইঞ্চি পুরু লৌহপাতে প্রস্তুত। এক ঘন ফুট লৌহের ওজন 450 পাউণ্ড হইলে ঐ গোলকটির ওজন নির্ণয় কর।]

গোলকের বাহিরের ব্যাসার্ধ=6 ইঞ্চি এবং উহার লৌহপাত 2 ইঞ্চি পুরু,

∴ উহার ভিতরের ব্যাসার্ধ=(6 – 2) বা 4 ইঞ্চি।

∴ গোলকের ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi(6^3-4^3)$ ঘন ইঞ্চি

$$=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 152 \text{ ঘন ই.} = \frac{4\times 22\times 152}{3\times 7\times (12)^3} \text{ ঘনফুট।}$$

∵ 1 ঘনফুট লৌহ পাতের ওজন=450 পাউণ্ড,

∴ গোলকের নির্ণেয় ওজন $=\frac{4\times 22\times 152\times 450}{3\times 7\times (12)^3}$ পাউণ্ড

$$=\frac{10450}{63} \text{ পা.} = 165·87 \text{ পাউণ্ড (আসন্ন)}$$

উদা. 10. Three sold spheres of gold whose radii are 1 cm., 6 cm. and 8 cm. respectively are melted into a single solid sphere. Find the radius of the sphere so formed.

[C. U. 1956 ; C. Pre-U. 1961]

[যথাক্রমে 1 সে. মি., 6 সে. মি. ও 8 সে. মিটার ব্যাসার্ধের তিনটি ভরাট স্বর্ণগোলককে একত্রে গলাইয়া একটি মাত্র নিরেট গোলক প্রস্তুত করা হইল। ঐ গোলকটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।]

মনে কর, নূতন গোলকের ব্যাসার্ধ r সে. মিটার।

∴ নূতন গোলকটির ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi r^3$.

আবার প্রদত্ত গোলক তিনটির ঘনফল যথাক্রমে $\frac{4}{3}.\pi.1^3$, $\frac{4}{3}.\pi.6^3$ ও $\frac{4}{3}.\pi.8^3$ ঘন সে. মি.।

∴ ঐ তিনটি গোলকের মোট ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi(1^3+6^3+8^3)$ ঘন সে. মি.

$=\frac{4}{3}\pi\times(1+216+512)$ ঘন সে. মি. $=4\times 243\pi$ ঘন সে. মি. ;

∴ $\frac{4}{3}\pi r^3=4\times 243\pi$, বা, $r^3=729=9^3$, ∴ $r=9$.

∴ নির্ণেয় নূতন গোলকের ব্যাসার্ধ=9 সেণ্টিমিটার।

উদা. 11. How many solid spheres, each of 6 cms. diameter, could be moulded from a solid metal cylinder whose length is 45 cms. and diameter 4 cms. ?

If the cylinder of the above dimensions be hollow, how many circular discs of diameter 6 cms. may be made out of it ?

[C. U. 1950]

[একটি ধাতুনির্মিত নিরেট চোঙের দৈর্ঘ্য 45 সে. মিটার ও ব্যাস 4 সে. মিটার। উহা হইতে 6 সে. মিটার ব্যাসের কয়টি নিরেট গোলক প্রস্তুত করা যায়? ঐ মাপের চোঙটি ফাঁপা হইলে উহা হইতে 6 সে. মিটার ব্যাসের কতগুলি গোলাকার পাত প্রস্তুত করা যায়?

[প্রথম অংশ] প্রদত্ত চোঙের ব্যাসার্ধ 2 সে. মি. ও দৈর্ঘ্য 45 সে. মি.

∴ উহার ঘনফল $= \pi r^2 h = \pi \times (2)^2 \times 45$ ঘন সে. মি.

$= 180\pi$ ঘন সে. মি.।

আবার, প্রত্যেক গোলকের ঘনফল $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi (3)^3$ ঘন সে. মি.

$= 36\pi$ ঘন সে. মি.।

∴ নির্ণেয় গোলকের সংখ্যা $= 180\pi \div 36\pi = 5$.

[দ্বিতীয় অংশ] ফাঁপা চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$

$= 4.\pi.45$ বর্গ সে. মি. $= 180\pi$ বর্গ সে. মি. ;

প্রত্যেক গোলাকার পাতের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2 = \pi \times (3)^2 = 9\pi$ বর্গ সে. মি

∴ নির্ণেয় পাতের সংখ্যা $= (180\pi \div 9\pi) = 20$.

উদা. 12. A sphere and a right circular cylinder of the same radius have equal volumes. By what percentage does the diameter of the cylinder exceed its height? [C.U. '51]

[সমান ব্যাসার্ধের একটি গোলক ও একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ঘনফল সমান। চোঙটির ব্যাস উহার উচ্চতা অপেক্ষা শতকরা কত অধিক?]

মনে কর, চোঙের উচ্চতা h এবং গোলক ও চোঙের ব্যাসার্ধ r.

গোলকের ঘনফল $= \frac{4}{3}\pi r^3$ এবং চোঙের ঘনফল $= \pi r^2 h$.

∴ সর্তানুসারে $\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2 h$, বা, $r = \frac{3}{4}h$.

∴ চোঙটির ব্যাস $= 2r = \frac{3}{2}h$.

∵ $\frac{3}{2}h - h = \frac{h}{2}$, ∴ চোঙের ব্যাস $(\frac{3}{2}h)$ উহার উচ্চতা (h) অপেক্ষা $\frac{1}{2}$ অধিক অর্থাৎ 50% অধিক।

উদা. 13. A solid sphere 6 inches in diameter is formed into a tube 10 inches in external diameter and 4 inches in length; find the thickness of the tube.

[একটি 6 ইঞ্চি ব্যাসের নিরেট গোলককে 4 ইঞ্চি দীর্ঘ একটি নলে পরিণত করা হইল। নলটির বাহিরের ব্যাস 10 ইঞ্চি হইলে উহা কত পুরু?]

এখানে গোলকটির ব্যাসার্ধ 3 ইঞ্চি। মনে কর, নলটি x ইঞ্চি পুরু। ইহার বহির্ব্যাসার্ধ 5 ইঞ্চি।

এক্ষণে, গোলকটির ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\times3^3$ ঘন ই. $=36\pi$ ঘন ই.,

এবং নলটির ঘনফল $=4\pi\{5^2-(5-x)^2\}$ ঘন ই.

$\therefore\quad 4\pi\{5^2-(5-x)^2\}=36\pi$, বা, $5^2-(5-x)^2=9$,

বা, $(5-x)^2=25-9=16$, বা, $5-x=4$, $\therefore\quad x=1$.

$\therefore$ নলটি 1 ইঞ্চি পুরু।

উদা. 14. A solid right circular cylinder, whose height is 9 inches and diameter of the base 4 inches, is deformed into a sphere. Find the surface area of the sphere. [H. S. '61(Compl.)]

[একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 9 ইঞ্চি ও ভূমির ব্যাস 4 ইঞ্চি। উহাকে একটি গোলকে পরিণত করা হইল। গোলকটির পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।]

এখানে চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধ 2 ইঞ্চি।

$\therefore$ ইহার ঘনফল $=\pi r^2h=\pi.2^2.9$ ঘন ই. $=36\pi$ ঘন ইঞ্চি

মনে কর, গোলকের ব্যাসার্ধ r ইঞ্চি।

অতএব, গোলকের ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi r^3$.

$\therefore$ সর্তানুসারে $\frac{4}{3}\pi r^3=36\pi$, বা, $r^3=27$, $\therefore\quad r=3$ ই.

$\therefore$ গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $=4\pi r^2=4\times\frac{22}{7}\times3^2$ বর্গ ই.

$=\frac{36\times22}{7}$ বর্গ ই. $=113\frac{1}{7}$ বর্গ ইঞ্চি।

উদা. 15. With the material of a hollow sphere of outer diameter 10 cms. and thickness 2 cms. is made a solid right circular cone of height 8 cms. Find the surface area of its curved surface to the nearest square centimetre. [$\pi=\frac{22}{7}$]
[H. S. '61]

[একটি ধাতুনির্মিত ফাঁপা গোলক 2 সেন্টিমিটার পুরু ও উহার বাহিরের ব্যাস 10 সে. মিটার। উহার ধাতু হইতে 8 সে. মিটার উচ্চ একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু প্রস্তুত করা হইল। শঙ্কুটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল আসন্ন বর্গ সেন্টিমিটারে নির্ণয় কর।]

মনে কর, শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ r সেন্টিমিটার।

$\therefore$ উহার ঘনফল $=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\times8$ ঘন সে. মি.।

আবার, গোলকের বহির্ব্যাস 10 সে. মি. এবং উহা 2 সে. মি. পুরু,

∴ উহার অন্তর্ব্যাস $=(10-4)$ সে. মি. $=6$ সে. মি.,

সুতরাং উহার অন্তর্ব্যাসার্ধ 3 সে. মি. এবং বহির্ব্যাসার্ধ $(3+2)$

বা, 5 সে. মিটার

∴ গোলকের ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi(5^3-3^3)$ ঘন সে. মি.

$=\frac{4}{3}\pi\times 98$ ঘন সে. মি.।

∴ সর্তানুসারে $\frac{1}{3}\pi r^2\times 8=\frac{4}{3}\pi\times 98$, বা, $r^2=49$, ∴ $r=7$ সে. মি.

মনে কর, শঙ্কুটির তির্যক উচ্চতা l সে. মি.,

∴ $l=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{8^2+7^2}$ সে. মি. $=\sqrt{113}$ সে. মি.।

∴ উহার নির্ণেয় বক্রতলের ক্ষেত্রফল $=\pi rl=\frac{22}{7}\times 7\times\sqrt{113}$ বর্গ সে.মি.

$=234$ বর্গ সে. মিটার (আসন্ন)।

উদা. 16. Two solid copper spheres of radii 1 cm. and 3 cms. are melted and a solid right circular cone of height 7 cms. is formed of the material. Find the radius of its base [H. S. '63 (Compl.)

গোলকদ্বয়ের মোট ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi(1^3+3^3)$ ঘন সে. মি.

$=\frac{4}{3}\pi\times 28$ ঘন সে. মি.।

মনে কর, শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ r সে. মিটার।

∴ শঙ্কুর ঘনফল $=\frac{1}{3}\pi r^2\times 7$ ঘন সে. মি.

∴ প্রদত্ত সর্তানুসারে $\frac{1}{3}\pi r^2\times 7=\frac{4}{3}\pi\times 28$,

বা, $\frac{7}{3}r^2=\frac{4}{3}\times 28$, বা, $r^2=\frac{4}{3}\times 28\times\frac{3}{7}=16$, ∴ $r=4$.

∴ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ $=4$ সেন্টিমিটার।

উদা. 17. A sphere of diameter 6 cms. is dropped into a cylindrical vessel partly filled with water. The diameter of the vessel is 12 cms. If the sphere be completely submerged, by how much will the surface of the water be raised? [H.S. '63

[12 সেন্টিমিটার ব্যাসের একটি আংশিকভাবে জলপূর্ণ চোঙাকার পাত্রে 6 সে. মিটার ব্যাসের একটি গোলক সম্পূর্ণরূপে নিমজ্জিত করা হইল ইহাতে জলতল কতটা উত্থিত হইবে ?]

মনে কর, পাত্রটিতে গোলকটি সম্পূর্ণ নিমজ্জিত হইলে উহার জলতল পূর্বাপেক্ষা h সেন্টিমিটার অধিক উত্থিত হইবে।

অতএব, গোলকের দ্বারা অপসারিত জলের (উত্থিত জলের) ঘনফল $=\pi r^2 h$

$=\pi \times 6^2 \times h$ ঘন সে. মি. [∵ $r=\frac{1}{2}\times 12$ সে. মি. $=6$ সে. মি.]

আবার, গোলকটির ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi \times 3^3$ ঘন সে. মি.

∵ উত্থিত জলের ঘনফল গোলকের ঘনফলের সমান,

$\pi.6^2.h=\frac{4}{3}.\pi.3^3$, বা, $36h=36$, ∴ $h=1$.

অতএব, জলতল 1 সেন্টিমিটার উত্থিত হইবে।

Exercise B

[Take $\pi=\frac{22}{7}$]

$\pi=\frac{22}{7}$ ধরিবে

1. Find the surface of a sphere whose diameter is 5 dm. 6 cm.

[যে গোলকের ব্যাস 5 ডেসি মি. 6 সে. মিটার তাহার পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল কত ?]

2. The radius of a sphere is $3\frac{1}{2}$ dm. ; find the area of its surface.

[একটি গোলকের ব্যাসার্ধ $3\frac{1}{2}$ ডেসি মিটার ; উহার পৃষ্ঠতলের পরিমাণ নির্ণয় কর।]

3. Find the volume of a sphere having a diameter of 1 dm. 4 cm.

[1 ডেসি মি. 4 সে. মিটার ব্যাসের একটি গোলকের ঘনফল কত ?]

4. The surface of a sphere is 154 sq. cm., find its radius.

[একটি গোলকের পৃষ্ঠতল 154 বর্গ সে. মিটার, উহার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।]

5. The surface of a globe is $\frac{11}{28}$ sq. metre. Find its diameter.

[একটি গ্লোবের পৃষ্ঠতলের পরিমাণ $\frac{11}{28}$ বর্গ মিটার ; উহার ব্যাস কত ?]

6. The volume of a sphere is $1437\frac{1}{3}$ cu. metres ; find its radius.

[একটি গোলকের ঘনফল $1437\frac{1}{3}$ ঘনমিটার হইলে উহার ব্যাসার্ধ কত ?]

7. A sphere is 36 inches in diameter, find its volume in cubic feet.

[একটি গোলকের ব্যাস 36 ইঞ্চি ; উহার ঘনফল ঘনফুটে নির্ণয় কর ।]

8. The units in the volume of a sphere are twice the units in the area of its surface. Find the radius of the sphere. [C. U. '5?]

[একটি গোলকের পৃষ্ঠতল যত বর্গ একক, উহার ঘনফল তাহার দ্বিগুণ ঘন একক । উহার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর ।]

9. The height and diameter of the base of a circular cylinder are each 6 metres. Find the radius of the sphere whose surface is equal to the curved surface of the cylinder

[একটি বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা ও ব্যাস প্রত্যেকটি 6 মিটার । যে গোলকের পৃষ্ঠতল চোঙটির বক্রতলের সমান তাহার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর ।]

10. How many spherical bullets, each 1 decimetre in diameter can be formed from an iron ball whose diameter is 6 decimetres ?

[6 ডেসি মিটার ব্যাসের একটি লৌহপিণ্ড হইতে এক ডেসি মিটার ব্যাসের কয়টি গোলাকার গুলী প্রস্তুত করা যায় ?]

11. How many spherical bullets each $\frac{1}{2}$ cm. in radius can be cast from a rectangular block of lead 10 cm. long, 8 cm. broad and $5\frac{1}{2}$ cm. thick ?

[একটি আয়তাকার লৌহফলক 10 সে. মি. দীর্ঘ, 8 সে. মি প্রশস্ত ও $5\frac{1}{2}$ সে. মিটার পুরু । উহা হইতে $\frac{1}{2}$ সে. মিটার ব্যাসার্ধের কতগুলি গোলাকার গুলী প্রস্তুত করা যায় ?]

12. Three solid golden spherical beads of radii, 3, 4 and 5 millimetres are melted into one single solid spherical bead. Find the radius of the single spherical bead.

[C. U. '44 ; C. Pre-U. '63]

[যথাক্রমে 3, 4 ও 5 মিলিমিটার ব্যাসার্ধের তিনটি নিরেট স্বর্ণ গোলককে গলাইয়া একটিমাত্র নিরেট গোলকে পরিণত করা হইল । ঐ গোলকটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর ।]

13. The external and internal diameters of a shell are respectively $15\frac{1}{2}$ in. and $10\frac{3}{4}$ in., find the volme. [R. U. S.]

[একটি গোলার বাহিরের ও ভিতরের দিকে ব্যাস যথাক্রমে $15\frac{1}{2}$ ইঞ্চি ও $10\frac{3}{4}$ ইঞ্চি ; উহার ঘনফল কত ?]

14. An iron sphere, 4 cm. in diameter, is beaten into a circular sheet $\frac{2}{3}$ cm. thick, find the radius of the sheet.

[4 সেন্টিমিটার ব্যাসের একটি লৌহগোলককে পিটিয়া $\frac{2}{3}$ সে. মিটার পুরু একটি বৃত্তাকার পাত প্রস্তুত করা হইল। ঐ পাতের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।]

15. If r_1 and r_2 be the radii of two solid spheres of gold and if they are melted into one solid sphere, prove that the radius of the new sphere is $(r_1^3+r_2^3)^{\frac{1}{3}}$.

[দুইটি নিরেট স্বর্ণগোলকের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1 ও r_2 ; উহাদিগকে গলাইয়া একটি নিরেট গোলক প্রস্তুত করা হইল। প্রমাণ কর যে উহার ব্যাসার্ধ $(r_1^3+r_2^3)^{\frac{1}{3}}$ এর সমান।]

16. Find the weight of a hollow iron shell, if the exterior diameter is 13 inches and the thickness of the iron be 2 inches. (Iron weighs 4·2 ozs. per cubic inch.) [R. E.]

[একটি ফাঁপা লৌহগোলকের বাহিরের ব্যাস 13 ইঞ্চি এবং লৌহ 2 ইঞ্চি পুরু। গোলকটির ওজন কত ? (এক ঘন ইঞ্চি লৌহের ওজন 4·2 আউন্স)।]

17. A lump of clay in the form of a solid sphere is converted into a right circular cylinder of height 16 inches. Find the radius of the base of the cylinder supposing it to be equal to the radius of the sphere. [C. U. '49]

[ভরাট গোলাকার একটি মৃত্তিকাপিণ্ডকে 16 ইঞ্চি উচ্চ একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙে পরিণত করা হইল। যদি চোঙটির ভূমির ব্যাসার্ধ গোলাকটির ব্যাসার্ধের সমান হয়, তবে ঐ ব্যাসার্ধ কত হইবে ?]

18. How many solid cylinders each of length 8 inches and diameter 6 inches can be made out of the material of a solid sphere of radius 6 inches ? [B. U. E. '62 ; C. U. '52]

[ধাতুনির্মিত একটি ভরাট গোলকের ব্যাসার্ধ 6 ইঞ্চি। উহার ধাতু হইতে 8 ইঞ্চি দৈর্ঘ্য ও 6 ইঞ্চি ব্যাসের কয়টি নিরেট চোঙ প্রস্তুত করা যায় ?]

[বিবিধ]

উদা. 1. The area of the whole surface of a rectangular parallelopiped is 192 sq. cm. and its volume is 144 cu. cm. If the length of a diagonal be 13 cm., find the dimensions of the solid. [C. U. '57

[একটি আয়তঘনের সমগ্রতল 192 বর্গ সেন্টিমিটার ও ঘনফল 144 ঘন সে. মিটার। উহার কর্ণের দৈর্ঘ্য 13 সেন্টিমিটার হইলে উহার মাত্রাগুলি নির্ণয় কর।]

মনে কর, আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে a, b, c সেন্টিমিটার।

উহার সমগ্রতল অর্থাৎ $2(ab+bc+ca)=192$ বর্গ সে. মিটার,

$\therefore \quad ab+bc+ca=96$ বর্গ সে. মি.······(1)

উহার ঘনফল অর্থাৎ $abc=144$ ঘন সে. মি.···(2)

উহার কর্ণের দৈর্ঘ্য অর্থাৎ $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=13$ সে. মি.

$\therefore \quad a^2+b^2+c^2=169$ সে. মি.···(3)

এক্ষণে, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$$=169+192=361,$$

$\therefore \quad a+b+c=\sqrt{361}=19$ সে. মি.···(4)

(1) হইতে পাই $b(a+c)+ca=96$···(5)

(2) ,, ,, $ca=\dfrac{144}{b}$ এবং (4) হইতে $a+c=19-b$.

$\therefore$ (5) হইতে $b(19-b)+\dfrac{144}{b}=96$, বা, $b^2(19-b)+144=96b$

বা, $b^3-19b^2+96b-144=0$,

বা, $b^3-3b^2-16b^2+48b+48b-144=0$,

বা, $b^2(b-3)-16b(b-3)+48(b-3)=0$,

বা, $(b-3)(b^2-16b+48)=0$,

বা, $(b-3)(b-4)(b-12)=0$,

$\therefore \quad b=3, 4, 12.$

যদি $b=3$ হয়, তবে প্রস্থ $=3$ সে. মি.

এক্ষেত্রে $a+c=19-b=19-3=16$ এবং $ac=\dfrac{144}{b}=\dfrac{144}{3}=48$,

$\therefore \quad a=12, c=4.$

∴ নির্ণেয় মাত্রাগুলি যথাক্রমে 12 সে. মি., 3 সে. মি. ও 4 সে. মি. ; অথবা, 12 সে. মি., 4 সে. মি. ও 3 সে. মি. যদি $b=4$ হয়।

$b=12$ হইলে দৈর্ঘ্য a উহা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয় বলিয়া উহা ধরা হইল না।]

উদা. 2. The length, breadth and the height of a closed box are 12 in., 10 in. and 8 inches respectively and the total inner surface is 376 square inches. If the walls are uniformly thick, find the thickness. [C. U. '58]

[একটি ঢাকনিযুক্ত বাক্সের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 12, 10 ও 8 ইঞ্চি এবং উহার ভিতর তলের মোট পরিমাণ 376 বর্গ ইঞ্চি। উহার গা সমভাবে পুরু হইলে, উহা কত ইঞ্চি পুরু ?]

মনে কর, বাক্সের গাগুলি (walls) x ইঞ্চি পুরু।

∴ বাক্সটির ভিতর দিকে দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে $(12-2x)$, $(10-2x)$ ও $(8-2x)$ ইঞ্চি।

∴ সর্তানুসারে $2(12-2x)(10-2x)+2(10-2x)(8-2x)$
$+2(8-2x)(12-2x)=376,$

বা, $8(6-x)(5-x)+8(5-x)(4-x)+8(4-x)(6-x)=376,$

বা, $(6-x)(5-x)+(5-x)(4-x)+(4-x)(6-x)=47,$

বা, $3x^2-30x+27=0,$ বা, $x^2-10x+9=0,$

বা, $(x-1)(x-9)=0,$ ∴ $x=1$ বা 9.

এখানে বাক্সের গাগুলি 9 ইঞ্চি পুরু হওয়া সম্ভব নহে,

∴ বাক্সটির গা (wall) 1 ইঞ্চি পুরু।

উদা. 3 Show how to draw a plane parallel to the base of a right circular cone so that it divides the cone into (*i*) two parts of equal surfaces ; (*ii*) two parts of equal volumes. [C. U. '47]

[একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির সমান্তরাল সমতল অঙ্কিত করিয়া কিরূপে উহাকে দুই অংশে বিভক্ত করিলে (i) দুই অংশের তলপরিমাণ সমান, (ii) দুই অংশের ঘনফল সমান হইবে ?]

[(i) এই পুস্তকের 28 পৃষ্ঠায় উদা. 10 দেখ। উহা হইতে $\frac{PC^2}{PA^2}=\frac{1}{2}$ এই পর্যন্ত লিখিয়া পরে নিম্নের মত কর]

$$\frac{PC^2}{PA^2}=\frac{1}{2}, \quad \therefore \frac{PA^2}{PC^2}=\frac{2}{1}, \quad \therefore \frac{PA}{PC}=\frac{\sqrt{2}}{1},$$

বা $$\frac{PO}{PO'}=\frac{\sqrt{2}}{1}, \quad \therefore \frac{PO-PO'}{PO'}=\frac{\sqrt{2}-1}{1}.$$

অতএব, শঙ্কুর উচ্চতাকে $\sqrt{2}-1 : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করিয়া তলটিকে অঙ্কিত করিতে হইবে।

(ii) ∵ তলটি এস্থলে শঙ্কুকে দুইটি সমান ঘনফলবিশিষ্ট অংশে বিভক্ত করে

$\therefore \quad \frac{1}{3}\pi r^2 . \text{PO} = 2 \times \frac{1}{3}\pi r'^2 \times \text{PO}'$,

$\therefore \quad \frac{r^2 . \text{PO}}{r'^2 . \text{PO}'} = 2$, বা, $\frac{\text{PO}^2}{\text{PO}'^2} \frac{\text{PO}}{\text{PO}'} = 2 \left[\because \frac{r}{r'} = \frac{\text{PO}}{\text{PO}'} \right]$.

বা, $\frac{(\text{PO})^3}{(\text{PO}')^3} = 2$, $\therefore \frac{\text{PO}}{\text{PO}'} = \frac{\sqrt[3]{2}}{1}$, $\therefore \frac{\text{PO} - \text{PO}'}{\text{PO}'} = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{1}$.

অতএব এক্ষেত্রে শঙ্কুর উচ্চতাকে $\sqrt[3]{2} - 1 : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করিয়া তলটিকে অঙ্কিত করিতে হইবে।

উদা. 4. The curved surfaces of a right circular cylinder and a right circular cone standing on the same base and having the same height are in the ratio 8 : 5. Show that the radius of the base is $\frac{3}{4}$ the height. [C. U. '59 (Compl.)]

[সমান ভূমি ও সমান উচ্চতাবিশিষ্ট লম্ব বৃত্তাকার একটি চোঙ ও একটি শঙ্কুর বক্রতল দুইটির অনুপাত 8 : 5, প্রমাণ কর যে ভূমির ব্যাসার্ধ উচ্চতার $\frac{3}{4}$ অংশ।]

মনে কর, r ও h যথাক্রমে চোঙটির ভূমির ব্যাসার্ধ ও উচ্চতা।

অতএব, চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$

এবং শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi rl = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$.

$\therefore$ সর্তানুসারে পাই $2\pi rh : \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = 8 : 5$,

বা, $2h : \sqrt{r^2 + h^2} = 8 : 5$, বা, $10h = 8\sqrt{r^2 + h^2}$,

বা, $100h^2 = 64r^2 + 64h^2$, বা, $64r^2 = 36h^2$,

বা, $8r = 6h$, $\therefore \quad r = \frac{3}{4}h$.

$\therefore$ ভূমির ব্যাসার্ধ উচ্চতার $\frac{3}{4}$ হইল।

উদা. 5 The trunk of a tree is a right circular cylinder 5 feet in radius and 30 ft. high; find the volume of the timber which remains when the trunk is trimmed enough just to reduce it to a rectangular parallelopiped on a square base. [A. U.]

[5 ফুট ব্যাসার্ধ ও 30 ফুট উচ্চতাবিশিষ্ট লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আকারে একটি গাছের গুঁড়ি আছে। উহাকে যতটা সম্ভব কম চাঁচিয়া একটি বর্গাকার ভূমিবিশিষ্ট আয়তঘনাকারে পরিণত করিলে উহাতে কত ঘনফল কাঠ থাকিবে ?]

এখানে গুঁড়িটির প্রত্যেক প্রান্ত একটি বৃত্ত যাহার ব্যাসার্ধ 5 ফুট এবং গুঁড়িটির দৈর্ঘ্য 30 ফুট।

মনে কর, ABCD বর্গক্ষেত্রটি আয়তঘনের আকারে পরিবর্তিত গুঁড়ির ভূমি।

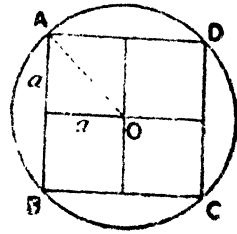
ঐ বর্গক্ষেত্রটি O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের মধ্যে অন্তর্লিখিত। এখানে OA = 5 ফুট।

$\therefore$ $a^2 + a^2 = AO^2$, বা, $2a^2 = 5^2 = 25$,

বা, $a^2 = \frac{25}{2}$,

$a = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ফুট $\therefore$ $AB = 2a = 5\sqrt{2}$ ফুট।

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= (5\sqrt{2})^2$ বর্গ ফুট $= 50$ বর্গফুট।

$\therefore$ ঐ আয়তঘনাকার গুঁড়ির নির্ণেয় ঘনফল = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা
= 50 বর্গ ফু. × 30 ফু. = 1500 ঘনফুট।

উদা. 6. Water flows at the rate of 20 feet per minute from a cylindrical pipe ·25 inch in diameter. How long would it take to fill a conical vessel, whose diameter at the surface is 10 inches and depth 9 inches ? [S. F. '62 (Comp.)]

[*Ans.* 20 মিনিট]

[একটি ·25 ইঞ্চি ব্যাসের চোঙাকার নল দিয়া মিনিটে 20 ফুট বেগে জল প্রবাহিত হয়। উহা দ্বারা একটি শঙ্কু আকারের জলাধার জলপূর্ণ করিতে কত সময় লাগিবে ? জলাধারটির উপরিতলের ব্যাস 10 ইঞ্চি এবং গভীরতা 9 ইঞ্চি।]

উদা. 7. A cone, a hemisphere and a cylinder stand on equal bases and have the same height. Show that their volumes are in the ratio 1 : 2 : 3. Compare the whole surfaces.
[S. F. '63] [*Ans.* Surface $\sqrt{2}+1 : 3 : 4$]

[একটি শঙ্কু, একটি অর্ধগোলক ও একটি চোঙের ভূমিগুলি সমান এবং একই উচ্চতা। প্রমাণ কর যে, উহাদের ঘনফলগুলির অনুপাত 1 : 2 : 3, এবং উহাদের সমগ্র তলগুলির তুলনা কর।]

[উত্তর : তলগুলির অনুপাত $\sqrt{2}+1 : 3 : 4$]

উদা. 8. A right circular cone is cut by two planes parallel to the base and trisecting the height Show that the volumes of the three portions into which the cone is divided are as 1 : 7 : 19. [S. F. '63 (Compl.)]

[একটি লম্ব গোলাকার শঙ্কুর উচ্চতাকে সমত্রিখণ্ডিত করিয়া ভূমির সমান্তরাল দুইটি সমতল দ্বারা শঙ্কুটিকে বিভক্ত করা হইল। প্রমাণ কর যে, উহার খণ্ডিত অংশ তিনটির ঘনফলের অনুপাত 1 : 7 : 19.]

ALGEBRA

Summation of an infinite G. P. Series

[অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর যোগফল নির্ণয়।]

গুণোত্তর শ্রেণীর আলোচনায় আমরা দেখিয়াছি যে

$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}$ একটি n-সংখ্যক পদবিশিষ্ট গুণোত্তর শ্রেণী এবং উহার প্রথম পদ a ও সাধারণ অনুপাত r. ইহা একটি সসীম শ্রেণী।

ইহার n-সংখ্যক পদের সমষ্টি অর্থাৎ $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}\ldots(1)$

$$=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\ldots(2)$$

যখন rএর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা কম, তখন (1)-সূত্রটি এবং যখন $r>1$ (সাংখ্যমানে) তখন সূত্র-(2)-টি ব্যবহৃত হয়।

সূত্র-(1) হইতে পাই $S_n=\dfrac{a}{1-r}-\dfrac{ar^n}{1-r}$.

এক্ষত্রে, যদি rএর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা কম হয়, অর্থাৎ r ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ হয়, তবে n-এর মান যত বাড়িতে থাকিবে r^nএর মান, সুতরাং $\dfrac{r^n}{1-r}$ এর মান ততই কমিতে থাকিবে। এইরূপে n-এর মান অসীম পর্যন্ত বৃদ্ধি পাইলে $\dfrac{r^n}{1-r}$ অসীমরূপে ক্ষুদ্র (অর্থাৎ প্রায় শূন্য হইবে এবং তখন S_nএর মান $\dfrac{a}{1-r}$ হইবে।

অতএব, r এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা কম হইলে, গুণোত্তর শ্রেণীর অসীম পর্যন্ত যোগফল $\dfrac{a}{1-r}$ হয়, অর্থাৎ $S_\infty=\dfrac{a}{1-r}$.

উদাহরণ। Sum to infinity the series $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+$

এখানে প্রথম পদ $a=1$ এবং সাধারণ অনুপাত $r=\frac{1}{3}\div 1=\frac{1}{3}$.

$$\therefore\quad S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}.$$

আবৃত্ত দশমিক। একটি আবৃত্ত দশমিককে একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণীতে প্রকাশ করা যায়। যথা—

(i) $\dot{\cdot 7}=\cdot 777\cdots$ to $\infty=\cdot 7+\cdot 07+\cdot 007+\cdots\cdots$অসীম পর্যন্ত

$=\dfrac{7}{10}+\dfrac{7}{10^2}+\dfrac{7}{10^3}+\cdots$অসীম পর্যন্ত, ইহা একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণী যাহার প্রথম পদ $\frac{7}{10}$ এবং সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{10}$.

(ii) $\cdot 1\dot{7}\dot{3} = \cdot 1737373 \cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত

$= \cdot 1 + \cdot 073 + \cdot 00073 + \cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত

$= \frac{1}{10} + \left(\frac{73}{10^3} + \frac{73}{10^5} + \cdots\cdots \text{অসীম পর্যন্ত}\right)$

ইহা দ্বিতীয় পদ হইতে একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণী, যাহার প্রথম পদ $\frac{73}{10^3}$ এবং সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{10^2}$

এই প্রকারে যে কোন আবৃত্ত দশমিককে একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণীতে প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণমালা C

উদা. 1. Find the sum of $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$ to infinity

এখানে প্রথম পদ $a = 1$, সাধারণ অনুপাত $= (-\frac{1}{3}) \div 1 = -\frac{1}{3}$.

$$\therefore \quad S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

উদা. 2. Sum $\frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \cdots$ to ∞ [D. U. '22]

এখানে প্রদত্ত শ্রেণীকে দুইটি অসীম শ্রেণীতে বিভক্ত করা যায়।

$$S_\infty = \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5^3} + \cdots\cdots \text{to } \infty\right) + \left(\frac{3}{5^2} + \frac{3}{5^4} + \cdots \text{to } \infty\right)$$

$$= \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{5^2}} + \frac{\frac{3}{5^2}}{1-\frac{1}{5^2}} = \frac{2}{5} \times \frac{25}{24} + \frac{3}{25} \times \frac{25}{24} = \frac{5}{12} + \frac{1}{8} = \frac{13}{24}.$$

উদা. 3. Sum to infinity $(\sqrt{2}+1) + (1) + (\sqrt{2}-1) + \cdots$

এখানে $a = \sqrt{2}+1$ এবং $r = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$.

$$\therefore \quad S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\sqrt{2}+1}{1-(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{4+3\sqrt{2}}{2} = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

উদা. 4. Prove that in a decreasing G. P. continued to infinity, whose common ratio is r, the ratio of any term to the sum of all the succeeding terms is $1-r : r$.

[একটি অধঃক্রমের (decreasing) অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত r ; প্রমাণ কর যে উহার যে-কোন পদের সহিত পরবর্তী পদসমূহের সমষ্টির অনুপাত $1-r:r$.]

মনে কর, প্রথম পদ a ; এখানে প্রদত্ত সাধারণ অনুপাত r. এখানে আমরা যে কোন পদ (ধর p-তম পদ) লইয়া পরীক্ষা করিতেছি।

এখানে শ্রেণীটির p-তম পদ $=ar^{p-1}$, সুতরাং উহার পরবর্তী পদগুলি হইবে ar^p, ar^{p+1},...অসীম পর্যন্ত।

$\therefore$ পরবর্তী সমস্ত পদগুলির সমষ্টি $=\dfrac{ar^p}{1-r}$.

$\therefore$ p-তম পদের ও ঐ সমষ্টির অনুপাত

$$=ar^{p-1} : \frac{ar^p}{1-r}=ar^{p-1}\times\frac{1-r}{ar^p}=\frac{1-r}{r}=1-r:r.$$

উদা. 5. Suppose a body moves eternally in this manner. viz., 20 miles in the first minute, 19 miles in the second, $18\frac{1}{20}$ miles in the third and so on in geometrical progression required the utmost distance it can reach. [C. U. 1864]

[অনন্তভাবে চলমান কোন বস্তু প্রথম মিনিটে 20 মাইল, দ্বিতীয় মিনিটে 19 মাইল, তৃতীয় মিনিটে $18\frac{1}{20}$ মাইল, এইরূপ গুণোত্তর প্রগতিতে যাইতেছে উহা সর্বাধিক কতদূর পর্যন্ত পৌঁছিতে পারিবে ?]

স্পষ্টতঃ ঐ দূরত্ব $=(20+19+18\frac{1}{20}+\cdots\cdots \text{to } \infty)$ মাইল

এখানে $a=20$ এবং $r=\frac{19}{20}$.

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $=\dfrac{20}{1-\dfrac{19}{20}}$ মাইল $=\dfrac{20}{\dfrac{1}{20}}$ মাইল $=400$ মাইল।

উদা. 6. Sum $1+3x+5x^2+7x^3+\cdots$to infinity $(x<1)$.

মনে কর, সমষ্টি s. অতএব,

$s=1+3x+5x^2+7x^3+\cdots\cdots$অসীম পর্যন্ত

$\therefore$ $sx=\quad x+3x^2+5x^3+\cdots\cdots$অসীম পর্যন্ত [$x$ দ্বারা গুণ করিয়া]

$s(1-x)=1+2x+2x^2+2x^3+\cdots\cdots$অসীম পর্যন্ত

$=1+(2x+2x^2+2x^3+\cdots\cdots$অসীম পর্যন্ত)

$=1+\dfrac{2x}{1-x}=\dfrac{1+x}{1-x}$ $\therefore$ $s=\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$.

উদা. 7. If $S_1, S_2, S_3, \ldots\ldots, S_p$ are the sums of infinite geometric series whose first terms are $1, 2, 3, \cdots, p$ and whose common ratios are $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{p+1}$ respectively, prove that $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_p=\frac{1}{2}p(p+3)$. [B. U. 1888]

[$s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots, s_p$ কতিপয় অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর যোগফল ; ঐ শ্রেণীগুলির প্রথম পদগুলি যথাক্রমে $1, 2, 3, \cdots\cdots, p$ এবং সাধারণ অনুপাতগুলি যথাক্রমে $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\cdots, \frac{1}{p+1}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$s_1+s_2+s_3+\cdots\cdots+s_p=\frac{1}{2}p(p+3).\ ]$$

প্রদত্ত সর্তগুলি হইতে পাই

$$S_1=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots \text{অসীম পর্যন্ত} =\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2,$$

$$S_2=2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots \quad ,, \quad ,, \quad =\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=3,$$

$$S_3=3+\frac{3}{4}+\frac{3}{4^2}+\cdots \quad ,, \quad ,, \quad =\frac{3}{1-\frac{1}{4}}=4,$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$S_p=p+\frac{p}{p+1}+\frac{p}{(p+1)^2}+\cdots \quad ,, \quad =\frac{p}{1-\frac{1}{p+1}}=p+1$$

$$\therefore S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots+S_p$$
$$=2+3+4+\cdots+(p+1) \quad [\text{এখানে পদ সংখ্যা} = p]$$
$$=\frac{p}{2}\times(2+p+1)=\frac{1}{2}p(p+3).$$

Exercise C

Sum the series to infinity [অসীম পদের যোগফল নির্ণয় কর।]

1. $1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\cdots$ 2. $\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots\cdots$

3. $x^2-y^2,\ x+y,\ \frac{x+y}{x-y},\cdots$

4. $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{7^3}+\cdots$

5. Show that $\cdot 1\dot{6}$ is equivalent to an infinite geometric progression. By assuming it find its value. [C. U. '11]

[দেখাও যে $\cdot 1\dot{6}$কে একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণীতে পরিণত করা যায় এবং তাহা হইতে ইহার মান নির্ণয় কর।]

6. Find the sum to infinity of the series

$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots\cdots$. Show that the sum of the first 10 terms of this series falls short of the sum to infinity by less than a thousand-millionth part of 1. [C. U. '35

[$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots\cdots$ এই শ্রেণীর অসীম পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর প্রমাণ কর যে এই শ্রেণীর প্রথম 10টি পদের সমষ্টি ঐ অসীম পর্যন্ত সমষ্টি অপেক্ষা 1-এর সহস্র-নিযুতাংশ কম।]

7. In a series in G. P, continued to infinity, each term is equal to the sum of all the succeeding terms. Find the series, the first term being unity.

[একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 1 এবং প্রত্যেক পদ তাহার পরবর্তী পদসমূহের সমষ্টির সমান। ঐ শ্রেণীটি নির্ণয় কর।]

8. The first term of a G. P. exceeds the second by 2, and the sum to infinity is 50. Find the series. [C. U.

[একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ দ্বিতীয় পদ অপেক্ষা 2 অধিক এবং শ্রেণীটির অসীম পর্যন্ত গুণফল 50. শ্রেণীটি নির্ণয় কর।]

9. The sum of an infinite G. P. is 3, and the sum of the first two terms is $2\frac{2}{3}$. show that there are two such series. Find them. [C. U. 1934

একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টি 3 এবং প্রথম দুইটি পদের সমষ্টি $2\frac{2}{3}$. প্রমাণ কর যে ঐরূপ দুইটি শ্রেণী আছে এবং শ্রেণী দুইটি নির্ণয় কর।]

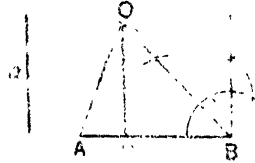
10. A body moves in such a manner that it travels a distance of 100 yds. in the first minute, 60 yds. in the second, 36 yds. in the third minute and so on in G. P. Show that the total distance travelled, even if the body moves eternally, cannot be greater than 250 yards. [D. B. '31]

[একটি বস্তু প্রথম মিনিটে 100 গজ, দ্বিতীয় মিনিটে 60 গজ, তৃতীয় মিনিটে 36 গজ, এইরূপ গুণোত্তর প্রগতিতে যাইতেছে। প্রমাণ কর যে এই ভাবে অনন্তকাল যাইলেও উহা 250 গজের অধিক দূরত্ব যাইতে পারে না।]

[Geometry]

1. Divide a st. line into two parts such that the sum of their squares shall be equal to a given square.

[একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন ঐ অংশদ্বয়ের উপর বর্গক্ষেত্র দুইটির সমষ্টি একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়

AB প্রদত্ত সরলরেখা এবং a প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের বাহু। ABকে এমন দুই খণ্ডে বিভক্ত করিতে হইবে যেন তাহাদের বর্গের সমষ্টি $= a^2$ হয়।

অঙ্কন : B বিন্দুতে $\angle ABO = 45$ আঁক। Aকে কেন্দ্র করিয়া a ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক, উহা যেন BOকে O বিন্দুতে ছেদ করিল।

$OD \perp AB$ টান। AB রেখা এখন D বিন্দুতে উদ্দিষ্টরূপে বিভক্ত হইল।

প্রমাণ : $\because \angle D = 1$ সমকোণ, এবং $\angle DBO = 45°$,

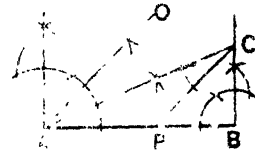
$\therefore \angle BOD = 45° = \angle DBO, \quad \therefore DO = DB.$

$\because \angle ADO = 1$ সমকোণ, $\therefore AO^2 = AD^2 + DO^2 = AD^2 + BD^2.$

$\therefore AD^2 + BD^2 = a^2$ [$\because AO = a.$]

2. Divide a straight line into two parts so that the square on one part may be twice the square on the other.

[একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন এক অংশের উপর বর্গক্ষেত্র অপর অংশের উপর বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ হয়।]

AB একটি প্রদত্ত সরলরেখা। মনে কর, উহাকে P বিন্দুতে এরূপে বিভক্ত করিতে হইবে যেন $AP^2 = 2BP^2$ হয়। AB-র A বিন্দুতে একটি সমকোণ আঁকিয়া উহাকে AO দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর। $\angle OAB$কে AC দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর।

এখন $\angle CAB = 22\frac{1}{2}$ ডিগ্রি হইল। B বিন্দুতে ABর উপর BC লম্ব টান; BC যেন ACকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। C বিন্দুতে $\angle ACP = \angle CAP$ আঁক; CP যেন ABকে P বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন P বিন্দুতে AB উদ্দিষ্টরূপে বিভক্ত হইল।

প্রমাণ : $\triangle APC$র বহিঃস্থ $\angle CPB = \angle CAP + \angle ACP = 45^\circ$,

$\therefore \angle PCB = 45^\circ = \angle CPB$, $\therefore PB = BC$.

আবার, $\angle B$ সমকোণ বলিয়া, $PC^2 = PB^2 + BC^2 = 2PB^2$,

$\therefore AP^2 = 2PB^2$ ($\because \angle CAP = \angle ACP$, $\therefore AP = CP$)

3. Divide a st. line into two parts so that the square on one part may be three times the square on the other.

[একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন এক অংশের উপর বর্গক্ষেত্র অপর অংশের উপর বর্গক্ষেত্রের তিনগুণ হয়।]

মনে কর, AB সরলরেখাকে P বিন্দুতে এরূপে বিভক্ত করিতে হইবে যেন $AP^2 = 3BP^2$ হয়। ABর B বিন্দুতে $\angle ABC = 45$ আঁক এবং A বিন্দুতে $\angle BAC = 30^\circ$ আঁক। BC ও AC পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করিল। C হইতে ABর উপর CP লম্ব টান। AB রেখা P বিন্দুতে উদ্দিষ্টরূপে বিভক্ত হইল।

প্রমাণ : $\because \angle P = 1$ সমকোণ, এবং $\angle B = 45^\circ$,

$\therefore \angle PCB = 45^\circ = \angle B$, $\therefore CP = PB$.

আবার, $\angle A = 30^\circ$, $\therefore \angle ACP = 60^\circ$, $\therefore AC = 2PC$.

এখন $AP^2 = AC^2 - PC^2 = (2PC)^2 - PC^2 = 4PC^2 - PC^2$

$= 3PC^2 = 3BP^2$.

4. Divide a given st. line into two parts such that the difference between the squares on the two parts may be equal to the square on a given st. line.

[একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন ঐ অংশদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গদ্বয়ের অন্তরফল একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর অঙ্কিত বর্গের সমান হয়।]

মনে কর, AB প্রদত্ত সরলরেখা এবং l প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের বাহু। ABকে এমন দুই ভাগে বিভক্ত করিতে হইবে, যেন তাহাদের বর্গের অন্তর $= l^2$ হয়।

$AC \perp AB$ টান এবং $AC = l$ কর। BC যোগ কর। C বিন্দুতে $\angle B$র সমান করিয়া BCD কোণ আঁক, CD যেন ABকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন AB সরলরেখাটি D বিন্দুতে উদ্দিষ্টরূপে বিভক্ত হইল।

প্রমাণ : $\angle B = \angle BCD$, $\therefore BD = CD$. এক্ষণে, $CD^2 = AD^2 + AC^2$,

$\therefore AC^2 = CD^2 - AD^2 = BD^2 - AD^2$,

$\therefore l^2 = BD^2 - AD^2$ ($\because l = AC$).

5. Construct a triangle on a given base, having given the vertical angle and the point at which the bisector of the vertical angle meets the base.

[একটি ত্রিভুজের ভূমি, শীর্ষকোণ এবং ভূমির সহিত শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দু দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।]

Hints : [জ্যামিতির 166 পৃষ্ঠায় উদা. 8 দেখ]

মনে কর, ত্রিভুজের ভূমি PQ, শিরঃকোণ X এবং শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখা ভূমিকে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। PQ-এর উপর ∠X ধারণক্ষম বৃত্তাংশ অঙ্কিত কর এবং বৃত্তটিকে সম্পূর্ণ কর। অনুবন্ধী চাপটিকে E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। ED যোগ কর বাধিত ED যেন পরিধিকে R বিন্দুতে ছেদ করিল। PR ও QR যোগ কর। PQR উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

6. Construct a triangle having given the base, the vertical angle and the other two sides.

[ত্রিভুজের ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর বাহু দুইটির সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।]

[**Hints :** মনে কর AB ভূমি, ∠X শিরঃকোণ এবং l সরলরেখা অন্য বাহুদ্বয়ের সমষ্টি। AB-র উপর ∠X ধারণক্ষম APB বৃত্তাংশ এবং $\frac{1}{2}$X কোণ ধারণক্ষম AQB বৃত্তাংশ অঙ্কিত কর। A-কে কেন্দ্র করিয়া l ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর, উহা যেন AQB চাপকে R ও S বিন্দুতে ছেদ করিল। AR যোগ কর, উহা যেন APB চাপকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। BC যোগ কর। ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : BR যোগ কর। অঙ্কন অনুসারে ∠ACB = ∠X.

আবার, ∠ACB = ∠CBR + ∠CRB, বা, ∠X = ∠CBR + $\frac{1}{2}$∠X,

∴ ∠CBR = ∠X − $\frac{1}{2}$∠X = $\frac{1}{2}$∠X = ∠CRB, ∴ CB = CR,

∴ AC + BC = AC + CR = AR = l.

N. B. অনুরূপে AS যোগ করিয়া আর একটি ত্রিভুজ পাওয়া যায়।]

7. Construct a triangle on a given base having given the vertical angle and the difference of the remaining sides.

[ত্রিভুজের ভূমি, শীর্ষকোণ ও অন্য বাহুদ্বয়ের অন্তরফল দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।]

মনে কর AB ভূমি, X শিরঃকোণ এবং d অন্য বাহুদ্বয়ের অন্তর। AB-র উপর ∠X ধারণক্ষম APB বৃত্তাংশ এবং $90^\circ + \frac{1}{2}$X কোণ ধারণক্ষম AQB বৃত্তাংশ

আঁক। Aকে কেন্দ্র করিয়া d ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক, উহা যেন AQE চাপকে R বিন্দুতে ছেদ করিল। AR যোগ কর। বর্ধিত AR যেন APE চাপকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। BC যোগ কর। ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল

প্রমাণ: BR যোগ কর।

$\angle BRC = 180 - \angle ARB = 180^\circ - (90^\circ + \frac{1}{2}\angle X) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle X.$

আবার, $\angle ARB = \angle C + \angle CBR$,

$\therefore \angle CBR = \angle ARB - \angle C = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle X - \angle X = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle X = \angle BRC$

$\therefore$ CB = CR. এক্ষণে, AR = AC − CR = AC − BC.

$\therefore$ AC − BC = d এবং $\angle C = \angle X$.

8. Find at what point on a given st. line XY, a st. line AB subtends the maximum angle.

[XY সরলরেখার উপর এরূপ একটি বিন্দু নির্ণয় কর যে বিন্দুতে AB সরলরেখার সম্মুখকোণ বৃহত্তম হইবে।]

মনে কর XY প্রদত্ত সরলরেখা এবং AB উহার বহিঃস্থ একটি সরলরেখা XY-এর উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় করিতে হইবে যেন সেই বিন্দুতে AB-র সম্মুখকোণ বৃহত্তম হয়।

অঙ্কন: মনে কর বর্ধিত BA ও YX পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিল। OY হইতে OA ও OB-র মধ্যসমানুপাতীর সমান করিয়া OT অংশ কাটিয়া লওয়া হইল। T বিন্দুই উদ্দিষ্ট বিন্দু।

প্রমাণ: A, T, B বিন্দু তিনটি দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, OB এই বৃত্তের ছেদক এবং এখানে OA. OB = OT^2 (OT মধ্যসমানুপাতী বলিয়া)

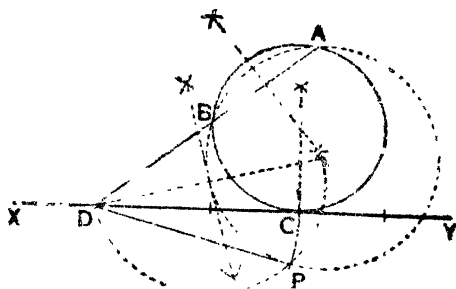
$\therefore$ OT ঐ বৃত্তের T বিন্দুতে স্পর্শক। অতএব, T বিন্দু ব্যতীত XY-এর উপর অপর যে কোন বিন্দু বৃত্তের বহিঃস্থ। XYএর উপর আর একটি যে কোন বিন্দু Z লও, ইহা বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু। AZ যোগ কর, ইহা যেন বৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। BP, BZ, AT, BT যোগ কর।

$\because$ BPZ ত্রিভুজের $\angle BPA$ বহিঃকোণ, $\therefore \angle BPA > \angle BZP$ অর্থাৎ $\angle BZA$

কিন্তু একই বৃত্তাংশস্থ বলিয়া $\angle BPA = \angle BTA$, $\therefore \angle BTA > \angle BZA$

এবং ইহা T বিন্দু ব্যতীত XYএর উপরিস্থ যে কোন বিন্দুর পক্ষেই সত্য।

$\therefore \angle ATB$ বৃহত্তম কোণ। অতএব, T নির্ণেয় বিন্দু।

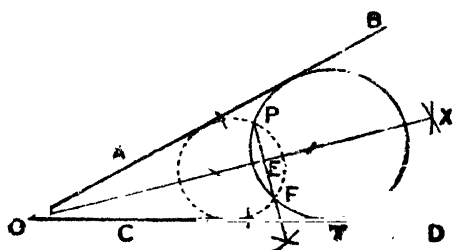
9. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন কর।

A ও B দুইটি বিন্দু এবং XY একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা।

অঙ্কন : AB যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন XYকে D বিন্দুতে ছেদ করে। A ও B বিন্দু দিয়া যে-কোন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। D হইতে ঐ বৃত্তের একটি স্পর্শক DP অঙ্কিত কর। DY হইতে DP-র সমান DC কাটিয়া লও। এক্ষণে, A, B ও C বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহাই নির্দিষ্ট বৃত্ত হইল।

প্রমাণ : ABP বৃত্তের AB জ্যা ও DP স্পর্শক D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, $\therefore$ DB.DA $=$ DP^2 $=$ DC^2 ($\because$ DC $=$ DP)।

$\therefore$ ABC বৃত্তকে DC স্পর্শ করিয়াছে। $\therefore$ ABC বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

[**দ্রষ্টব্য :**—(1) যদি DX হইতে DK $=$ DP কাটা হয়, তবে A, B, K দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত আর একটি উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে। (2) A ও B যোগ করিয়া XY হইলে AB-র সমদ্বিখণ্ডকের সহিত XYএর ছেদবিন্দু C লইবে। A ও B, XYএর পরস্পর বিপরীত দিকে হইলে এরূপ বৃত্তাঙ্কন সম্ভব নহে।]

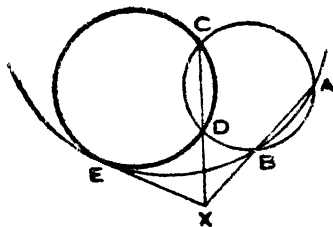
10. দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এবং একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

AB ও CD দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

অঙ্কন : BA ও DCকে বর্ধিত কর, উহারা যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল। $\angle O$-এর সমদ্বিখণ্ডক OX টান। PE⊥OX টান এবং PEকে F পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন EF=PE হয়। এখানে উদা. 9 অনুসারে P ও F বিন্দু দিয়া যাইবে এবং CDকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত PFT আঁক। উহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত। [প্রমাণ ঠিক পূর্ব উদাহরণের মত।]

[**দ্রষ্টব্য :**—এক্ষেত্রেও পূর্বের ন্যায় দুইটি বৃত্ত অঙ্কন করা সম্ভব।]

11. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এবং একটি বৃত্তকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত আঁকিতে হইবে। [C. U. '10, '33]

মনে কর CDE নির্দিষ্ট বৃত্ত এবং A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

অঙ্কন : A ও B বিন্দু দিয়া এরূপ একটি বৃত্ত আঁক যেন উহা প্রদত্ত বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। CD ও AB যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহারা যেন X বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। X হইতে CDE বৃত্তে XE স্পর্শক টান।

চিত্র নং 32

A, B ও E বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত আঁক, উহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইল।

প্রমাণ : ABDC বৃত্তের AB ও CD জ্যা X বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করায় DX.XC=XB.XA. আবার, CDE বৃত্তের CD জ্যা ও XE স্পর্শক X বিন্দুতে ছেদ করায় $DX.XC = EX^2$. $\therefore$ $EX^2 = XB.XA$. $\therefore$ EX, ABE বৃত্তের স্পর্শক। এক্ষণে ABE ও CDE বৃত্তের E বিন্দুতে EX সাধারণ স্পর্শক হওয়ায় উভয় বৃত্ত E বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

$\therefore$ ABE বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

[**দ্রষ্টব্য :**—X বিন্দু হইতে প্রদত্ত বৃত্তে আর একটি স্পর্শক XF টানা যায়। A, B, F দিয়া অঙ্কিত বৃত্তও উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে।]

ANSWERS

Exercise A

1. 220 বর্গ মি. **2.** 165 বর্গ ফু. 3. $113\frac{1}{7}$ ঘন ফুট, $75\frac{3}{7}$ বর্গফুট

4. 1232 বর্গ ডেসি মি. **5.** 341 বর্গ সে. মি. **6.** 3 মি.

7. 27 টা. 8 আ. 8. $1\frac{3}{4}$ মি. 9. 396 ঘন মি.

10. 7 মি. **11.** 440 টাকা **12.** ·006 ইঞ্চি **13.** 462 বর্গ সে. মি

14. $339\frac{3}{7}$ পাউণ্ড **15.** $\frac{1}{4}$ সে. মি. 16. $1018\frac{2}{7}$ ঘন ইঞ্চি।

Exercise B

1. 98 বর্গ ডেসি মি. 56 বর্গ সে. মি. **2.** 154 বর্গ ডেসি মি.

3. $1437\frac{1}{3}$ ঘন সে. মি. **4.** $3\frac{1}{2}$ সে. মি. **5.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ মি. **6.** 7 মি.

7. $14\frac{1}{7}$ ঘন ফুট 8. 6 একক 9. 3 মি. **10.** 216

11. 840 **12.** 6 মিলি মি. **13.** 1299·87 ঘন ইঞ্চি

15. 4 সে. মি. **16.** 201 পা. $13\frac{3}{5}$ আউন্স **17.** 12 ইঞ্চি 18. 4

Exercise C

1. $\frac{3}{5}$ **2.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 3. $\frac{(x+y)(x-y)^2}{x-y-1}$ **4.** $\frac{2}{3}$

5. $\frac{1}{6}$ 6. $1\frac{1}{9}$ **7.** $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$ to ∞

8. 10, 8, $\frac{32}{5}$,...... **9.** একটি শ্রেণী 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$,...... , এবং অপরটি 4, $-\frac{4}{3}$, $\frac{4}{9}$,.....

QUESTIONS
SET IN HIGHER SECONDARY (WEST BENGAL)

C. U. PRE-UNIVERSITY & B. U. ENTRANCE EXAMINATION WITH ANSWERS

[Pertaining to Syllabus for Class X only. Excluding Questions now out of syllabus]

Higher Secondary Examination—1960

Elective Mathematics

First Paper—GROUP A—Algebra

2. Solve the equations :

(a) $\left.\begin{aligned}2x^2+3xy+y^2&=15\\5x+2y&=12\end{aligned}\right\}$ [Ans. $x=2$, $y=1$, or. $x=14$, $y=-29$]

(b) $\left.\begin{aligned}3x+4y&=5xy\\2y+3z&=2yz\\5z+2x&=6zx\end{aligned}\right\}$ [Ans. $x=y=z=0$; $x=1$, $y=3$, $z=2$]

. (a) A class consists of a number of boys whose ages are in arithmetical progression, the common difference being 3 months. If the youngest boy is just seven years old and the sum of the ages of the boys is 153 years, find the number of boys in the class. [Ans. 17]

(b) If S_1, S_2, S_3 denote respectively the sum of the first n terms, first $2n$ terms and first $3n$ terms of a series in geometrical progression, prove that $S_1(S_3-S_2)=(S_2-S_1)^2$

(b) The area of a circle varies as the square of its radius. If the area is $38\frac{1}{2}$ sq. ft. when the radius is 3 ft. 6 in., find the area when the radius is 4 ft. 8 in. [Ans. $68\frac{4}{9}$ sq. ft.]

7. (a) Simplify :

$$\log_{10}\frac{384}{5}+\log_{10}\frac{81}{32}+3\log_{10}\frac{5}{3}+\log_{10}\frac{1}{9}.$$ [Ans. 2]

(b) If x, y, z are in geometrical progression, prove that $\log_{10}x$, $\log_{10}y$ and $\log_{10}z$ are in Arithmetical progession.

Group B—Trigonometry

10. (a) If A, B, $A+B$ are all acute angles, prove (geometrically) that $\cos(A+B)=\cos A \cos B-\sin A \sin B$.

(b) Find the value of—

$$\sin^2 60^\circ+\cos^2 150^\circ+\tan^2 120^\circ+\cos 180^\circ-\tan 135^\circ.$$

[Ans. $4\frac{1}{2}$]

11. (a) Find the values of θ between 0° and 360° which satisfy the equation $2\sin^2\theta+3\cos\theta=0$. [Ans. 120°, 240°]

(b) If $A+B=90^\circ$, prove that $\dfrac{\cos 2B-\cos 2A}{\sin 2A}=\tan A-\tan B$.

Second Paper (1960)

2. (a) Show that the angle made by a tangent to a circle with a chord drawn from the point of contact is equal to the angle in the alternate segment of the circle.

(b) ABC is a triangle inscribed in a circle : AD, AE are lines drawn to the base BC parallel to the tangents at B, C respectively , prove that $BD : CE=AB^2 : AC^2$.

Or, (b) Tangents AB, AC are drawn to a circle ; CE is perpendicular to the diameter BD through B ; prove that AD bisects CE.

3. Draw an equilateral triangle, each side of which is inches. Now proceed to construct a square equal in area to this triangle.

Or. Draw circles of radii 4 cms. and 2·5 cms. respectively, with their centres at a distance 10 cms. apart. Proceed to construct a transverse common tangent to the two circles.

[*Statement of construction, and full, neat and distinct traces are to be given in either case, but no proof.*]

4. Answer either (a) and (b), or (c) and (d) :

(a) Obtain the co-ordinates of the point which divides the straight line joining the points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) internally in the ratio $m_1 : m_2$.

$$\left[\text{Ans. } \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2},\ \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right]$$

(*b*) If A, B, C, D are points whose co-ordinates are $(-2, -3)$, $(8, 9)$, $(0, 4)$, and $(3, 0)$ respectively, and AB and CD are joined, find the ratio of the segments into which AB is divided by CD. [Ans. 11 : 47]

(*c*) Obtain the equation of the straight line whose intercepts of the axes OX, OY are a and b respectively. $\left[\text{Ans. } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\right]$

(*d*) Determine the equation of the straight line which passes through the intersection of the lines given by $3x-4y+1=0$ and $5x+y=1$, and has equal intercepts of the same sign on the axes. [Ans, $x+y=\frac{11}{23}$]

7. (*a*) A thick hollow cylindrical pipe is 6 inches in length, and its whole surface (outer and inner curved surfaces and the plane edges) is 308 sq. inches. If the external diameter of the pipe is 8 inches, and if its material weighs 4 ozs. per cubic inch, find its weight. [Take $\pi=\frac{22}{7}$] [Ans. 528 ozs.]

(*b*) When is (*i*) a straight line, (*ii*) a plane said to be perpendicular to a given plane ?

If a straight line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their point of intersection, prove that it is perpendicular to the plane containing them.

H. S. Exam. (Compl.) – 1960

First Paper—Group A—Algebra

2. (*a*) Solve the equations : $x+2y=4$, $2xy-y^2=3$.

[Ans. $x=2$, $y=1$; $x=\frac{14}{5}$, $y=\frac{3}{5}$]

(*b*) The distance through which a heavy body falls from rest varies as the square of the time of its fall. If a body falls 64 feet in two seconds, how far does it fall in 8 seconds ?

[Ans. 1024 ft.]

3. (*a*) One hundred stones being placed in a straight line on the ground at a distance of one yard from one another, how far will a person travel, who shall bring them, one by one, to a basket, placed in the same straight line at the distance of a yard from the first stone ? [Ans. 5 mi. 1300 yds.]

(*b*) If a, b, c be respectively the p^{th}, q^{th} and r^{th} terms of a geometric series, prove that $a^{q-r}.\ b^{r-p}.\ c^{p-q}=1$.

6. (*a*) Find the logarithms of (*i*) 324 to the base $3\sqrt{2}$, (*ii*) $\frac{1}{3}$ to the base $9\sqrt{3}$. [Ans. (*i*) 4, (*ii*) $-\frac{2}{5}$]

(*b*) Prove that $\log \frac{81}{8} - 2 \log \frac{3}{2} + 3 \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} = 0$.

Group B—Trigonometry

9. (*a*) If A and B are both acute angles and A is greater than B, prove (geometrically) that

$$\sin (A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B.$$

10. (*a*) Find the values of θ between 0° and 360° which satisfy the equation $\sin^2\theta - 2\cos\theta + \frac{1}{4} = 0$. [Ans. 60° and 300°]

(*b*) If $A+B+C=180°$, prove that

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},$$

Second Paper (Compl., 1960)

2. (*a*) If two chords of a circle intersect outside the circle prove that the rectangle contained by the segments of one is equal to the rectangle contained by the segments of the other.

(*b*) Prove that if the common chord of two intersecting circles be produced it will bisect their common tangent,

Or ABC is a triangle right-angled at A, AD is perpendicular to BC. Show that $AB^2 = BD.BC$.

3. Draw a circle of radius 2 cms. Construct an equilateral triangle circumscribing this circle.

Or. Draw a triangle with sides 3, 4 and 5 cms. Now construct a square equal in area to this triangle.

[*Statement of construction, and full, neat and distinct traces are to be given in either case, but no proof.*]

4. Answer either (*a*) and (*b*), or (*c*) and (*d*) :

(*a*) Find the distance between the points whose co-oridnates are (x_1, y_1) and (x_2, y_2).

(*b*) Prove that the points whose co-ordinates are $(-2, -2)$, $(2, 2)$ and $(4, -4)$ are the vertices of an isosceles triangle.

(c) Find the angle between the straight lines whose equations are $y=m_1x+c_1$ and $y=m_2x+c_2$.

(d) Obtain the equation to the straight line passing through the point $(-1, 2)$ and perpendicular to the line $3x+4y=5$.

[Ans. $4x-3y+10=0$]

7. Answer *any two* of the following questions :—

(a) Prove that all straight lines drawn perpendicular to a given straight line at a given point of it are coplanar.

(b) The volume of a right circular cone whose height is 24 inches is 1232 cu. inches. Find the area of its slant surface.

[Ans. 550 sq. in.]

(c) AB is a diameter of a circle, AC and AD are any two chords cutting the tangent at B in P and Q; prove that $\angle PCQ = \angle PDQ$.

(d) A straight line is drawn through the point $(3, 5)$ such that the point bisects the portion of the line intercepted between the axes. Find the equation of the line, and calculate its perpendicular distance from the origin. [Ans. $5x+3y=30$; $\frac{15}{17}\sqrt{34}$]

Higher Secondary Examination – 1961

First Paper

GROUP A—Algebra

2. (a) Solve the equations .

$$\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ 2x^2-5xy+2y^2=0 \end{array}\right\} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Ans. } x=1, y=2; \\ \text{or, } x=2, y=1. \end{array}\right]$$

(b) The length of a pendulum varies inversely as the square of the number of beats it makes per minute. If a pendulum 16 ft. long makes 27 beats per minute, find the length of the pendulum that makes 24 beats per minute. [Ans. $20\frac{1}{4}$ ft.]

3. (a) A person lends Rs. 1000 to a friend agreeing to charge no interest and also recover the amount by monthly instalments increasing successively by Rs. 2. In how many months will the loan be paid up, if the first instalment be Rs. 64 and its payment be made one month after the sum is lent ? [Ans. 25]

6. (a) Given $\log 2 = \cdot30103$ and $\log 3 = \cdot4771213$, find the logarithm of $\cdot015$. [Ans. $\bar{2}\cdot1760913$]

(b) Prove that $7 \log \frac{10}{9} - 2 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80} - \log 2 = 0$.

GROUP B—Trigonometry

9. (*a*) If A, B and $A-B$ are positive acute angles, prove geometrically that $\sin(A-B)=\sin A \cos B - \cos A \sin B$.

(*b*) Find the value of $\sin 330^\circ + \tan 45^\circ - 4\sin^2 120^\circ + 2\cos^2 135 + \sec^2 180^\circ$. [Ans. $-\frac{1}{2}$]

10. (*a*) Find the values of θ between 0° and 360° which satisfy the equation $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 1$. [Ans $0^\circ, 120^\circ, 360^\circ$]

(*b*) $A+B+C=180^\circ$, prove that

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\ \tan B.\ \tan C.$$

Second Paper (1961)

2. (*a*) If from a point outside a circle, a secant and a tangent be drawn to the circle, prove that the rectangle contained by the segments of the secant is equal to the square on the tangent.

(*b*) If the diagonals of a cyclic quadrilateral are at right angles, show that the perpendicular from the point of intersection to any side when produced backwards bisects the opposite side.

Or, (*b*) From the extremities of any chord AB of a circle, perpendiculars AQ, BR are drawn to the tangent at any point P. If PM is perpendicular to AB, prove that $PM^2 = AQ.BR$.

3. Draw a circle of radius 1 inch, and then construct a regular hexagon circumscribing the circle.

Or, Take a straight line of length 2 inches and divide it into two parts such that the square on one part may be double the square on the other part. [*Statement of construction and distinct traces are to be given in their case, but no proof.*]

4. Answer either (*a*) and (*b*), or (*c*) and (*d*) :

(*a*) Obtain the area of the triangle whose vertices are points (x_1, y_1), (x_2, y_2) and (x_3, y_3).

[Ans. $\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3)$]

(*b*) Find the area of the triangle whose vertices A, B, C are respectively $(3, 4)$, $(-4, 3)$ and $(8, -6)$; hence or otherwise find the length of the perpendicular from A on BC.

[Ans. 37·5 units of area ; 5 units of length.]

(*c*) Obtain the equation of the straight line passing through the points (x_1, y_1) and (x_2, y_2). $\left[\text{Ans. } \dfrac{y-y_1}{y_1-y_2} = \dfrac{x-x_1}{x_1-x_2}\right]$

(*d*) Obtain the equation to the perpendicular bisector of the line joining the points $(-2, 7)$ and $(8, -1)$. At what distance is the perpendicular bisector from the origin ?

[Ans. $5x-4y-3=0$, distance $=\frac{3}{\sqrt{41}}$ units of length]

7. (*a*) A and B are two fixed points whose co-ordinates are (2, 4) and (2, 6) respectively ; ABP is an equilateral triangle on the side of AB opposite to the origin. Find the co-ordinates of P.

[Ans. $(2+\sqrt{3}, 5)$]

(*c*) With the material of a hollow sphere of outer diameter 10 cms. and thickness 2 cms. is made a solid right circular cone of height 8 cms. Find the surface area of its curved surface to the nearest square centimetre [$\pi=\frac{22}{7}$]. [Ans. 234 sq. cm.]

(*d*) How is the angle between two intersecting planes defined ? When is a plane perpendicular to another plane ?

If two straight lines are parallel, and if one of them is perpendicular to a plane, prove that the other is also perpendicular to the same plane

H. S. Examination (Compl.)—1961

First Paper

Group A—Algebra

2. (*a*) Solve the equations : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2\frac{1}{2}$, $x+y=6$.

[Ans. $x=4$, $y=2$; or, $x=2$, $y=4$]

(*b*) If x varies as y^2 and $y=4$ when $x=8$, find y when $x=32$.

[Ans. $y=\pm 8$]

3. (*a*) If a, b, c be in Arithmetical Progression and x, y, z in Geometrical Progression, prove that $x^{b-c}y^{c-a}z^{a-b}=1$.

6. (*a*) If $\frac{\log x}{y-z}=\frac{\log y}{z-x}=\frac{\log z}{x-y}$, prove that $xyz=1$.

(*c*) Show that $\log_{10} 2+16\log_{10}\frac{16}{15}+12\log_{10}\frac{25}{24}+7\log_{10}\frac{81}{80}=1$.

Group B—Trigonometry

9. (*a*) If A, B and $A-B$ are all positive acute angles, prove geometrically that $\cos(A-B)=\cos A \cos B+\sin A \sin B$

10. (*a*) Prove that $\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$.

(*b*) If $A+B+C=180°$, prove that

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4 \sin A \sin B \sin C.$$

Second Paper (Compl. 1951)

2. (*a*) Prove that the obtuse angle between the tangent at a point of a circle and a chord through the point of contact is equal to the angle in the alternate segment.

Or, If from any point on the circumcircle of a triangle, perpendiculars are drawn to the sides of the triangle, prove that the feet of the perpendiculars are collinear

(*b*) If two circles intersect, show that their common tangent subtends supplementary angles at the points of intersection.

Or, Two radii of a circle are perpendicular to each other, and a tangent cuts them when produced ; prove that the other tangents drawn to the circle from these points of intersection are parallel.

3. Take a straight line of length 6 cms ; divide it into two segments such that the rectangle contained by the segments may be equal to a square on a side of length 2 cms.

Or, Draw a circle of radius 1 inch. Find out a point outside this circle such that the two tangents from it to the circle, and the line joining the points of contact may form an equilateral triangle. [*Statement of construction, and full, neat and distinct traces are to be given in either case, but no proof.*]

4. Answer either (*a*) and (*b*) or (*c*) and (*d*) :—

(*a*) Obtain the distance between the points whose rectangular cartesian co-ordinates are (x_1, y_1) and (x_2, y_2).

(*b*) Show that the triangle whose vertices are the points $(-2, -5)$, $(4, -1)$ and $(-1, 0)$ is isosceles.

(*c*) Obtain the equation to a straight line which is inclined to the x-axis at an angle θ, and whose intercept on the y-axis is c.

(*d*) Show that the points $(1, 4)$, $(3, -2)$, and $(-3, 16)$ are collinear.

7. Answer *any two* of the following questions :—

(*a*) A and B are two fixed points on a plane, and a point P moves on the plane in such a way that $PA = 2PB$ always. Prove either geometrically or analytically that the locus of P is a circle.

(*b*) OA, OB, OC are three straight lines on a plane. If OP is perpendicular to OA and OB, prove that it is perpendicular to OC also.

(*c*) A solid right circular cylinder, whose height is 9 inches and diameter of the base 4 inches, is deformed into a sphere. Find the surface area of this sphere. [Ans. $113\frac{1}{7}$ sq. inches.]

(*d*) Find the equation of the straight line which passes through the intersection of the lines $3x - 7y + 5 = 0$, $x - 2y - 7 = 0$, and has equal intercepts of the same sign along the axes.

[Ans. $x + y = 85$]

H. S. Examination—1962

FIRST PAPER

GROUP A—Algebra

2. (*a*) Solve the equations : $\left.\begin{array}{r} 3x - 5y = 2 \\ xy = 8 \end{array}\right\}$

[Ans. $x = 4, y = 2$; or, $x = -\frac{10}{3}, y = -\frac{12}{5}$]

(*b*) Given that the area of a circle varies as the square of its radius and that the area of a circle is 154 sq. feet, when the radius is 7 ft., find the area of a circle whose radius is 10 ft. 6 inches. [Ans. 346·5 sq. ft.]

3. (*a*) If S_1, S_2, S_3 be the sums of n terms of three arithmetic series, the first term being 1 and the respective common differences 1, 2, 3 ; prove that $S_1 + S_3 = 2S_2$.

6. (*a*) Given $\log 2 = \cdot 30103$ and $\log 3 = \cdot 4771213$, find the logarithms of (i) $5\frac{1}{16}$ and (ii) ·1875.

[Ans. (i) ·7043652, (ii) $\bar{1}$·2730013]

(*b*) Find the value of $7 \log \frac{15}{16} + 6 \log \frac{8}{3} + 5 \log \frac{2}{5} + 5 \log \frac{32}{25}$.

[Ans. log 3]

GROUP B—Trigonometry

9. (*a*) Same as Q. 10(*a*) of H. S. 1960.

(*b*) Show that $\sin 420^\circ \cos 390^\circ + \cos(-300^\circ) \sin(-330^\circ) = 1$.

10. (*a*) Find the values of θ between 0° and 360° which satify the equation $\cos^2\theta - \sin\theta = \frac{1}{4}$. [Ans. 30°, 150°]

(*b*) $A+B+C=180^\circ$, prove that

$$\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}.$$

SECOND PAPER (1962)

GROUP A—Plane Geometry

2. (*a*) If two chords of a circle intersect inside the circle prove that the rectangle contained by the parts of one, is equal to the rectangle contained by the parts of the other.

(*b*) Through any point X on the common chord of two intersecting circles, chords AB and CD are drawn one in each circle. Prove that $AX.XB = CX.XD$.

5. Construct a regular hexagon circumscribing a circle of radius 1·5 inches. Measure a side of the hexagon. [Ans. 1·73"

[*Statement of construction, traces of construction as well as justification are to be given.*]

GROUP B—Co-ordinate Geometry

6. (*a*) Same as Q. 4(*a*) of H. S., 1960.

(*b*) The co-ordinates of the vertices of a triangle are (x_1, y_1) (x_2, y_2) and (x_3, y_3). Find the co-ordinates of the point where the medians of the triangle intersect.

[Ans. $x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$, $y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$]

7. (*a*) Find the angle between the straight lines whose equations are $y = m_1 x + c_1$ and $y = m_2 x + c_2$

$$\left[\text{Ans.} \quad \tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.\right]$$

(*b*) Find the equation of the straight line passing through the point $(-3, 1)$ and perpendicular to the line $5x - 2y + 7 = 0$.

[Ans. $2x + 5y + 1 = 0$.

Group C—Solid Geometry & Mensuration

11. Same as Q. 7 (a) of H. S, 1960 (Compl.).

12. If a right angle rotates about one of its arms, then the other arm describes a plane.

13. Find the volume and the lateral surface of a right prism 8 inches long, standing on an isosceles triangle, each of whose equal sides is 5 inches and the other side 6 inches.

[Ans. vol.=96 cu. in., surface=128 sq. inches.]

14. A right pyramid stands on a rectangular base whose sides are 12 inches and 9 inches ; and the length of each of the slant edges is 8·5 inches. Find the height and the volume of the pyramid. [Ans. $h=4''$, $v=144$ cubic inches.]

Higher Secondary Examination (Compl.)—1962

First Paper

Group A—Algebra

2. (*a*) Solve the equations :

$$\left.\begin{array}{r} x-y=2 \\ x^2+y^2=34 \end{array}\right\} \qquad \left[\text{Ans. } \left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=3 \end{array}\right\} \text{ or, } \begin{array}{l} x=-3 \\ y=-5 \end{array}\right]$$

2. (*a*) When a body falls from rest, its distance from the starting point varies as the square of the time elapsed. If a body falls from rest through $402\frac{1}{2}$ ft. in 5 seconds, how far does it fall in 10 seconds ? [Ans. 1610 ft.]

3. (*a*) The fifth term of a G. P, is 81 and the second term is 24 ; find the series. [Ans, 16, 24, 36, 54, 81,······]

6. (*a*) Find the logarithms of (i) 5832 to the base $3\sqrt{2}$ (ii) 81 to the base $\sqrt[3]{9}$. [Ans. (i) 6, (ii) 6]

(*b*) Show that $7 \log \frac{16}{15} + 5 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80} = \log 2$.

Group B—Trigonometry

3. (*a*) Same as Q. 9(*a*) of H. S., 1961.

(*b*) Show that $\cos A + \sin (270° + A) - \sin (270° - A) + \cos (180° + A) = 0$.

10. (*a*) Find the values of θ between 0° and 360°, which satisfy the equation $\cot \theta + \tan \theta = 2 \operatorname{cosec} \theta$. [Ans. 60° or 300°]

(*b*) Prove that $\dfrac{\tan 5\theta + \tan 3\theta}{\tan 5\theta - \tan 3\theta} = 4 \cos 2\theta \cos 4\theta$.

SECOND PAPER (Compl. 1962)

GROUP A—Plane Geometry

2. (*a*) Prove that the angles made by a tangent to a circle with a chord drawn from the point of contact are respectively equal to the angles in the alternate segments of the circle.

(*b*) AB is the common chord of two circles, one of which passes through O, the centre of the other : prove that OA bisects the angle between the common chord and the tangent to the first circle at A.

5. Construct a square equal in area to a given rectangle whose adjacent sides are 1·5 in. and 2·5 in. Measure the sides of the square. [*Statement of the construction and traces are to be given.*]

GROUP B—Co-ordinate Geometry

6. (*a*) Same as Q. 4 (*a*) of H. S., 1960 (Compl.)

(*b*) Show that the straight line joining the points $(-7, 3)$ and $(14, -6)$ passes through the origin.

7. (*a*) Same as Q. 4 (*c*) of H. S., 1961.

(*b*) Show that the three lines $3x+y=5$, $x+5y+3=0$ and $5x-2y=12$ meet in a point.

GROUP C—Solid Geometry and Mensuration

11. If a straight line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their point of intersection, prove that it is perpendicular to the plane in which they lie.

12. From O, the centre of a circle, a perpendicular OA is erected to the plane of a circle. Prove that all points on the circumference are equidistant from any point on the perpendicular OA.

13. The length breadth and height of a rectangular block are in the ratio 4 : 3 : 2, and the whole surface of the block is 1872 sq. in. Find the dimensions of the block and its volume.

[Ans. 24", 18", 12" ; 5184 cubic inches]

14. Find the curved surface and the volume of a right circular cylinder whose height is 8 in. and the radius of whose base is 5 in. $[\pi=\frac{22}{7}]$. [Ans. $251\frac{3}{7}$ sq. in. ; $628\frac{4}{7}$ cubic inches.]

Higher Secondary Examination—1963

First Paper—Group A—Algebra

2. (*a*) Solve the equations : $x+\frac{4}{y}=1$, $y+\frac{4}{x}=25$.

[Ans. $x=\frac{1}{5}$, $y=5$; or, $x=\frac{4}{5}$, $y=20$]

(*b*) The volume of pyramid varies jointly as its height and the area of its base ; and when the area of the base is 60 square feet and the height 14 feet, the volume is 280 cubic feet. What is the area of the base of a pyramid whose volume is 390 cubic feet and whose height is 26 feet ? [Ans. 45 sq. ft.]

3. (*a*) If a, b, c, d be in *G. P.*, show that

$$(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2.$$

6. (*b*) Given log 2=·30103 and log 3=·4771213, find (i) log 75 and (ii) log 4500. [Ans. (i) 1·8750613, (ii) 3·6532126]

Group B—Trigonometry

8. Same as Q. 9(*a*) of H. S., 1961 (Compl.).

9. (*a*) Find the values of θ between $0°$ and $360°$ which satisfy the equation $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{2}$. [Ans. 15° and 105°]

(*b*) If $A+B+C=180°$, prove that

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Second Paper—1963

Group A—Plane Geometry

3. (*a*) Show that the acute angle made by a tangent to a circle with a chord drawn from the point of contact is equal to the angle in the alternate segment of the circle.

(*b*) Two circles intersect at A and B, and through P, any point on one of them, straight lines PAC and PBD are drawn to cut the other at C and D. Show that CD is parallel to the tangent at P.

8. Construct, to the scale, an isosceles triangle with each of the equal sides equal to 2 inches, and each base angle double the vertical angle.

Or, Divide a straight line of length 2 inches into two parts such that the square on one part may be three times the square on the other.

[*Statement of construction and full, neat traces are to be given in any one of the above cases, but no proof.*]

Group B—Co-ordinate Geometry

5. (*a*) Obtain the distance between two points whose rectangular cartesian co-ordinates are (x_1, y_1) and (x_2, y_2).

(*b*) Prove that the points (2, −2), (8, 4), (5, 7) and (−1, 1) are the successive angular points of a rectangle.

6. (a) Obtain the perpendicular distance from the point (x_1, y_1) to the straight line $ax+by+c=0$.

(*b*) Find the ortho-centre of the triangle whose angular points are (2, 7), (−6, 1) and (4, −5). [Ans. $(-\frac{10}{9}, \frac{49}{27})$]

Group C—Solid Geometry and Mensuration

10. (*a*) Same as Q. 7(*b*) Second part of H. S., 1960.

(*b*) If $PA=PB=PC$, where P is a point outside the plane of the triangle ABC, and if PO be drawn perpendicular to the plane, prove that O is the circum-centre of the triangle ABC.

(*c*) If two straight lines are both perpendicular to a plane, show that they are parallel.

(*d*) If the middle points of the adjacent sides of a skew quadrilateral are joined, prove that the figure so formed is a parallelogram.

11. A right circular cylinder and a right circular cone have equal bases and equal heights. If their curved surfaces are in the ratio 8 : 5, show that the radius of the base is to the height as 3 : 4.

Or, A sphere of diameter 6 cms. is dropped into a cylindrical vessel partly filled with water. The diameter of the vessel is 12 cms. If the sphere be completely submerged, by how much will the surface of the water be raised? [Ans. 1 cm.]

Higher Secondary Examination (Compl.)—1963

First Paper

Group A—Algebra

2. (*a*) Solve the equations :

$$\left.\begin{aligned} x+3y&=2 \\ x^2+2y^2+3xy&=0 \end{aligned}\right\}$$

[Ans. $x=-1, y=1$, or $x=-4, y=2$]

(*b*) If the volume of a cone whose height is 12 inches and base 30 sq. inches be 120 cubic inches, find the volume of another cone whose height is 20 inches and base one square foot, the volume of a cone varying as the height and the base jointly.

[Ans. 960 cu. in.]

3. (*a*) If S be the sum, P the product and R the sum of the reciprocals of n terms in $G.\ P.$:

$$\text{prove that } P^2=\left(\frac{S}{R}\right)^n.$$

Group B—Trigonometry

8. (*a*) Same as Q. 10 (*a*) of H. S., 1960.

(*b*) Simplify :

$$\frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\frac{\sin(C-A)}{\cos C\ \cos A}+\frac{\sin(A-B)}{\cos A\ \cos B}$$

[Ans. 0]

9. (*a*) Find the value of θ between 0° and 360° which satisfy the equation $2\sin^2\theta+\sqrt{3}\cos\theta+1=0$, [Ans. 150°, 210°]

(*b*) If $A+B+C=180^\circ$, prove that

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1.$$

Second Paper—1963 (Compl.)

Group A—Plane Geometry

3. (**a**) If from any point outside a circle, two secants are drawn to the circle, prove that the rectangle contained by the segments of one is equal to the rectangle contained by the segments of the other.

(*b*) *ABCD* is a quadrilateral inscribed in a circle, and the diagonal *BD* bisects *AC* ; show that $AB.AD=BC.CD$.

4. (*a*) Draw two circles of radii 1 cm. and 2 cms. with their centres 5 cms. apart, and construct a direct common tangent to these circles.

Or, **Draw an equilateral triangle each of whose sides is 4 cms. in length, and then construct a square equal in area to this triangle.**

[*Statement of construction and full, neat traces are to be given in any one of the above cases. No proof is necessary.*]

Group B—Co-ordinate Geometry

5. (*a*) Same as Q 4 (*a*) of H. S., 1961.

(*b*) Show that the line joining (—4, —5) and (9, 8) bisects the line joining (2, 1) and (6, 5).

6. (*a*) Same as Q. 4 (*c*) of H. S., 1961.

(*b*) Find the equation to the st. line which passes through the point (—5, —8) and has equal intercepts of opposite signs on the axes. [Ans. $x-y=3$

Group C—Solid Geometry & Mensuration

10. How is the angle between two intersecting planes defined? When is a plane said to be perpendicular to another plane?

Show that if a straight line is perpendicular to a plane, then any plane passing through the st. line is perpendicular to that plane.

Or, If PN be drawn perpendicular to a plane XY from an outside point P, and from the foot N of the perpendicular, a line NM is drawn perpendicular to the st. line AB in the plane XY, prove that PM is perpendicular to AB.

11. Two solid copper spheres of radii 1 cm. and 3 cms. are melted, and a solid right circular cone of height 7 cms. is formed of the material. Find the radius of its base. [Ans. 4 cm.

Or, The external length, breadth and height of a closed box are 10 cms., 9 cms., 7 cms. respectively, and the total inner surface is 262 sq. cms. If the walls of the box be uniformly thick, find the thickness. [Ans. 1 cm.]

Higher Secondary Examination—1964

First Paper

Group A—Algebra

2. (*a*) Solve the equations :

$2x-3y=4$ [Ans. $x=5,\ y=2$;

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{10}$ or, $x=\frac{4}{7}$; $y=-\frac{20}{21}$]

(*b*) Given that the illumination from a source of light varies inversely as the square of the distance, how much farther from a candle must a book, which is now 8 inches off, be removed so as to receive just half as much light ? [Ans. $8(\sqrt{2}-1)$ in.]

3.(*a*) A man arranges to pay off a debt of £3600 by 40 annual instalments which form an arithmetical series. When 30 of these instalments have been paid, he dies leaving a third of his debt unpaid, find the value of the first instalment.

[Ans. £51]

7. (*a*) Given $\log_{10} 165=2{\cdot}2175$ and $\log_{10} 6974=3{\cdot}8435$, find the value of $\sqrt[7]{{\cdot}0000165}$. [Ans. ·06974

Group B—Trigonometry

8. (*a*) Same as Q. 10 (*a*) of H. S., 1960.

9. (*a*) Find the values of θ between 0° and 360° which satisfy the equation $3(\sec^2\theta+\tan^2\theta)=5$.

[Ans. $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$]

(*b*) If $A+B+C=180^\circ$, prove that

$$\sin(B+2C)+\sin(C+2A)+\sin(A+2B)$$
$$=4\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$

Second Paper—1964

Group A—Plane Geometry

Construct a square equal in area to a given rectangle.

Or, Construct a regular hexagon about a given circle.

Traces of construction only are required in either of the two constructions.]

4 Same as Q. 2(*a*) of H. S., 1962.

In a $\triangle ABC$, perpendiculars AP and BQ are drawn from A and B to opposite sides and intersect at O.

Prove that $AO.OP=BO.OQ$.

Group B—Co-ordinate Geometry

5. Find the co-ordinates of the point which divides the st line joining the points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) internally in the ratio $m : n$.

Write down the co-ordinates of the middle point of the st. line joining the points (7, −4) and (−5, 6). [Ans. (1, 1)]

6. Find the equation of the straight line passing through the intersection of the st. lines $2x-7y+11=0$ and $x+3y-8=0$, if it

(*a*) passes through the origin. [Ans. $27x-23y=0$]

(*b*) is perpendicular to the st. line $2x-5y+6=0$.

[Ans. $5x+2y-13=0$]

(*c*) makes equal intercepts on the two axes.

[Ans. $13x+13y-50=0$]

Group C—Solid Geometry & Mensuration

10. Give instances from the sides and edges of a cube of :

(*a*) parallel planes, (*b*) planes perpendicular to one another (*c*) lines parallel to a plane, (*d*) lines perpendicular to a plane (*e*) pairs of skew lines.

Or, Same as Q 11 of H. S., 1962 (Compl.).

11. The volume of a right prism is 80 cu.ft. and its base is a triangle whose sides are 3 ft., 4 ft. and 5 ft. respectively. Find the height and the area of the total surface of the prism

[Ans. height $=13\frac{1}{3}$ ft., area = 172 sq ft]

Or, A conical tent is required to accommodate 4 people, each person must have 20 sq. ft. of space on the ground and 100 cu. ft. of air to breathe. Find the height and radius of the tent. [$\pi=\frac{22}{7}$]. [Ans. height = 15 ft., radius = 5·05 ft.]

Higher Secondary Examination—1964 (Compl.)

First Paper—Group A—Algebra

2. (*a*) Solve the equations : $\left.\begin{aligned}\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}&=\frac{5}{2}\\ x+y&=10\end{aligned}\right\}$

[Ans. $x=8$, $y=2$; or, $x=2$, $y=8$]

(*b*) Assuming that the area of a triangle varies as the altitude and base jointly, and that when the altitude is 18 ft. and base